МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leq 0 \quad \Big| \quad x\neq 0;\ x\neq 3$$

$4\cdot 0^2-12\cdot 0+0\cdot 3=0$ $\quad$ $4\cdot 3^2-12\cdot 3+0=0$

$$\frac{(x-1)^2+4-4|x-1|}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$$

$$\frac{(|x-1|)^2+4-4|x-1|}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$$

$$\frac{\overbrace{(|x-1|-2)^2}^{\geq 0}}{\underbrace{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}_{\leq 0}}\leq 0$$

$$4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|\leq 0$$

$|x|\geq 0$, $|x-3|\geq 0$

$4x(x-3)$

•) $x>3 \Rightarrow 4x(x-3)>0$

•) $0<x<3$ $\quad 4x(x-3)<0$

•) $x<0$ $\quad 4x(x-3)>0$

$\Rightarrow 0<x<3$

$$4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|\leq 0$$

$$4x(x-3)+x(3-x)\leq 0$$

$$-4x(3-x)+x(3-x)\leq 0 \quad x(3-x)>0$$

$$-4+1\leq 0$$

$-3\leq 0$ – правда.

Ответ: $x\in(0;3)$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$y \geq x^2 - 2x - 2y + y^2$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = p$, p – простое

$3 \leq x \leq 19,\ 3 \leq y \leq 19\quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

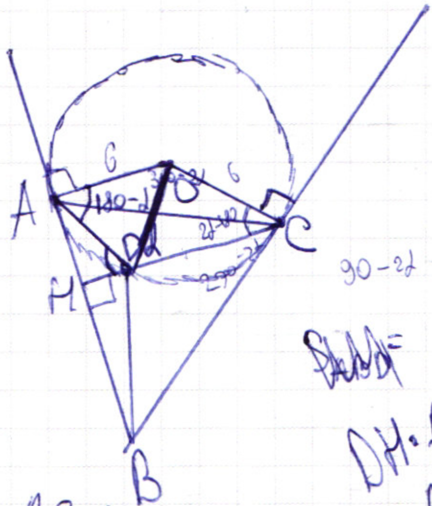
$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(2) = f(x) + f\left(\frac{2}{x}\right)$

$f(2) = f(x) + f(2) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$



$S_{ABD} = 15$

$R = 6$

$\frac{AB}{CH}$ – ?

$540 - 2\alpha + x = 360$

$x = 2\alpha - 180$

$90 - 2\alpha - x$

$f(1) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

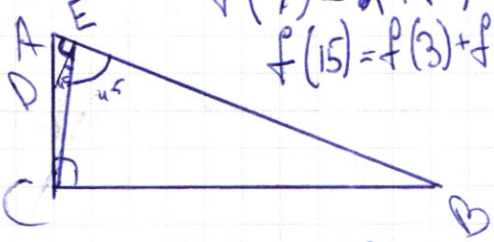
$S_{ABD} = 30$

$DH \cdot AB$

$f(4) = 2f(2)$

$f(15) = f(3) + f(5) = 8$

$\frac{AD^2}{AB^2} \cdot AC \cdot BC$

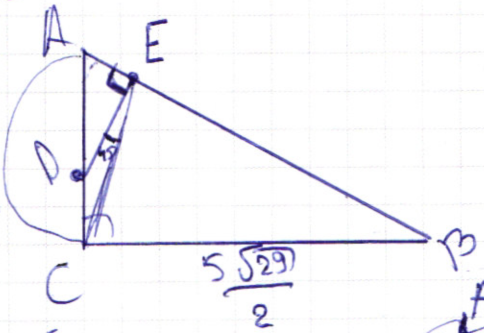


$\frac{AD}{AC}$ – ?

S_{AED} – ?

