МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$$\frac{(x-3)^2+1-2|x-3|}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2)+|x||x-2|}\le 0$$

При $x\in(-\infty;0]$

$|x-3|=3-x$

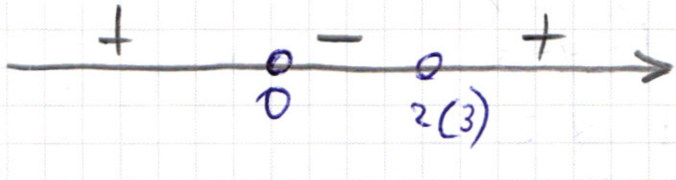
$|x|=-x$

$|x-2|=2-x$

$$\frac{(2-x)^2}{2x(x-2)+x(x-2)}\le 0$$

$$\frac{(2-x)^2}{3x(x-2)}\le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}\le 0$$



$\left[\begin{array}{l} x\in(0;2) \\ x\in(-\infty;0] \end{array}\right.$ — решений нет

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1
(Нумеровать только чистовики)

При $x \in (0;2]$

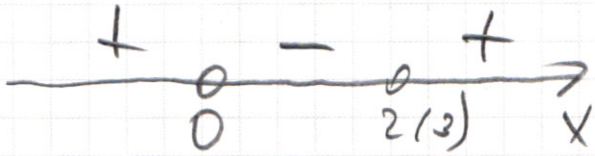
$|x-3| = 3-x$

$|x-2| = 2-x$

$|x| = x$

$$\frac{(2-x)^2}{2x(x-2)-x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \le 0$$



$\begin{cases} x \in (0;2) \\ x \in (0;2] \end{cases} \Rightarrow x \in (0;2)$ – решение

При $x \in (2;3]$

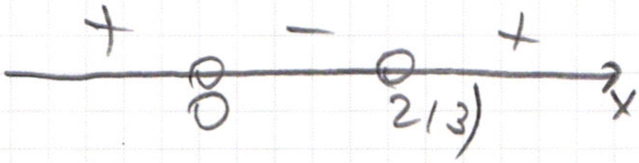
$|x-3| = 3-x$

$|x-2| = x-2$

$|x| = x$

$$\frac{(2-x)^2}{2x(x-2)+x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \le 0$$



$\begin{cases} x \in (0;2) \\ x \in (2;3] \end{cases}$ – нет решений

При $x \in (3;+\infty)$

$|x-3| = x-3$

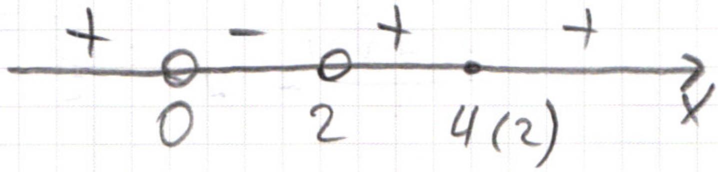
$|x-2| = x-2$

$|x| = x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{(x-4)^2}{x(x-2)} \le 0$$



$\begin{cases} x \in (0;2) \\ x \in (3;+\infty) \end{cases}$ – нет решений

Ответ: $x \in (0;2)$

Задача 3

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} & (1) \\ x + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$

$(1)^2$: $x^2 + 4y^2 - 4xy = xy$

$x^2 + 4y^2 - 5xy = 0$

Решим относительно x

$D = (-5y)^2 - 4 \cdot 4y^2 = 9y^2 = (3y)^2$

Пусть $y \ge 0$

$x = \frac{5y \pm \sqrt{(3y)^2}}{2}$

$x_1 = 4y$ или $x = y$

(2) $y^2 + 4y - 5 = 0$

$y_1 = -5$ – нерешение, т.к $y \ge 0$

$y_2 = 1$

(2) $y^2 + y - 5 = 0$

$D = 1 + 20 = 21$

$x=4$

Действительно

$\begin{cases} 4 - 2 = \sqrt{4\cdot 1} \\ 1+2^2=5 \end{cases}$

$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$y=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$ - не корень, т.к $y\geq 0$

$y=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

Не является решением, т.к

$\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} - 2\cdot\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \neq \sqrt{\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^2}$

При $y<0$

$x=\dfrac{5y\pm\sqrt{(3y)^2}}{2}$

$x=\dfrac{5y\pm(-3y)}{2}$ ~~, что совпадает при $y\geq 0$~~

~~Ответ: $x=4; y=1$~~

$x_1=4y$

$x_2=y$

(2) $y^2+4y-5=0$ или $y^2+y-5=0$

$y_1=1$ - не решение, т.к $y<0$

$y_2=-5$

$x=-20$

Не решение, т.к

$-20-2(-5)\neq\sqrt{(-5)\cdot(-20)}$

$y_1=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$ не корень, т.к $y<0$

$y_2=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$

Действительно

$\begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} - 2\cdot\left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right) = \sqrt{\left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} + \left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2 = 5 \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $x_1 = 4$, $y_1 = 1$

$x_2 = \frac{-1-2\sqrt{21}}{2}$, $y_2 = \frac{-1-2\sqrt{21}}{2}$.

