МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Решение: $\dfrac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0.$ ~~Очевидно, что решениями неравенства будут такие x, что только одно из выражений (либо знаменатель, либо числитель дроби в левой части неравенства) неотрицательное, а другое не положительное. (при этом знаменатель~~

Решим два следующих независимых друг от друга неравенства: $x^2-6x+10-2|x-3|\le 0$ и $2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|<0$:

$x^2-6x+10-2|x-3|\le 0$

1) $x\ge 3$

$x^2-6x+10-2x+6\le 0$

$x^2-8x+16\le 0$

$(x-4)^2\le 0$

$x=4$

2) $x<3$

$x^2-6x+10+2x-6\le 0$

$x^2-4x+4\le 0$

$(x-2)^2\le 0$

$x=2$

решение этого неравенства

$x\in[2;2]\cup[4;4]$

$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|<0$

1) $x\ge 2$

$2x^2-4x+x^2-2x<0$

$3x(x-2)<0$

$x\in(0;2) \Rightarrow x\in\varnothing$ (т.к. $x\ge 2$)

2) $0\le 0<2$

$2x^2-4x+2x-x^2<0$

$x(x-2)<0$

$x\in(0;2)$

3) $x<0$

$2x^2-4x+x^2-2x<0$

$3x(x-2)<0$

$x\in(0;2) \Rightarrow x\in\varnothing$ (т.к. $x<0$)

решение этого неравенства:
$x \in (0; 2)$

Теперь заметим, что при $x \in (-\infty; 0)$ исходное выражение положительно (знаменатель и числитель дроби >0); при $x=0$ – знаменатель равен нулю; при $x \in (0; 2)$ – числитель положителен, знаменатель отрицателен => это значение x является решением; при $x=2$ – знаменатель равен 0; при $x \in (2; 4)$ – и числитель и знаменатель >0, выражение слева положительно; при $x=4$ – знаменатель не равен 0, а числитель равен => это значение – решение; при $x \in (4; +\infty)$ – и числитель, и знаменатель положителен, выражение слева больше 0. Таким образом, искомое решение $x \in (0; 2) \cup [4; 4]$.

Ответ: $x \in (0; 2) \cup [4; 4]$.

№ 2.

Решение: ~~Заметим~~ Рассмотрим треугольник с искомым свойством (что одна из медиан перпендикулярна одной из биссектрис). Заметим, что эта медиана и биссектриса не могут выходить из одной вершины, так как иначе величина этого угла $> 180^\circ$ (см. рис. 2).

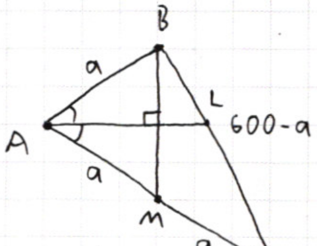


рис. 1

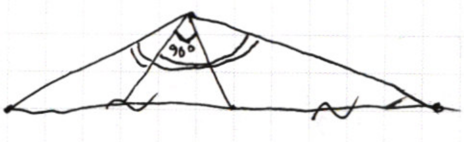


рис. 2

Тогда можно считать, что это медиана BM и биссектриса AL в треугольнике ABC (см. рис. 1).

$AL \perp BM$, $\angle BAL = \angle LAC \Rightarrow \triangle ABM$ – равно

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

бедренный (AL в нем - высота и биссектриса) $\Rightarrow$ $AB = AM = a$. BM - медиана $\Rightarrow AM = MC \Rightarrow AM = MC = AB = a$. Тогда если периметр треугольника 600, то $BC = 600 - AB - AC = 600 - a - 2a = 600 - 3a$. Все стороны положительные целые числа (если одна из сторон равна 0, то треугольник вырожденный) $\Rightarrow a > 0$ и $600 - 3a > 0 \Leftrightarrow 200 > a$ (1) При этом если треугольник ABC существует, то выполняются неравенства треугольника:

$$\begin{cases} AB + BC > AC \\ AB + AC > BC \\ BC + AC > AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 600 - a > 2a \\ a + 2a > 600 - a \\ 600 - a + 2a > a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 300 > a \\ a > 150 \\ 600 > 0 \end{cases}$$

Следовательно, $300 > a > 150 \Rightarrow 200 > a > 150$ (см (1)). Следовательно значений a — 49 $\Rightarrow$ кол-во треугольников — $49 \cdot 2 = 98$ (так как зеркальные треугольники считаем различными).