$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$



3 5 7 11 13 17 19

1 2 3 4 5 6

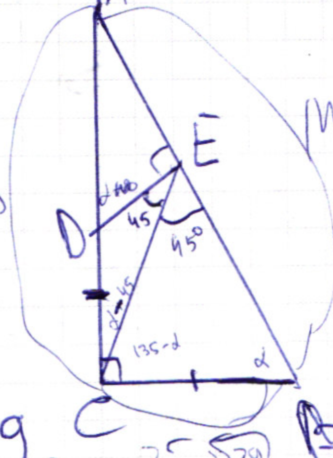
$\boxed{21}$

3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	5	7	6	6	7	11

12	13	14	15	16	17	18	19
7	13	9	8	8	17	8	19

$7\frac{1}{4}$ $3{,}5 \cdot 2{,}5$

$\sqrt{\frac{25}{4} + 1} = \sqrt{\frac{29}{4}} \cdot \sqrt{29} =$



M,

2 · 3 · 4

2

2 · 3 · 3

$4{,}5 \times 2{,}5 = 225 + 90 = 11{,}25$

$= \frac{29}{2} = 14{,}5$

3 4 5 5 7 6 6 7 11 7 13 9 8 8 17 8 19

$7{,}5\sqrt{29}$

3 4 5 5 6 6 7 7 7 8 8 8 9 11 13 17 19

0 1 2 2 4 4 6 6 6 9 9 9 12 13 14 15 16

$\underbrace{5}$ $\underbrace{8}$ $\underbrace{18}$ $\underbrace{27}$ 58 70 83 97 112 $\boxed{128}$

31

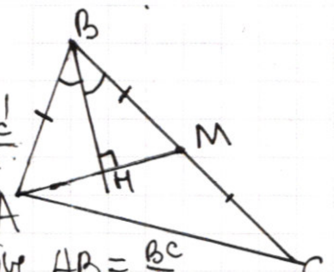
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

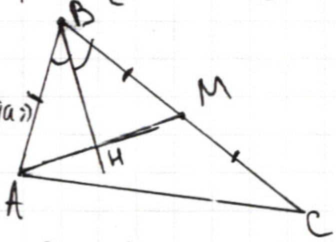
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

Заметим сразу, что эти биссектриса и медиана исходят из разных вершин, т.к. если из одной, то половина угла при этой вершине $\geq 90°$, чего быть не может.



1) Заметим, что в $\triangle ABM$, BH – и высота, и биссектриса $\Rightarrow \triangle ABM$ – р/б $\Rightarrow AB = BM = \frac{BC}{2}$.
Значит, чтобы такое было, необходимо, чтобы $AB = \frac{BC}{2}$.
Докажем, что этого и достаточно.



$\triangle ABM$ – р/б, а BH – его бис-са $\Rightarrow$ она и высота $\Rightarrow$
2) $BH \perp AM$. Значит, для этого необходимо и достаточно, чтобы $AB = \frac{BC}{2}$. $AB = x$; $BC = 2x$; $AC = y$.
$P = AB + BC + AC = 3x + y = 300$. По нер-ву $\triangle$: $AC < AB + BC < 3x$; $AC + AB > BC \Rightarrow AC > x$. Тогда, $4x < 3x + y < 6x$
Мин. случай: $x = \frac{300}{6} + 1 = 51$; Макс: $x = \frac{300}{4} - 1 = 74$.
Значит, всего $\triangle$: $74 - 51 + 1 = 24$.
Ответ: 24.

№3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \quad \Big|\, y \geq 2x \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y^2 + 4x^2 - 4xy = xy \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \begin{cases} 4x(x-y) - y(x-y) = 0 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4x - y)(x - y) = 0 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

а) $x - y = 0 \Rightarrow x = y$.
Не подходит, т.к. $y \geq 2x$, а $x = y = 0$ не является решением

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2+y^2=5xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = y-2x$$

$5x^2+y^2+2y=5xy+9$

$x+y \geq 2y-4x$

$2x=2x$

$5x \geq y$

$5x^2+(y+1)^2=5xy+10$

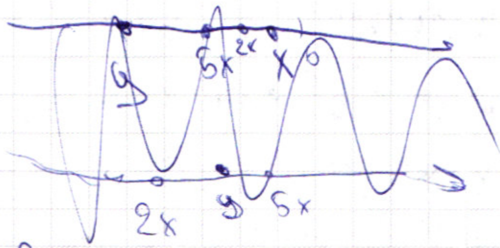
$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$y-2x \geq 0$