Задача 6.

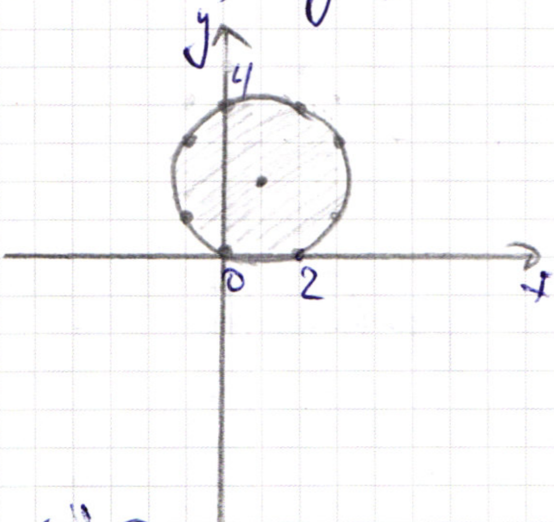
$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| \geq 4 & (1) \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 \leq 0$

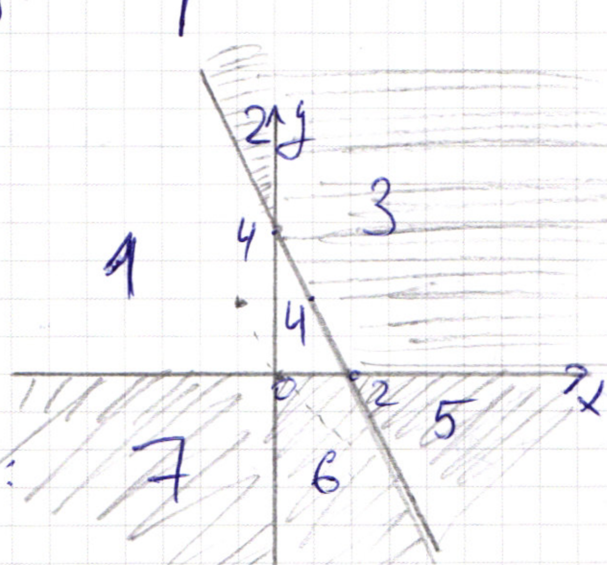
$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq (\sqrt{5})^2$

Построим график

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{5}$ – это гр. окружности $((1;2), \sqrt{5})$



графиком нер-ва является заштрихованная область.



(+) Решим нер-во для каждой области:

