МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $BC=\sqrt{29}$, $AC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \le 0$

$\frac{(x-1)^2+4-4|x-1|}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|} \le 0$

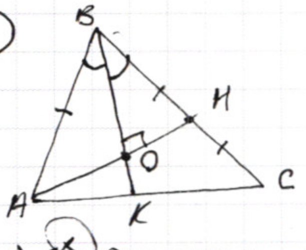
~~$(x-1)^2$ ...~~ ~~при $x \in (-\infty;0] \cup [3;+\infty)$~~ ~~$\frac{|x-1|(|x-1|-4)+4}{5x(x-3)}$~~

3) ~~$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} xy\ge 0 \\ xy=y^2-4xy+4x^2 \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} xy\ge 0 \\ y^2-5xy+36-8y=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$~~

~~$\Longleftrightarrow \begin{cases} xy\ge 0 \\ 2y+x^2=9 \\ y^2-y(5x+8)+36=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} xy\ge 0 \\ 2y+x^2=9 \\ y=\frac{5x+8\pm\sqrt{25x^2+80x+64-4\cdot 36}}{2} \end{cases}$~~

~~$\Longleftrightarrow \begin{cases} xy\ge 0 \\ y=\frac{9-x^2}{2} \\ \left(\frac{9-x^2}{2}\right)^2-4x\left(\frac{9-x^2}{2}\right)+4x^2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} xy\ge 0 \\ y=\frac{9-x^2}{2} \end{cases}$~~

2)



~~1) Допустим что △ABC тупоугольный, тогда биссектриса и медиана перпендикулярны и выпущены из одной вершины (например B) тогда очевидно, 180° ∠B > 90° △ABC - тупоугольн.~~

1) Очевидно что медиана и биссектриса ~~являю~~ одного треугольника, являющиеся перпендикулярными, не могут выходить из одной вершины треугольника, тогда возьмем произвольный треугольник ABC и AH - медиана, BK - биссектр.

$AH \cap BK = O \Rightarrow \angle BOH = 90° \Rightarrow BO$ - выс и бис в треуг ABH

$\Rightarrow AB = BH = HC \Rightarrow AB = \frac{1}{2}BC$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~тогда таких треугольни~~ также по свой треуг:

$\begin{cases} a+b\geq c \\ b+c\geq a \\ a+c\geq b \end{cases} \Rightarrow$ если $a=\frac{1}{2}b$, то: $\begin{cases} 1{,}5b\geq c \\ 0{,}5b+c\geq 0 \\ c\geq 0{,}5b \end{cases} \Leftrightarrow 1{,}5b\geq c\geq 0{,}5b$

~~значит~~ но также $a+b+c=300 \Rightarrow \{1{,}5b+c=300 \Rightarrow$

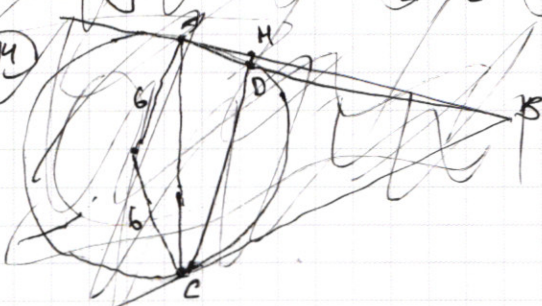
$\Rightarrow \begin{cases} 1{,}5b+1{,}5b=300 \\ 1{,}5b+0{,}5b=300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{min}\geq 100 \\ b_{max}\leq 150 \end{cases} \Rightarrow$ таких треугольников всего 24