$y \geq 2x$

$5x \geq y$

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y^2+4x^2=5xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2+4x^2=5xy \\ y=\frac{9-x^2}{2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{9-x^2}{2}\right)^2+4x^2=5x\cdot\frac{9-x^2}{2}$$

$1\cdot 4$

$10x(9-x^2)$

$x^4-18x^2+81+16x^2=90x-10x^3$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2+y^2=5xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2-4xy-xy+y^2=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

1) $4x=y$

$2y+x^2=9$

$8x+x^2=9$

$x^2+8x-9=0$

$x_1+x_2=-8$

$x_1x_2=-9$

$-9;\ 1$

$\boxed{\begin{matrix} x=1 \\ y=4 \end{matrix}}$ $\cancel{\boxed{\begin{matrix} x=-9 \\ y=-36 \end{matrix}}}$

$$\begin{cases} 4x(x-y)-y(x-y)=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4x-y)(x-y)=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

б) $4x-y=0$

$y=4x$

$2y+x^2=9$

$8x+x^2=9$

$x^2+8x-9=0$

$x_1x_2=-9$

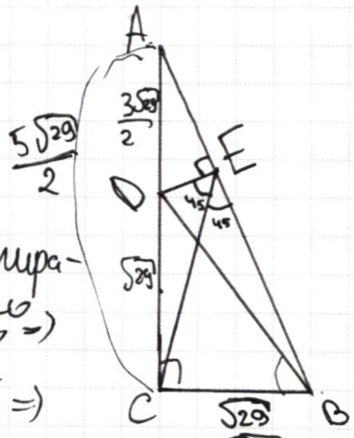
$x_1+x_2=-8$

$x_1=-9;\ x_2=1.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-9\\ y=-36\end{cases} \text{ — не подходит, т.к. } -36<2\cdot(-9)\\ \begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $(1;4)$.

№5.



1) Т.к. $\angle DEB=\angle DCB=90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow CDEB$ – вписанный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DEC=\angle DBC$ – вписанные, опирающиеся на одну дугу $\Rightarrow \angle DBC=45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ прямоугольный $\triangle DBC$ – р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow CB=CD=\sqrt{29} \Rightarrow AD=AC-CD=\frac{3\sqrt{29}}{2}$.

$\frac{AD}{AC}=\frac{3\sqrt{29}\cdot 2}{2\cdot 5\sqrt{29}}=0{,}6$

$\Rightarrow$ $\triangle AED \sim \triangle ACB$ по I признаку ($\angle AED=\angle ACB=90^\circ$; $\angle A$ – общий)

$\Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$ По т. Пифагора $\triangle ABC$: $AB=\sqrt{29}\cdot\sqrt{\frac{29}{4}}=14{,}5$

$S_{\triangle AED}=\frac{AE\cdot ED}{2}=\frac{AD^2\cdot AC\cdot BC}{AB^2\cdot 2}=\frac{2{,}25\cdot 29\cdot 2{,}5\cdot\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}}{29\cdot 29/2}=4{,}5\cdot 2{,}5=$

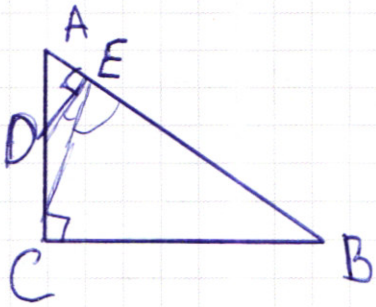
$=11{,}25$

$$\frac{1-2+5}{4-12+2}$$

№1.