Ответ: 98.

№ 3.

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \geqslant 0 \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \\ x + y^2 = 5 \\ x - 2y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$$

$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$

$D = 25y^2 - 16y^2 = 9y^2$

$x = \frac{5y \pm \sqrt{9y^2}}{2} = \frac{5y \pm 3y}{2}$

$x_1 = 4y$

$x_2 = y$.

$x = y$ – не подходит, так как $x - 2y \geq 0$

$x = 4y$: Подставим во второе уравнение системы:

$4y + y^2 = 5$

$y^2 + 4y - 5 = 0$

$D = 16 + 20 = 36$

$y = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}$

$y_1 = 1$

$y_2 = -5$

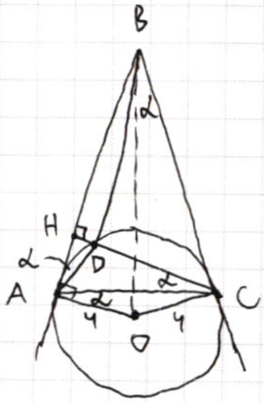
$y = -5$ – не подходит, так тогда $x = 4y = -20 < 2y =$
$= -10$

при $y = 1$, $x = 4$ – получили решение: $4 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 =$
$2 = \sqrt{4 \cdot 1} = \sqrt{4}$

$4^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$

Ответ: $x = 4$; $y = 1$.

№ 4.



Решение: AB – касательная $\Rightarrow \angle BAD = \angle ACD = \alpha$.
$\angle BAO = \angle BCO = 90^\circ$ (как угол между радиусом и касательной)
$\Rightarrow ABCO$ – вписанный $\Rightarrow \angle OBC = \angle CAO$. $CH \perp AB$,
$AO \perp AB \Rightarrow CH \parallel AO \Rightarrow \angle HCA = \angle CAO$. Таким образом, $\angle BAD = \angle ACD = \angle CAO = \angle CBO = \alpha$.
$AD = 2R \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 4 \cdot \sin\alpha = 8 \cdot \sin\alpha$ (где R – ра-

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

диус окружности). Пусть $AB = BC = x$ (как отрезки касательных). Тогда $S_{ABD} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{8x \cdot \sin\alpha^2}{2} = 6 \Rightarrow 8x \cdot \sin\alpha^2 = 12$.

По т. Пифагора из $\triangle DBC$: $OB = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{x^2+16}$, из этого же треугольника $\sin\alpha = \sin\angle OBC = \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}$. Получили систему:

$$\begin{cases} 8x \cdot \sin\alpha^2 = 12 \\ \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{x^2+16}} \end{cases}$$