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

1) $|2x|=-2x$

$|y|=y$

$|4-2x-\cancel{2}y|=4-2x-\cancel{2}y$

$-2x+y+4-2x-y>4$

$-4x>0$

$x<0$, в области 1-~~ых~~ ни одна точка неудовлетворяет

2) $|2x|=-2x$

$|y|=y$

$|4-2x-y|=-4+2x+y$

$-2x+y-4+2x+y>4$

$2y>8$

$y>4$, вся вторая область удовлетворяет нер-ву

3) $|2x|=2x$

$|y|=y$

$|4-2x-y|=-4+2x+y$

$2x+y-4+2x+y>4$

$4x+2y>8$

$2x+y>4$

$y>4-2x$, вся третья область удовлетворяет нер-ву

4) $|2x|=2x$

$|y|=y$

$|4-2x-y|=4-2x-y$

$2x+y+4-2x-y>4$

$0>0$, в области 4-нет решений

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $|2x| = 2x$

$|y| = -y$

$|4-2x-y| = -4+2x+y$

$2x-y-4+2x+y > 4$

$4x > 8$

$x > 2$, вся 5 область удовлетворяет нер-ву

6) $|2x| = 2x$

$|y| = -y$

$|4-2x-y| = 4-2x-y$

$2x - y + 4 - 2x - y > 4$

$-2y > 0$

$y < 0$, вся 6 область удовлетворяет ~~расс~~ нер-ву

7) $|2x| = -2x$

$|y| = -y$

$|4-2x-y| = 4-2x-y|$

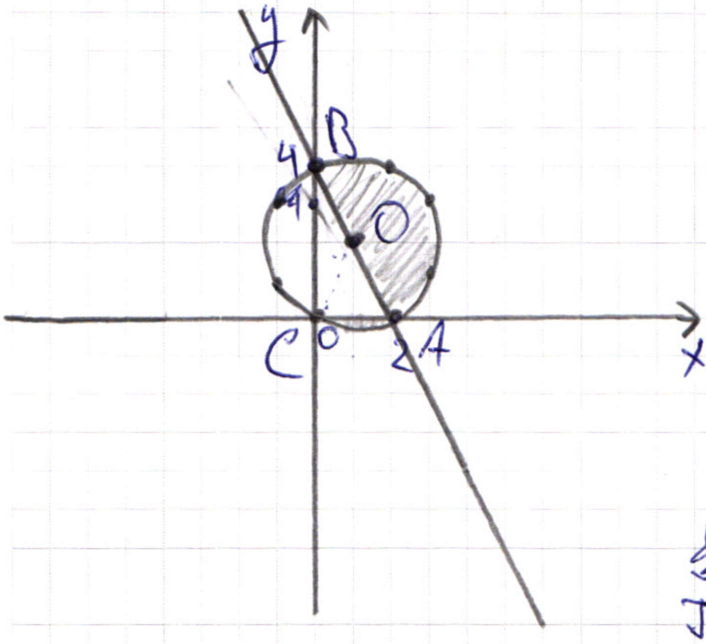
$-2x-y+4-2x-y > 4$

$-4x-2y > 0$

$2x+y < 0$

$y < -2x$, вся 7 область удовлетворяет нер-ву

Теперь объеденим оба графика и найдем их пересечение:



$S_{\text{сег } BA} = \frac{1}{2} S_{\text{окр}} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{5}{2}\pi$

$S_{\text{сегCA}} = S_{\text{сек COA}} - S_{\triangle COA}$

Т.к CO – медиана $\triangle ACB$, то $S_{\triangle COA} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 2$

~~cos~~

По т. косинусов в $\triangle COA$

$2^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos COA$

$4 = 10 - 10\cos COA$

$\cos\angle COA = \frac{3}{5}$

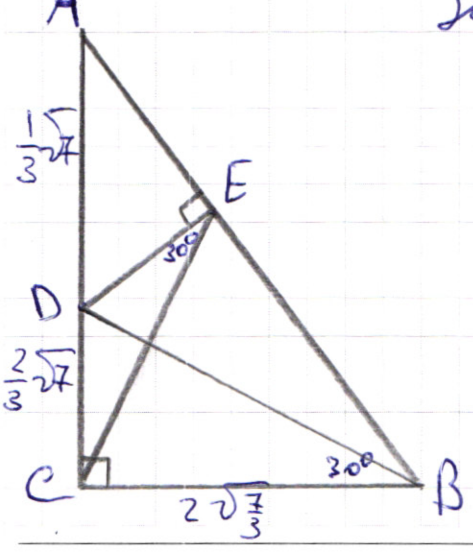
$\angle COA = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$

$S_{\text{сек COA}} = \frac{\angle COA}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{\arccos\left(\frac{3}{5}\right)}{360} \cdot \pi \cdot 5$

$S_{\text{сегCA}} = \frac{\pi \cdot \arccos\left(\frac{3}{5}\right)}{72} - 2$

$S = S_{\text{сегCA}} + S_{\text{сегBA}} = \pi\left(\frac{5}{2} + \frac{\arccos\left(\frac{3}{5}\right)}{72}\right) - 2$

Ответ: $\pi\left(\frac{5}{2} + \frac{\arccos\left(\frac{3}{5}\right)}{72}\right) - 2$



Задача 5.

$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30°$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Так как $\angle DCB = \angle AED = 90^\circ$, то четырёхугольник $CBED$ – вписанный, а углы $\angle DBC = \angle DEC = 30^\circ$

$$\frac{DC}{CB} = tg\,30^\circ$$

$$\frac{DC}{2\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}\,DC = 2\sqrt{\frac{7}{3}} = 2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

$$DC = \frac{2}{3}\sqrt{7}$$

$$AD = AC - DC = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$$

По т. Пифагора

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 7 + 4\cdot\frac{7}{3} = \cancel{\frac{14}{3} + \frac{21}{3} = \frac{35}{3}} = \frac{21}{3} + \frac{28}{3} = \frac{49}{3}$$

$$AB = \cancel{\sqrt{\frac{35}{3}}} = 7\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Рассмотрим степень точки A относительно окружности описанной около $CDEB$