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}=\frac{(x-1)^2+4-4|x-1|}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}=$$

$$=\frac{(|x-1|-2)^2 \geq 0}{4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|}\leq 0$$



Если $x \geq 3$ $\quad x-3>0$

$$\frac{(x-3)^2}{4x(x-3)+x(x-3)}\leq 0$$

$4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|\leq 0$

$$\frac{x-3}{5x}\leq 0$$

~~Если~~ $\leq x$

$0\leq x\leq 3$

$$4x(x-3)\leq -(|x|\cdot|x-3|)$$

$$4x(x-3)\geq x(x-3)$$

$$4(x-3)\geq x-3$$

$1\leq 4$ – нет

$3<\sqrt{13}<4$

$1,5<\sqrt{13}<2$

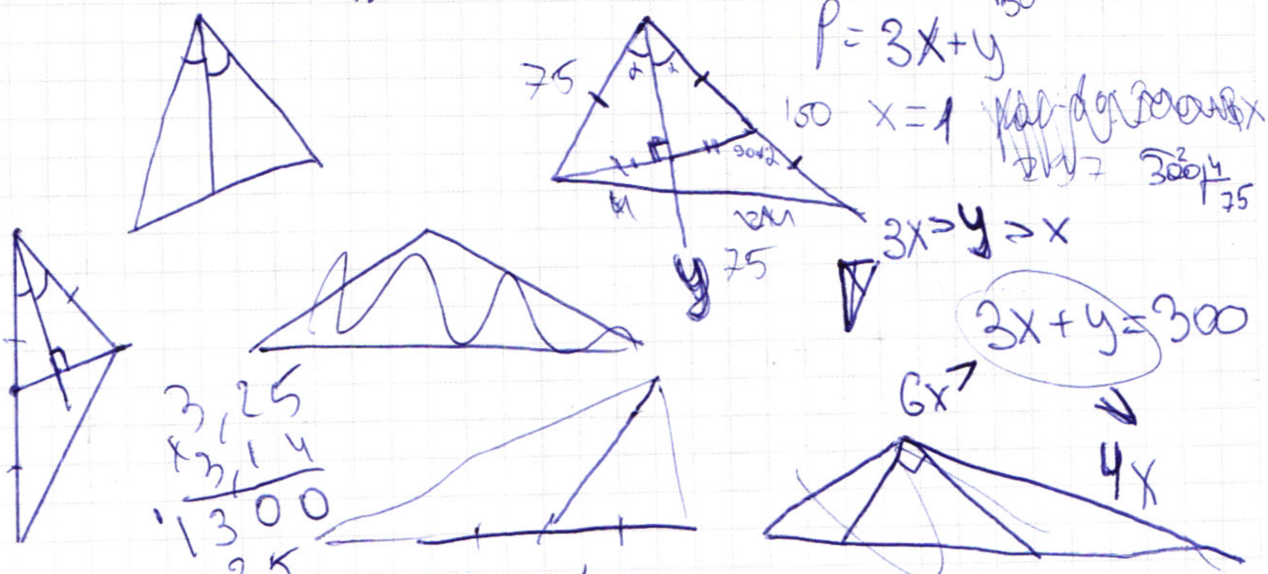
51 – 74

24

75 м

50

№2.



$P=3x+y$

$x=1$

$3x>y>x$

$3x+y=300$

$6x>$

$4x$

$$\begin{array}{r} 3,25 \\ \times\ 3,14 \\ \hline 1300 \\ +\ 325 \\ 975 \\ \hline 10,2050 \end{array}$$

10,205

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$f(xy)=f(x)+f(y)$

$f(p)=p$

$f(2)=f\left(\frac{2}{x}\cdot x\right)=f\left(\frac{2}{x}\right)+f(x)=f(2)+f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)$

$f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)<0.$

Заполним значениями $f(k)$ при $3\leq k\leq 19$. $f(k)$ - это сумма простых делителей, на которые число расп.

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
f(k)	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8	19

Расположим значения $f(k)$ в порядке возрастания. Нам нужны все пары, в которых какое-то $f(k)$ больше другого. Посчитаем кол-во пар.