$$\sin\alpha^2 = \frac{16}{x^2+16}$$

$$8x \cdot \sin^2\alpha = 8x \cdot \frac{16}{x^2+16} = 12$$

$$\frac{32x}{x^2+16} = 3$$

$$3x^2 + 48 - 32x = 0$$

$$D = 32^2 - 4 \cdot 3 \cdot 48 = 1024 - 576 = 448 = 64 \cdot 7$$

$$\sqrt{D} = 8\sqrt{7}$$

$$x = \frac{32 \pm 8\sqrt{7}}{6} = \frac{16 \pm 4\sqrt{7}}{3}$$

$$x_1 = \frac{16+4\sqrt{7}}{3}$$

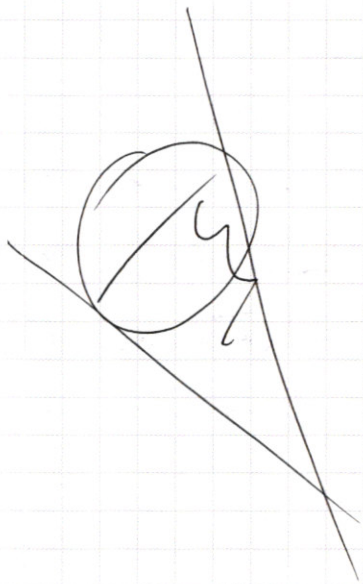
$$x_2 = \frac{16-4\sqrt{7}}{3}$$

при $x = \frac{16+4\sqrt{7}}{3}$: $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{(16+4\sqrt{7})^2}{9} + 16\right)}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{256+128\sqrt{7}+112+144}{9}}} =$

$= \frac{4}{\frac{\sqrt{512+128\sqrt{7}}}{3}} = \frac{12}{\sqrt{128(4+\sqrt{7})}} = \frac{12}{8\sqrt{2(4+\sqrt{7})}} = \frac{3}{2\sqrt{8+\sqrt{7}}}$

при $x = \frac{16-4\sqrt{7}}{3}$: $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{\frac{(16-4\sqrt{7})^2}{9} + 16}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{256-128\sqrt{7}+112+144}{9}}} =$

$= \frac{12}{\sqrt{128(4-\sqrt{7})}} = \frac{3}{2\sqrt{8-\sqrt{7}}}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

искомое отношение: $\frac{AB}{CH} = \frac{BC}{CH} = \frac{1}{\sin\angle ABC} = \frac{1}{\sin 2\alpha} =$

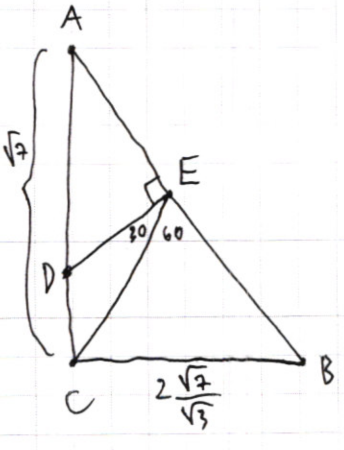
$= \frac{1}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2\sqrt{8-\sqrt7}}\cdot\frac{\sqrt{23-4\sqrt7}}{2\sqrt{8-\sqrt7}}} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{23-4\sqrt7}}{2(8-\sqrt7)}} = \frac{2(8-\sqrt7)}{3\sqrt{23-4\sqrt7}}$

(при $x = \frac{16-4\sqrt7}{3}$) и $= \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2\sqrt{8+\sqrt7}}\cdot\frac{\sqrt{23+4\sqrt7}}{2\sqrt{8+\sqrt7}}} = \frac{2(8+\sqrt7)}{3\sqrt{23+4\sqrt7}}$

(при $x = \frac{16+4\sqrt7}{3}$)

Ответ: $\frac{2(8-\sqrt7)}{3\sqrt{23-4\sqrt7}}$ или $\frac{2(8+\sqrt7)}{3\sqrt{23+4\sqrt7}}$

№5.



Решение: $DE \perp AB \Rightarrow \angle DEB = 90°$. $\angle ACB = 90°$, $\angle DEB = 90° \Rightarrow CDEB$ – вписанный $\Rightarrow \frac{CD}{\sin\angle CED} = \frac{BC}{\sin\angle CEB}$, $\angle CED = 30° \Rightarrow \sin\angle CED = \frac{1}{2}$, $\angle CEB = 90° - \angle CED = 60° \Rightarrow \sin\angle CEB = \frac{\sqrt3}{2}$.