$AD\cdot AC$ или $AE\cdot AB$, то есть

$$AD\cdot AC = AE\cdot AB$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{7}\cdot\sqrt{7} = AE\cdot\sqrt{\frac{35}{3}}$$

$$\frac{7}{3} = AE\cdot\sqrt{\frac{35}{3}} \qquad \frac{7}{3} = AE\cdot 7\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\cancel{\frac{49}{9} = AE^2\cdot\frac{35}{3}} \qquad \frac{1}{3} = AE\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\cancel{\frac{7}{3} = AE^2 \cdot 5}$ $AE = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cancel{AE = \sqrt{\frac{7}{15}}}$

По т. Пифагора для $\triangle ADE$

$DE^2 = AD^2 - AE^2$

$DE^2 = \frac{7}{9} - \cancel{\frac{7}{15}} - \frac{1}{3}$

$DE^2 = \cancel{\frac{35}{45} - \frac{21}{45} = \frac{14}{45}} = \frac{7}{9} - \frac{3}{9} = \frac{4}{9}$

$DE = \cancel{\sqrt{\frac{14}{45}}} = \frac{2}{3}$

$\cancel{S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{15}} \cdot \sqrt{\frac{14}{45}}} \cdot \frac{2}{3}$

$\cancel{= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7 \cdot 7 \cdot 2}{15 \cdot 15 \cdot 3}} = \frac{7}{30}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{15}}}$

~~Ответ: AD : AC~~ $\cancel{= \frac{1}{3}}$; $\cancel{S_{\triangle ADE} = \frac{7}{30}\sqrt{\frac{2}{3}}}$

$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $AD : AC = \frac{1}{3}$; $S_{\triangle ADE} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Задача 7

Положим $a = 1$; $b = p$ (p - простое)

$f(1 \cdot p) = f(p) + f(1)$

$f(p) = f(p) + f(1)$

$f(1) = 0$

Положим $a = x$, $b = \frac{1}{x}$

$f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x})$

$f(1) = f(x) + f(\frac{1}{x})$

$f(x) = -f(\frac{1}{x})$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть ~~х~~ $x \in \mathbb{N}$ и $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ - его разложение на простые множители, тогда

$f(x) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = f(p_1 \cdot p_1^{\alpha_1-1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = f(p_1) + f(p_1^{\alpha_1-1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) =$

$= \ldots = \alpha_1 \cdot p_1 + f(p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = \ldots = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_k \cdot p_k$

$f(x/y) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$, значит $f(\frac{x}{y}) < 0$, когда $f(x) < f(y)$

Запишем значения $f(n)$ при $n \in \mathbb{N}$ и $n \in [1; 18]$

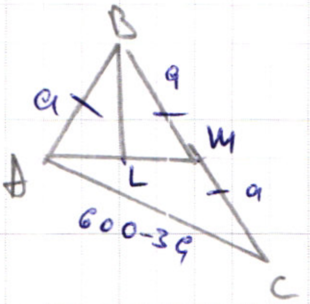
$f(1) = 0$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 2 \cdot 2 = 4$, $f(5) = 5$, $f(6) = 2+3 = 5$, $f(7) = 7$, $f(8) = 3 \cdot 2 = 6$, $f(9) = 2 \cdot 3 = 6$, $f(10) = 2+5 = 7$, $f(11) = 11$, $f(12) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7$, $f(13) = 13$, $f(14) = 2+7 = 9$, $f(15) = 5+3 = 8$, $f(16) = 2 \cdot 4 = 8$, $f(17) = 17$, $f(18) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$

Упорядочим:

$f(1) < f(2) < f(3) < f(4) < f(5) = f(6) < f(8) = f(9) < f(7) = f(10) =$
$= f(12) < f(15) = f(16) = f(18) < f(14) < f(11) < f(13) < f(17)$

Всего пар ~~из~~ (неупорядоченных) $\frac{18 \cdot 17}{2} = 9 \cdot 17 = 153$, равных пар (т.е $x = y$) $- 8$, пар в которых два элемента не равны 146. В каждой паре a и b ровно ~~од~~ одно из $f(\frac{a}{b})$ и $f(\frac{b}{a})$ меньше 0, т.к или $f(a) < f(b)$, или $f(b) < f(a)$ (равные мы исключили)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



Задача 2

Пусть биссектриса и медиана пересекаются в точке L, в $\triangle ABM$ BL — биссектриса и высота, значит $AB = BM$, т.к AM — медиана $AB = BM = MC = a$, тогда $AC = 600 - a$.