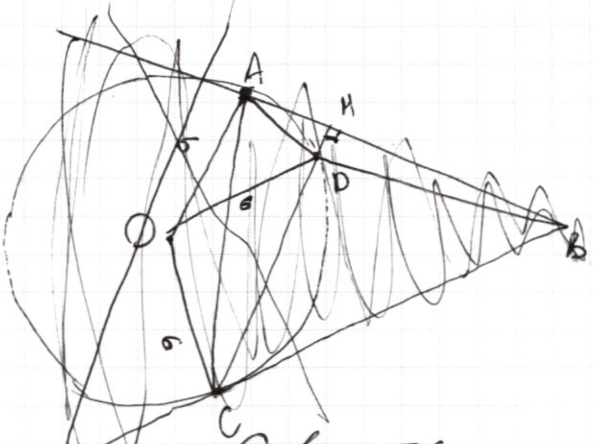
~~т.к~~ т.к. для каждого четного b найдется a и c, где $a, c\in N$

Ответ: 24

(3) ~~$\begin{cases} 2y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{9-x^2}{2} \\ \frac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{x\cdot\frac{9-x^2}{2}} \end{cases}$~~

(4)





$\frac{9}{4}$ 2,25

$1^2\cdot 2^2\cdot 3$

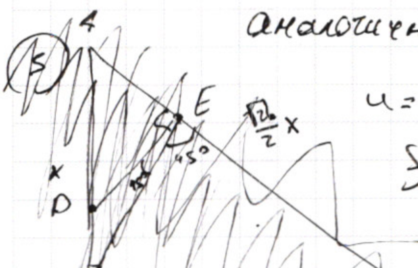
(7) т.к. $f(2)=2$, то $f(4)=2+2=4$

$\Rightarrow f(2)=f(4)-f(\frac{1}{2}) \Rightarrow f(\frac{1}{2})=-2$

Ответ: 136

аналогично для $f(\frac{1}{3})=-3$; $f(\frac{1}{4})=-4$ и т.д. тогда ~~т.к. для~~ пусть число

(5)



$u=a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\cdot\ldots$, где a, b, c — простые числа тогда

$f(u)=a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots \Rightarrow f(p)=f(u)+f(\frac{p}{u}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{p}{u})=$ ~~$a\alpha+b\beta+c\gamma\ldots$~~ $p-a\alpha-b\beta-\ldots$ ~~т.к.~~ $=f(\frac{1}{u})=-a_y\alpha_y-b_y\beta_y-\ldots$, т.к. и возможен любой

$\Rightarrow f(\frac{x}{y})=f(\frac{1}{y})+f(x)=$ ~~$a_y\alpha_y+b_y\beta_y+\ldots$~~ $+a_x\alpha_x+b_x\beta_x+\ldots$

$-a_y\alpha_y-b_y\beta_y-\ldots \Rightarrow \frac{x}{y}>1 \Rightarrow f(\frac{x}{y})>0$

~~$\Rightarrow f(1)=f(3)\cdot f(\frac{1}{3})=3+2\cdot 5\ldots=0$~~

$\frac{x}{y}<1 \Rightarrow f(\frac{x}{y})<0$

$\frac{x}{y}=1$, $f(\frac{x}{y})=0$

тогда $f(\frac{x}{y})<0$ равно $\frac{17^2-17}{2}=\frac{17\cdot16}{2}=17\cdot8=136$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} xy\geq 0 \\ y^2-5xy+4x^2=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} xy\geq 0 \\ (y-x)(y-4x)=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} yx\geq 0 \\ y=x \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4x \\ xy\geq 0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x \\ x^2+2x-9=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4x \\ x^2+8x-9=0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x \\ x=\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} y=4x \\ x=\left[\begin{array}{l} 1 \\ -9 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-9 \\ y=-36 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(1;4)$ и $(-9;-36)$

1) $\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} = \frac{(x-1)^2-4|x-1|+4}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|} = \frac{|x-1|(|x-1|-4)+4}{4x(x-3)+|x||x-3|} \leq 0$

Рассмотрим $4x(x-3)+|x||x-3| = f(x)$, тогда: $f(x)=0$ при $x=\{0;3\}$

$f(x)\geq 0$, при $x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$ и $f(x)<0$, при $x\in(0;3)$