Следовательно, $\frac{CD}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt7}{\sqrt3}}{\frac{\sqrt3}{2}} \Rightarrow 2CD = \frac{4\sqrt7}{3} \Rightarrow CD = \frac{2\sqrt7}{3} \Rightarrow AD = AC - CD =$
$= \sqrt7 - \frac{2}{3}\sqrt7 = \frac{1}{3}\sqrt7 \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt7}{\sqrt7} = \frac{1}{3}$.

$\triangle CAB \sim \triangle EAD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AE = \frac{AC\cdot AD}{AB} = \frac{\frac{7}{3}}{AB} = \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{AC^2+BC^2}} =$
$= \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{7+\frac{4\cdot7}{3}}} = \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{21+28}{3}}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{\sqrt3}} = \frac{1}{\sqrt3}$. Следовательно, $S_{AED} =$
$= \frac{AE\cdot ED}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt3}\cdot\sqrt{AD^2-AE^2}}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt3}\cdot\sqrt{\frac{7}{9}-\frac{1}{3}}}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt3}\cdot\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3\sqrt3}$.

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$; $S_{AED} = \frac{1}{3\sqrt3}$

№ 7.

Решение: Докажем, что $f(p^k) = p\cdot k$ (где k - натуральное, а p - простое) по индукции: База $k=1$ следует из условия. Пусть для k $f(p^k) = pk$, докажем для $k+1$: $f(p^{k+1}) = f(p) + f(p^k) = p + pk = p(k+1)$. (1)

$f(p) = f\left(\frac{p^2}{p}\right) = f\left(p^2 \cdot \frac{1}{p}\right) = f(p^2) + f\left(\frac{1}{p}\right) = 2p + f\left(\frac{1}{p}\right) = p$ $\Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = -p$ (где p - простое). Аналогично (1) получаем, что для p-простого и k-натурального: $f\left(\frac{1}{p^k}\right) = -pk$. (2)

Теперь, если $n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_n$, то $f(n) = f(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = f(a_1) + f(a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n) = f(a_1) + f(a_2) + f(a_3 \cdot \ldots \cdot a_n) = \ldots = f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)$ (3). Тогда $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$, учитывая (1), (2), (3). Теперь посчитаем $f(m)$ для каждого натурального m от 1 до 18):

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(m)$	0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8

для $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ $f(m) = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 + \ldots + p_n\alpha_n$ (следует из (1), (2), (3)). Для всех m от 1 до 18 упорядочим $f(m)$: $\overset{a_1}{0}, \overset{a_2}{2}, \overset{a_3}{3}, \overset{a_4}{4}, \overset{a_5}{5}, \overset{a_6}{5}, \overset{a_7}{6}, \overset{a_8}{6}, \overset{a_9}{7}, \overset{a_{10}}{7}, \overset{a_{11}}{7}, \overset{a_{12}}{8}, \overset{a_{13}}{8}, \overset{a_{14}}{8}, \overset{a_{15}}{9}, \overset{a_{16}}{11}, \overset{a_{17}}{13}, \overset{a_{18}}{17}$. Для того, чтобы $f(x/y) < 0$ нужно $a_i - a_j < 0$. Осталось для каждого a_i от 1 до 18 посчитать кол-во чисел $a_j > a_i$: $\overset{b_1}{17}, \overset{b_2}{16}, \overset{b_3}{15}, \overset{b_4}{14}, \overset{b_5}{12}, \overset{b_6}{12}, \overset{b_7}{10}, \overset{b_8}{10}, \overset{b_9}{7}, \overset{b_{10}}{7}, \overset{b_{11}}{7}, \overset{b_{12}}{4}, \overset{b_{13}}{4}, \overset{b_{14}}{4}, \overset{b_{15}}{3}, \overset{b_{16}}{2}, \overset{b_{17}}{1}, \overset{b_{18}}{0}$. Просуммировав b_i $(1 \le i \le 18)$ получим ответ:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