1) Пусть BC — наибольшая сторона, тогда

$2a > 600-3a$ и $2a < a + (600-3a)$

$a > 120$ и $a < 150$

$a \in (120; 150)$

2) Если $BC = AC$, то $a = 120$

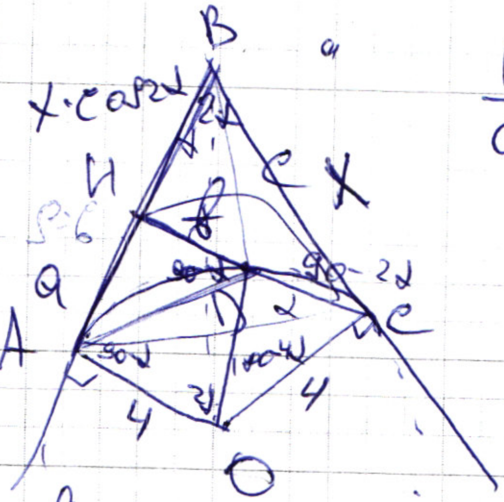
3) Если AC — наибольшая, тогда $600-3a > 2a$ и $600-3a < 3a$

$a \in (100; 120)$

Значит, $a \in (100; 150)$, т.к стороны натуральные, то $a \in [101; 149]$ всего 49 вариантов. ~~Ка~~ Один случай ~~мы посчитали дважды. Каждый~~, который мы могли бы посчитать дважды если стороны составляют ~~ариф~~ геометрическую прогрессию с коэффициентом 2, т.е одна сторона a, вторая $2a$, третья $4a$, тогда $7a = 600$ и a — не целое. Ответ: 49.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{a}{x} = \cos 2\alpha$



$90-\alpha-90+2\alpha$

$\frac{BC}{CH} = ?$ или $\sin 2\alpha$

$180-2\alpha$

$90-\alpha$

$\frac{AO}{AB} = tg\alpha$

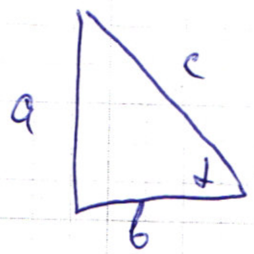
$90+\alpha$

$\cos^2 + \sin^2 = 1$

$\sin$

$\frac{b}{a} = \frac{a}{c} = a$

$180-2\alpha-180+4\alpha$



$tg\alpha = \frac{a}{b}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad \frac{\sin}{\cos}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$AB = \frac{4}{tg\alpha}$

$AD = 16+16+-2\cdot16\cdot\cos 2\alpha$

$12 = AD \cdot AB = \frac{4\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \left(32-32\cos 2\alpha\right)$

~~sin 30~~

~~sin~~ $\frac{12}{\sqrt{36}} = \frac{1}{3} =$ $\quad \frac{4\cos\alpha}{\sin\alpha} -$

$\cos 60 = \frac{1}{2}$

~~sin~~ $\cos 30 = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(1-\sqrt{1-\sin}\right.$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\sin\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta$

$30 \ 30 = \frac{3}{4} \frac{1}{4} -$

$\frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

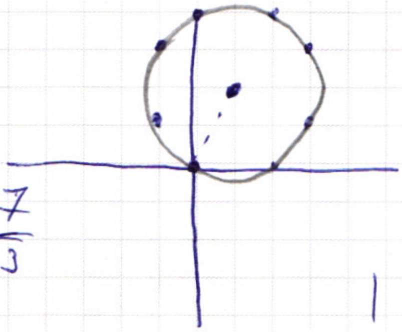
ШИФР

(заполняется секретарём)

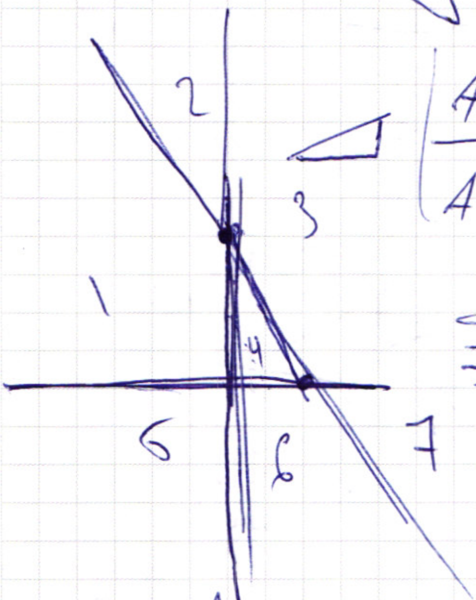
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-1)^2-1+(y-2)^2-4$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$