Рассмотрим $|x-1|(|x-1|-4)+4=g(x)$, ~~тогда~~ $g(x)=0$ ~~при x=~~

$|x-1|(|x-1|-4)+4=0 \Longrightarrow |x-1|((x-1)-4)=-4$, пусть $|x-1|=t\geq 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow t(t-4)=-4 \Longrightarrow t^2-4t+4=0 \Longrightarrow t=2 \Longrightarrow |x-1|=2 \Longrightarrow x=\left[\begin{array}{l} -1 \\ 3 \end{array}\right.$

~~$g(x)\geq 0$, при $x\in$~~ $g(x)=0$, при $x=\{-1;3\}$; $g(x)\geq 0$ при $x\in(-\infty;+\infty)\setminus$ $\setminus\{-1;3\}$ и $g(x)<0$, при $x\in\varnothing$, тогда очевидно что

если $\frac{g(x)}{f(x)}$ $\frac{|x-1|(|x-1|-4)+4}{4x(x-3)+|x||x-3|}\leq 0$, то т.к. $g(x)\geq 0$ при любых действ. x, то $f(x)<0 \Longrightarrow x\in(0;3)$

Ответ: $(0;3)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

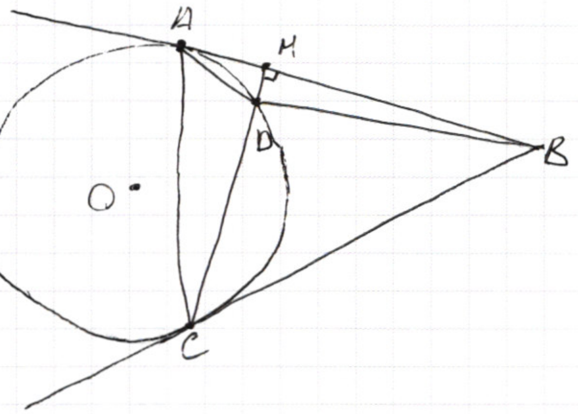
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



6 $\begin{cases} x^2-2x-3y+y^2\le 0 \\ |3x|+|2y|+|6-3x-2y|\ge 6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1,5)^2\le 3,25 \\ |3x|+2|y|+|6-3x-2y|\ge 6 \end{cases}$

Рассмотрим $f(x)=|3x|+2|y|+|6-3x-2y|$, тогда

при $x\ge 0$ и $y\ge 0$: $f(x)=3x+2y+|6-3x-2y|\ge 6$

при $3x+2y\le 6$ $f(x)=6$ ~~$3x+2y\ge 6$~~

при $3x+2y\ge 6$ $f(x)=-6+6x+4y\ge 6$

при $x\ge 0$ и $y\le 0$: $f(x)=3x-2y+|6-3x-2y|$

~~при $3x-2y\le 6$~~ при $3x+2y\le 6$: $f(x)=6-4y\ge 6$.