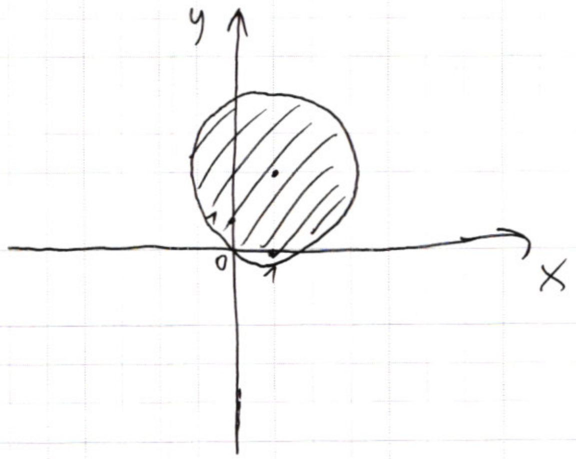
$17 + 16 + 15 + 14 + 12 + 12 + 10 + 10 + 7 + 7 + 7 + 4 + 4 + 4 +$
$+ 3 + 2 + 1 + 0 = 151.$

Ответ: 151 пара.

№ 6.

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y \leq 0 \end{cases}$$

$x^2 - 2x + y^2 - 4y \leq 0 \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$, т.е. это уравнении ~~от~~ круга с центром $x = 1$, $y = 2$ и радиусом $\sqrt{5}$.



$f(p) = f(p\cdot 1) = f(p) + f(1) = p$

$f(1) = 0 \qquad f(p^2) = 2p \qquad 3^2\cdot 2$

$f(p^k) = kp \quad k\in \mathbb{N}$

1 $\quad 2-18$

2 $\quad 3-18$

3 $\quad 4-18$

4 $\quad 5-18$

5

$f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}) = f(p_1^{k_1}) + f(p_2^{k_2}) = k_1p_1 + k_2p_2$

$f\left(\frac{1}{p}\right) =$

$p = f(p) = f\left(\frac{p^2}{p}\right) = f\left(p^2\cdot\frac{1}{p}\right) = f(p^2) + f\left(\frac{1}{p}\right) = 2p + f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = -p$

$18 \times 4 = 72 \qquad 6\cdot 3 = 3^2\cdot 2$

$f\left(\frac{p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}}{q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}\cdots q_m^{\alpha_m}}\right) = p_1k_1 + p_2k_2 + \ldots + p_nk_n - q_1\alpha_1 - q_2\alpha_2 - \ldots - q_m\alpha_m$