$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{2\sqrt3}=\frac{7}{2\sqrt3}$



$\left(\frac{AE}{Ae}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt3}{2\sqrt7\cdot3}\right)^2$

$4-2x-y=0$

$\frac{\cancel{3}1}{7\cdot3}$

$y=4-2x$

$\frac{1}{2\sqrt3}$

$\frac{1}{x}$

$\frac{x}{2\sqrt{\frac{7}{3}}}=2\sqrt3$

$x\ \frac{2}{3}\sqrt7$

$4x^2=x^2+\frac{4\cdot7}{3}$

$9x^2=4\cdot7$

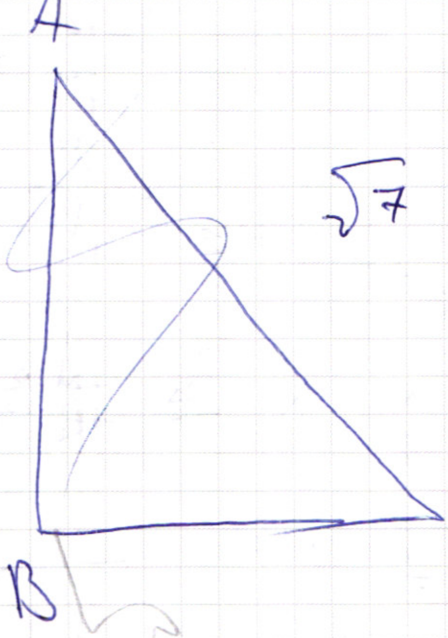
$x=\frac{2\sqrt7}{3}$

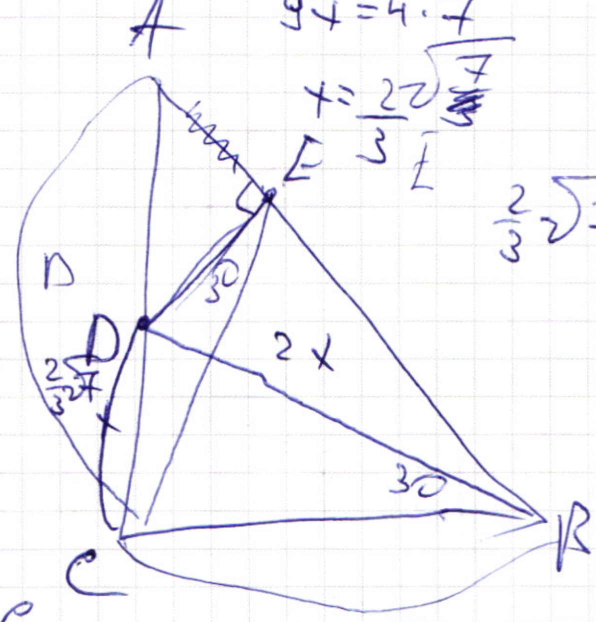
$\frac{2}{3}\sqrt7$

$\frac{14}{4\sqrt5}$

$\frac{21}{\dots}$

$\frac{35}{40}$





$2\sqrt{\frac{7}{3}}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

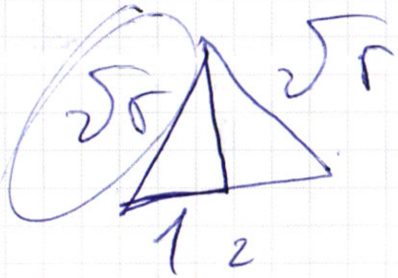
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{1}$ $2\sqrt{5}$

$(1;-1)$

$2+1+|4-2+1| \geq 4$



$3+3 \geq 4$

$\frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot 4 \cdot 2$

$\frac{1 \cdot \sqrt{15}}{2\sqrt{5}}$

$t = \sqrt{\frac{7}{15}}$

$\frac{7}{15} = t^2$

$\frac{7}{3} = t^2 \cdot 5$

$\frac{4 \cdot 9}{3} = x^2 \cdot \frac{35}{3}$

$\frac{7}{3} = x \cdot \sqrt{\frac{35}{3}}$

$\frac{1}{3}\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = x \cdot \sqrt{\frac{35}{3}}$

$\frac{7}{3} = \frac{t\sqrt{35}}{\sqrt{3}}$

$\frac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{35}} = x$

$t = \frac{\sqrt{21}}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 3}}{3} = \sqrt{\frac{35}{3}}$