3 4 5 5 6 6 7 7 7 8 8 8 9 11 13 17 19

0 1 2 2 4 4 6 6 6 9 9 9 12 13 14 15 16

13 18 27 70

31 97

128

Ответ: 128 таких пар.

№6.

$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ (x-1)^2+(y-1{,}5)^2\leq 3{,}25 \end{cases}$

это окружность в центре $(1;1{,}5)$ радиусом $\frac{\sqrt{13}}{2}$

о) $x>0;\ y>0$

$3x+2y+|6-3x-2y|>6$ <0 $(6\not>6)$

$6x+4y>12$

$y>3-1{,}5x$ (!)

о) $x>0;\ y<0$

$3x-2y+|6-3x-2y|>6$

либо $-4y>0 \Rightarrow y<0$ ~~верна~~ всех если $3x+2y<6$ $\left(\frac{x}{2}\right)$

либо $6x>12$, если $3x+2y>6$ дополн.

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \end{cases}$$

$y^2-3y\le 0$

$y-3\ge 0$ $325:25=13$

$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2\le 3{,}25$ $y\ge 3$ $0{,}5\sqrt{13}$

$1{,}5<\sqrt{13}<2$

$|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$

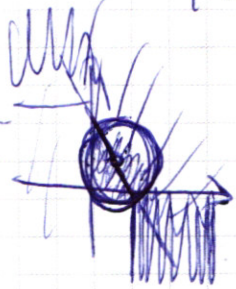
$x>0$ $y>0$

$3x+2y>6$

$3x+2y+|6-3x-2y|>6$

$6x+4y-6>6$

$y>3-1{,}5x$ Y_2 $1^2+1{,}5^2$



$3x+2y>6$

$x>0$

$y<0$

$3x-2y+|6-3x-2y|>6$

$6x-6>6$ или $-4y>12$

$x>2$ $y<-3$

$x<0$ $x>0{,}5$

$y>0$

$-3x+2y+|6-3x-2y|>6$

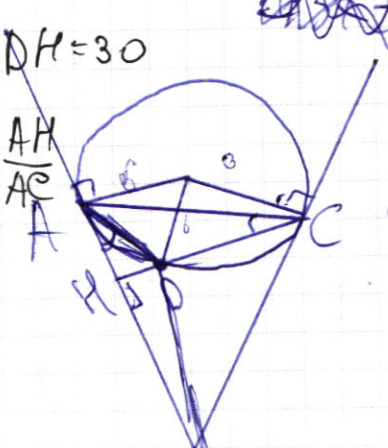
$AB\cdot AD\cdot\sin\alpha=30$

$4y>12$

$AB\cdot DH=30$

$y>3$ $\frac{AB}{CH}=k$

$\frac{DH}{AD}=\frac{AH}{AC}$



$S_{ABD}=15$

$\frac{AB\cdot CH}{2}=S_{ACB}$

$\frac{AB}{CH}$

$\frac{AB}{CH}$

$\frac{k}{2}CH^2=S_{ACB}$

$\cos\alpha=\frac{AH}{AD}=\frac{CH}{AC}$

$DH\cdot AB=30$ $\frac{AB}{CH}=\frac{3}{2}$ $DH\cdot CH$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение).

•) $x<0;\ y>0.$

$-3x+2y+|6-3x-2y|>6$

либо $-6x>0$, при $3x+2y<6$

либо $y>3$, при $3x+2y>6$

Итоговая площадь − площадь пересечения (…) с ///.

$$S = S_O - S_\Delta = \pi r^2 - \frac{ab}{2} = 3{,}14\cdot 3{,}25 - 3 = 10{,}205.$$

№4.

$\angle BAD = \angle ACH$, т.к. угол между касательной и хордой = половине дуги хорды. Значит, $AB:CH = \frac{3}{2}$

$\{ S_{ABD} = \frac{DH\cdot AB}{2}$. Из подобия

$DH\cdot CH = 20.$