$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17 \qquad 2^2\cdot 3$

72

24

26

21

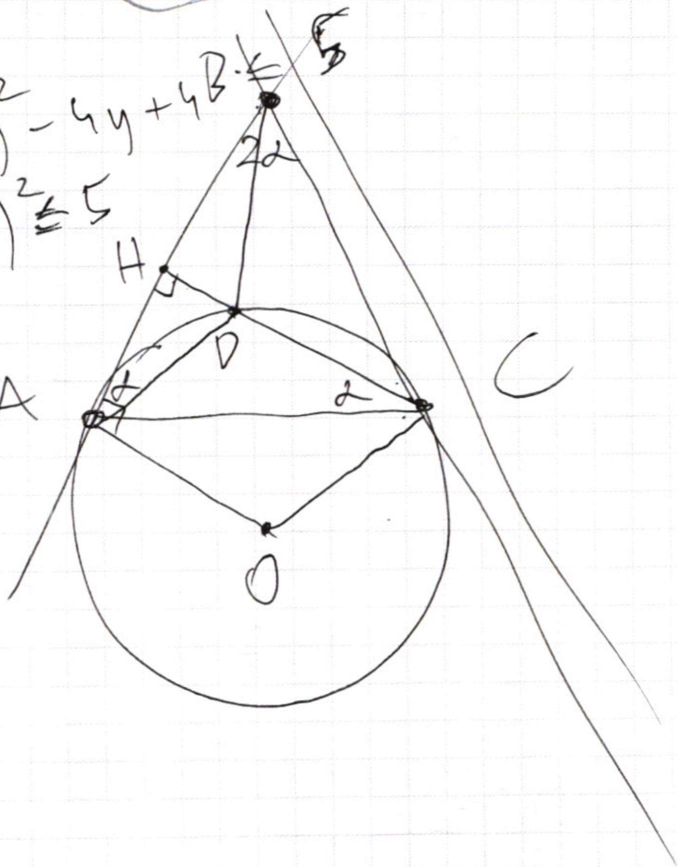
8

$80 + 50 + 21$

4

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \leq 5$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

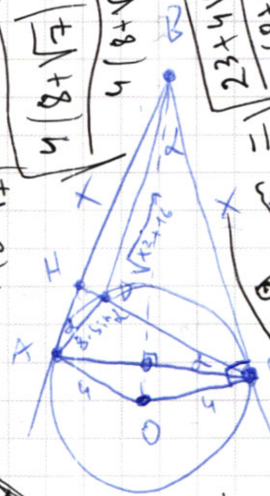
ШИФР

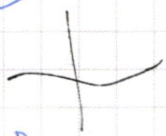
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{1-\frac{9}{4(8-\sqrt7)}} = \sqrt{\frac{4(8+\sqrt7)-9}{4(8+\sqrt7)}} = \boxed{\sqrt{\frac{23+4\sqrt7}{4(8+\sqrt7)}}}$$

$$\boxed{\frac{9}{4(8-\sqrt7)}}$$





$$8x\cdot \sin^2 = 12 \qquad 2\cdot 3\sqrt{\frac{23-4\sqrt7}{4(8-\sqrt7)}}$$

$$\sin\angle = \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$8x\cdot\frac{16}{x^2+16} = 12$$

$$8x\cdot\frac{4}{x^2+16} = 3$$

$$32x = 3x^2+48$$

$$3x^2-32x+48=0$$

$$D = 32^2-12\cdot 48 = 1024-576 = 448 = 64\cdot 7$$

$$\sqrt{D} = 8\sqrt7$$

$$x = \frac{32\pm 8\sqrt7}{6} = \frac{16\pm4\sqrt7}{3}$$

$$\frac{1}{\sin\angle} = \frac{\sqrt{x^2+16}}{4} = 1)\ \cancel{\frac{\sqrt{16^2+2\cdot4\cdot16\sqrt7+16\cdot7+144}}{\sqrt3\cdot4}}$$

$12 \cdot 4 = 48$, $48 \cdot 12 = 576$, $1024 - 576 = 448$, $448 : 32 = 14$, $16 \cdot 8 = 128$, $16\cdot16 = 256$, $16 \cdot 7 = 112$, $16\cdot 9 = 144$, $256+112 = 368$, $368+144 = 512$, $512 : 4 = 128$

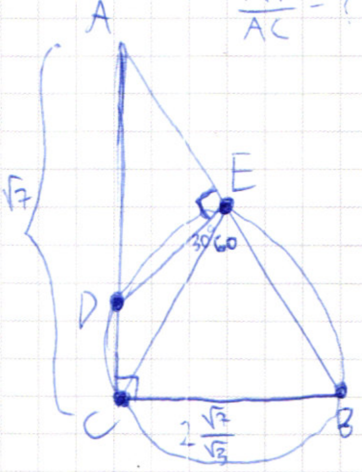
$$\sqrt{\frac{368+128\sqrt7+144}{9}} \qquad \frac{\sqrt{512+128\sqrt7}}{12} \qquad \frac{\sqrt{128\cdot(4+\sqrt7)}}{12}$$