$10 - 2 \cdot 5 \cdot x = 2$

$1 - x = \frac{2}{10}$

$x = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\frac{4}{5} \quad 2 \cdot 2$

$AE = \sqrt{\frac{7}{15}}$

$\frac{AE}{Ae} = \frac{\sqrt{\frac{7}{15}}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{1}{15}}$

$\frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{2 \cdot 7}{\sqrt{3}} \ 15$

$\frac{2 \cdot 7}{\sqrt{3}}$

$\overline{15}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1\cdot p) = f(p) + \cancel{f}\, f(1)$

$f(p) = f(p) + f(1)$

$f(1) = 0$

$\cancel{f(p_1 \cdot p_2)}$

$\frac{q}{5} \quad \frac{x}{y} \sim 2$

$y = x$

$f\left(\frac{p}{p}\right) = f(p)$

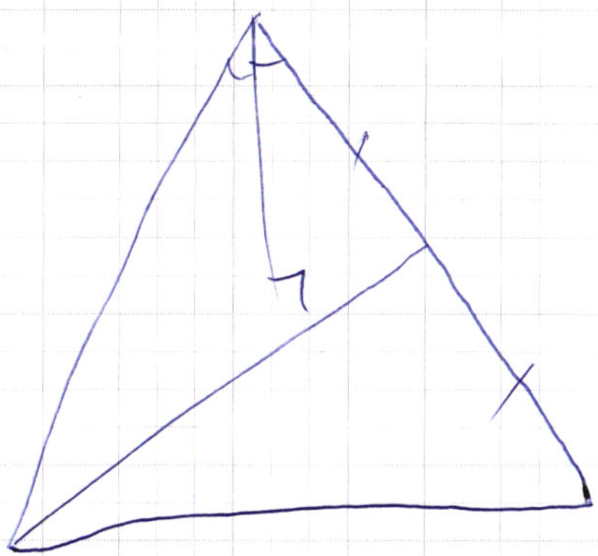
$f\left(\frac{x}{y}\right) = \underset{\substack{\| \\ (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots)}}{f(x)} + f\left(\frac{1}{y}\right)$

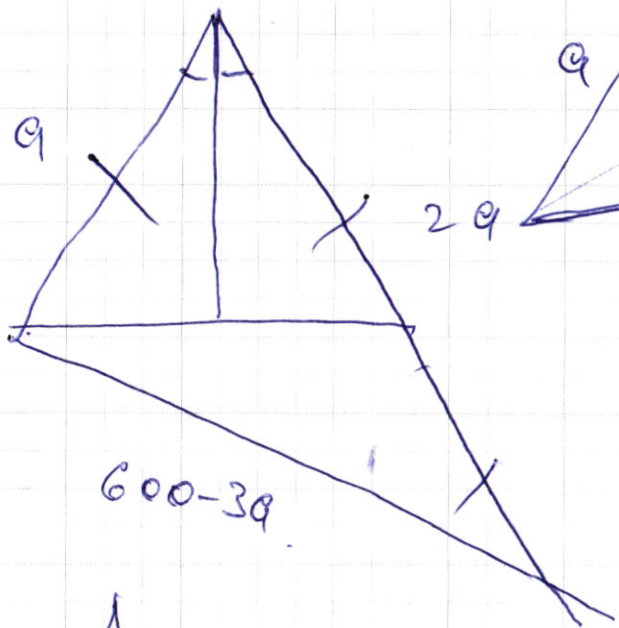
$f\left(\frac{q}{q}\right) = f(q) + f\left(\frac{1}{q}\right)$

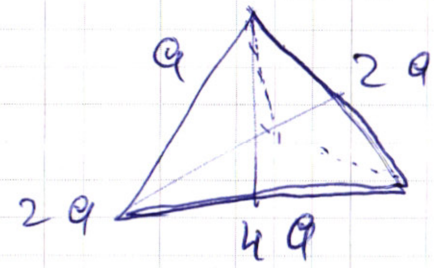
$f(q) = -f\left(\frac{1}{q}\right)$

$f(1) < f(2) < f(3) < f(4) < f(5) = f(6) < f(8) = f(9) < f(10) = f(7) = f(12) <$
$< f(15) = f(16) = f(18) \leq f(11) < f(13) < f(17)$