при $3x+2y\ge 6$ $f(x)=6x-6\ge 6$

при $x\le 0$ и $y\ge 0$: $f(x)=-3x+2y+|6-3x-2y|$

при $3x+2y\ge 6$: $f(x)=4y-6\ge 6$

$3x+2y\le 6$: $f(x)=6-6x\ge 6$

при $x\le 0$ и $y\le 0$: $f(x)=-3x-2y+|6-3x-2y|$

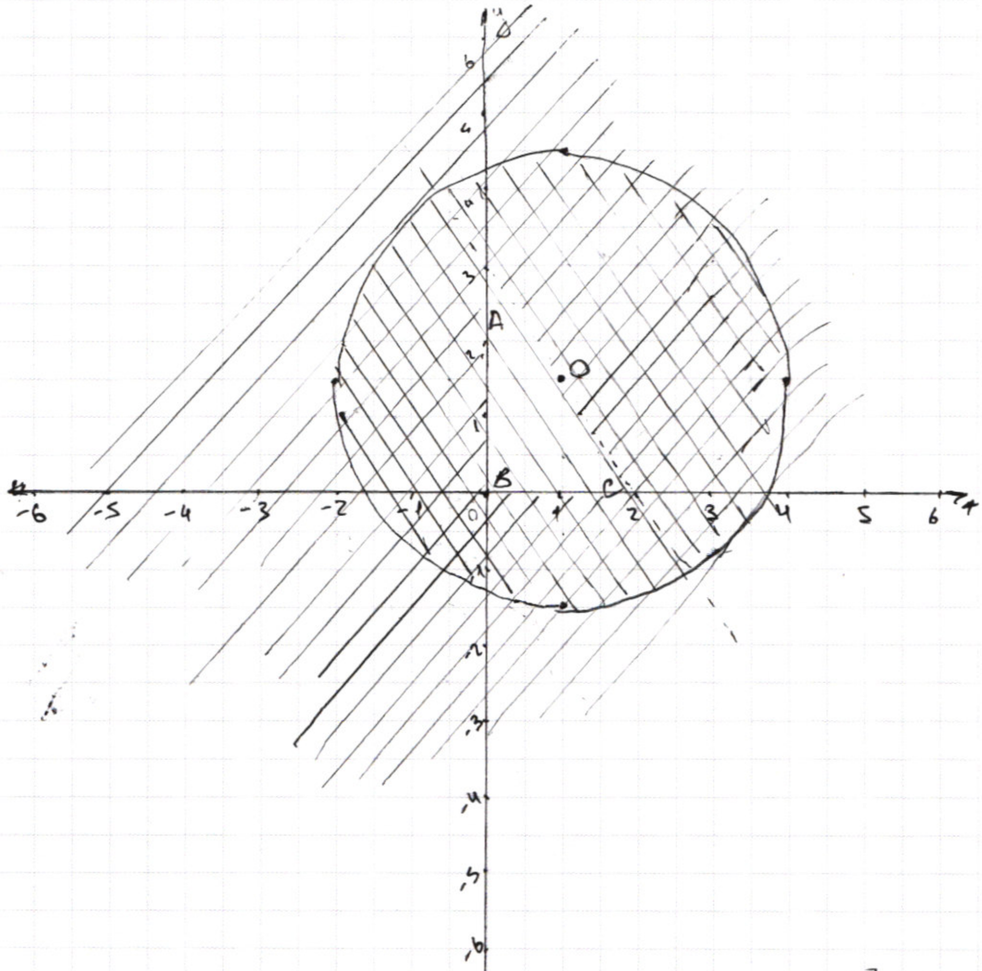
при $3x+2y\ge 6$: $f(x)=6$

$3x+2y\le 6$: $f(x)=6-6x-4y\ge 6$

Из этого следует, что данному неравенству удовлетворяет вся плоскость, кроме ~~кроме осей и~~ треугольника заданного уравнением $x>0$, $y>0$ и $3x+2y\le 6$ и огр. с коорд концов $(-6;0)$; $(6;0)$ и $(0;-6)$; $(0;6)$

~~x^2-2x-3~~ $(x-1)^2+(y-1,5)^2\le 3,25$ — нерав. круга с центр $O(1;1,5)$ и $R=\sqrt{3,25}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\cancel{\begin{cases}3x+2y\le 6\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}}$ ~~т.к.~~ назовем треугольник $\begin{cases}3x+2y\le 6\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$ ABC, где

$B(0;0)$; $A(0;3)$; $C(2;0)$, тогда O - серед AB, т.к.

$x_0 = \frac{x_A+x_C}{2}$ и $y_0 = \frac{y_A+y_C}{2}$ $\Rightarrow$ т.к. $\triangle ABC$ - п/у, то O - центр описаной

окр но т.к. $\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}R_1 = \frac{\sqrt{2^2+3^2}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, а т.к. $R = R_1$, т.к. $\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, то

треугольник полностью входит в окр. с центром O и рад. R

то $S = S_{окр} - S_{\triangle} = \pi R^2 - \frac{ab}{2} = \pi\frac{13}{4} - 3 = 3{,}25\pi - 3$

Ответ: $3{,}25\pi - 3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)