$$1)\ x = \frac{16+4\sqrt7}{3}$$

$$\sqrt{x^2+16} = \sqrt{256+112+128\sqrt7}$$

$$\frac{8\sqrt{8+2\sqrt7}}{12} \qquad \frac{2\sqrt{8+2\sqrt7}}{3}$$

$$\frac{AD}{AC} - ?$$



$$\frac{AD}{AC} = ADE \sim ABC$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{3AD} \Rightarrow 3AD^2 = AB\cdot AE$$

$$AE = \frac{3AD^2}{AB} = \frac{3\cdot\frac{7}{9}}{AB} = \frac{7}{3AB}$$

$$\frac{CD}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 60^\circ}$$

$$\frac{CD}{\frac12} = \frac{BC}{\frac{\sqrt3}{2}}$$

$$\sqrt{7+4\cdot\frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{21}{3}+\frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt3}$$

$$AD = \sqrt7 - \frac{2\sqrt7}{3}$$

$$AD = \frac{\sqrt7}{3}$$

$$2CD = \frac{2BC}{\sqrt3} = \frac{2\cdot2\frac{\sqrt7}{\sqrt3}}{\sqrt3} = \frac{4\cdot\sqrt7}{3}$$

$$AE = \frac{7\cdot\sqrt3}{3\cdot7} = \frac{1}{\sqrt3}$$

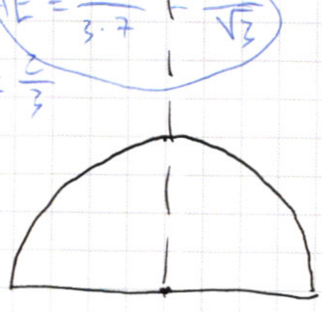
$$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{\sqrt7}{3}}{\sqrt7} = \frac13$$

$$CD = \frac{2\sqrt7}{3}$$

$$DE = \sqrt{\frac79 - \frac13} = \sqrt{\frac49} = \frac23$$

$$AC = 3AD$$

$$S_{ADE} = \frac{DE\cdot AE}{2} = \frac{\frac23\cdot\frac{1}{\sqrt3}}{2} = \frac{1}{3\sqrt3}$$



$$\frac{2\sqrt{8+\sqrt7}}{2(8+\sqrt7)} = \frac{2\sqrt{8+\sqrt7}\,(8-\sqrt7)}{2(64-\cancel{49}\,7)} =$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4 \quad -12 \quad +10 \quad -2\cdot 1 \quad = -8+10-2=0$

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$2x|x-2|+|x|\,|x-2|$

при $x=4$, $x=2$

$x^2-6x+10-2|x-3|\le 0$

$x^2-6x+10\le 2|x-3|$

I) $x\ge 3$

$x^2-6x+10\le 2x-6$

$x^2-8x+16\le 0$

$(x-4)^2\le 0$

$x=4$

II) $x\le 3$

$x^2-6x+10\le 6-2x$

$x^2-4x+4\le 0$

$(x-2)^2\le 0$

$x=2$

$x\in(0;2)\cup[4;4]$.