$f(19)$







$600-3a>2a$ $600>5a$

$600-3a<3a$ $a<120$

$600<6a$

$a>100$

$\boxed{a\in(100;120)}$

$a\in(100;150)$

$2a>600-3a$

$2a<600-2a$

$5a>600$

$4a<600$

$a>120$

$a<150$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{(x-3)^2 - 2|x-3| + 1}{2x(x-2) + |x|\cdot|x-2|} \le 0$$

$$(|x-3|-1)^2$$

$BO =$

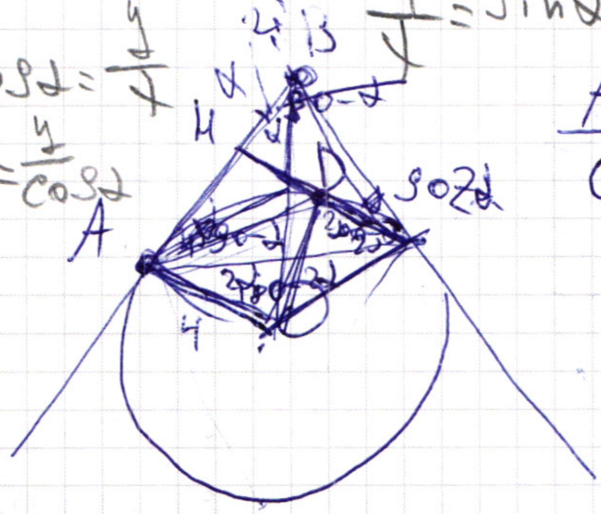
$x = \frac{4}{\sin\alpha}$

$\frac{4}{x} = \sin\alpha$

$\frac{4\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{4}{x}$

$x = \frac{4}{\cos\alpha}$



$\frac{AB}{CH} = ?$

$\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos\alpha^2}$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin\alpha^2}$

$\frac{1}{\cos}$

$\cos(90-2\alpha)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

90α

$\angle POC = 180 - 4\alpha$

$\angle AOD = 180 - 2\alpha - (180 - 4\alpha) = 2\alpha$

$12 = AB\cdot AD\cdot\sin\alpha = 4\cos\alpha\cdot(32 - 32\cdot\cos 2\alpha)$

$AD = 16 + 16 - 2\cdot 16\cdot\cos 2\alpha$

$\frac{12}{64} = \cos\alpha(1-\cos 2\alpha)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=2\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \qquad y=\pm2\sqrt{5-x}$$

$$5-y^2-2y=2\sqrt{y(5-y)}$$

$$x=5-y^2 \qquad \sqrt{3\cdot4}=2\sqrt{3}$$

$$5-y^2-2y=2\sqrt{y(5-y^2)}$$

$$\|$$

$$-(y^2+2y-5)=$$

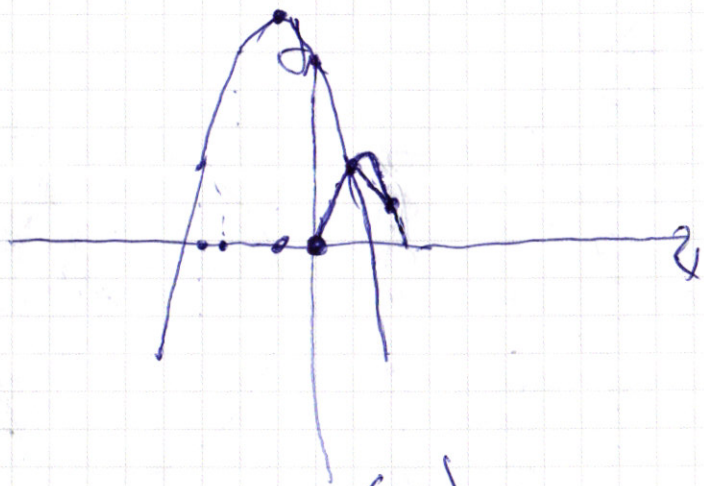
$$=-((y+1)^2-6)$$

$$y(\sqrt{5}-y)(\sqrt{5}+y)\geq0$$

$+ \quad - \quad + \quad -$

$-\sqrt{5} \quad 0 \quad \sqrt{5}$

$-3($



$(1,2)$

$y\geq0$

$$\begin{cases} x^2+4y^2-5xy=xy \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$x_1=4y$

$x_2=y$

$$y^2+4y-5=0$$

$\cancel{y_1=-5}$

$y_2=1$

$x=4$

$y=1$

$$x^2-(5y)\cdot x+4y^2$$

$$D=25y^2-16y^2=(3y)^2$$

$$x=\frac{5y\pm2\sqrt{(3y)^2}}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)