при $x\in[0;2]$

$32 \quad -16 \quad +8 \quad >0$

$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|\le 0$

$2x^2-4x\le -|x|\cdot|x-2|$

1) $x\ge 2$

$2x^2-4x\le -x(x-2)$

$2x^2-4x\le -x^2+2x$

$3x^2-6x\le 0$

$3x(x-2)\le 0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$

$x\in[0;2] \Rightarrow x=2$

2) $0\le x\le 2$

$2x^2-4x\le -x(2-x)$

$2x^2-4x\le -2x+x^2$

$x^2-2x\le 0 \qquad x\in[0;2]$

$x(x-2)\le 0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$

3) $x\le 0$

$2x^2-4x\le -(-x)(2-x)$

$2x^2-4x\le x(2-x)$

$2x-x^2$

$3x^2-6x\le 0$

$3x(x-2)$

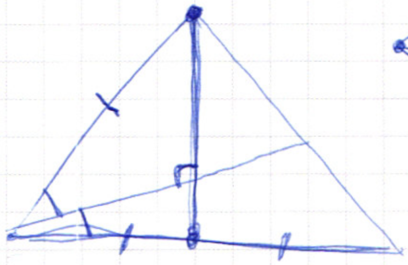
$x\in[0;2] \Rightarrow x=0$

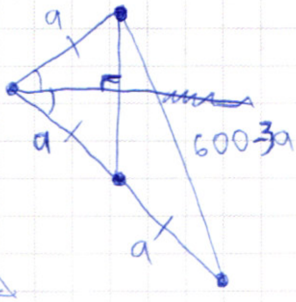
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





a - целое
2a - целое
600 - 3a - целое

$600-3a>0$

$600>3a$

$200>a$

$\frac{600}{4}=150$

$600-2a>2a \iff 150>a$

$3a>600-3a \iff a>100$

$600-a>a \iff 300>a$

$5>a>3$

$10>a>1$

8

56·2
28·4

$2\cdot 224=4\cdot 112=16\cdot 28=16\cdot 4\cdot 7$

$8\sqrt{7}$

$150>a>100$

$150-100-1=49$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$\sqrt{x}=t$

$t^2=x$

$xy-2y^2=y\sqrt{xy}$

$2x+2y^2=10$

$2x+xy=10+y\sqrt{xy}$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2+4y^2=5xy$

$x^2-5xy+4y^2=0$

$D=25y^2-16y^2=9y^2$

32 × 32 = 64, 96 → 1024

1024 − 576 = 448

48 × 12 = 96, 48 → 576

$x=4 \quad y=1$

$x=-20, \quad y=-5$

$12x^2+16\cdot 12-8\cdot 16x=0$

$3x^2+4\cdot 12-32x=0$

$3x^2-32x+48=0$

$D=32^2-3\cdot 4\cdot 48$

2) $y\le 0$

$\sqrt{D}=-3y$

$x=\frac{5y\pm 3y}{2}$

$\sqrt{x^2+16}$

1) $y\ge 0$

$\sqrt{D}=\pm 3y$

$x=\frac{5y\pm 3y}{2}$

$4y+y^2=5$

$y^2+4y-5=0$

$D=16+20=36$

$y=\frac{-4\pm 6}{2}=1,-5$

$x_1=4y$

$x_2=y$

$y+y^2=5$

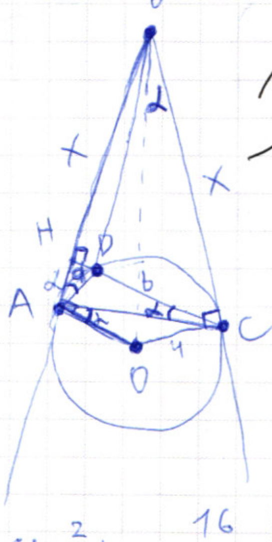
$y^2+y-5=0$

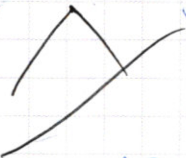
$1+20=21$

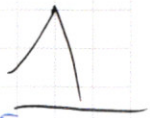
$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$x-2y\ge 0$

$x\ge 2y$







$\frac{AB}{CH}=\frac{BC}{CH}=\frac{1}{\sin\angle ABC}$

16 · 8 = 128

$\frac{ax}{2}=6$

$a=\frac{12}{x}$

$AHD\sim CHA$

$\frac{AH}{HD}=\frac{CH}{HA}$

$\frac{AD}{\sin\alpha}=2R=8$

$\frac{AD\cdot x\cdot\sin\alpha}{2}=6$

$\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{x^2+16}}$

$\sin^2\alpha=\frac{16}{x^2+16}$

$8\cdot x\cdot\sin\alpha^2=12$

$128x=12x^2+16\cdot 12$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)