

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

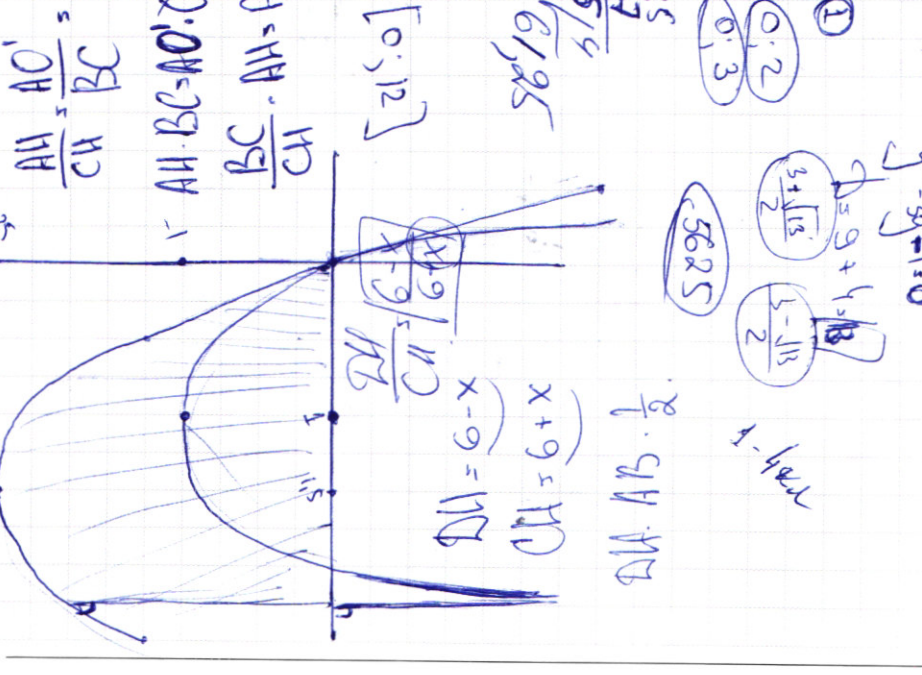
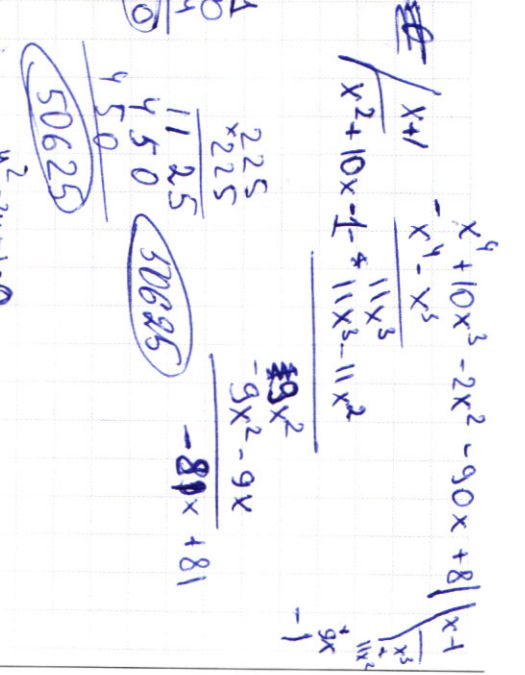
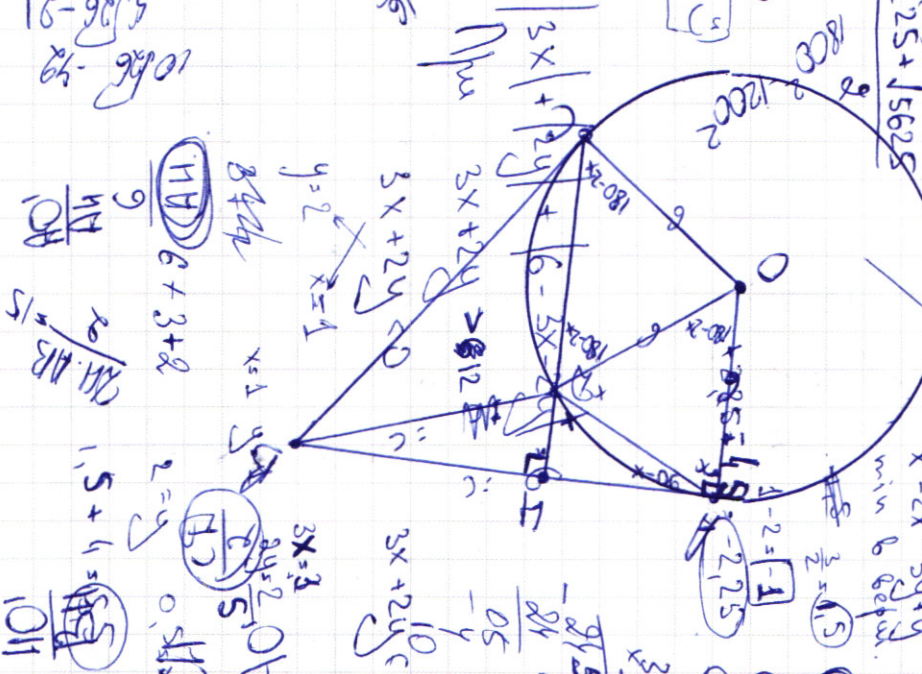
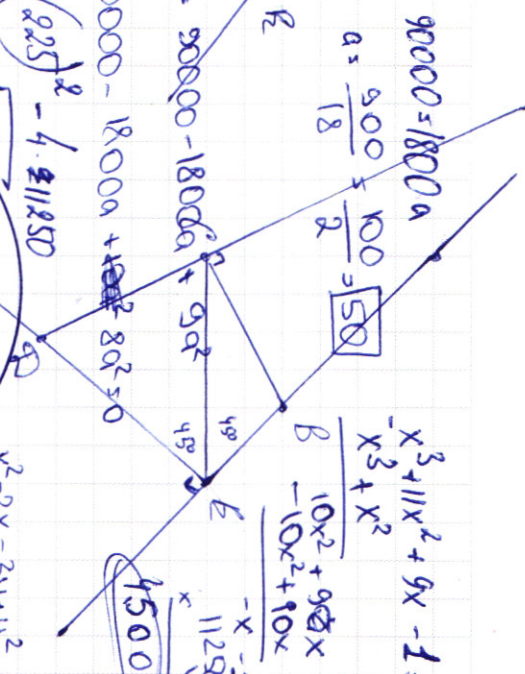
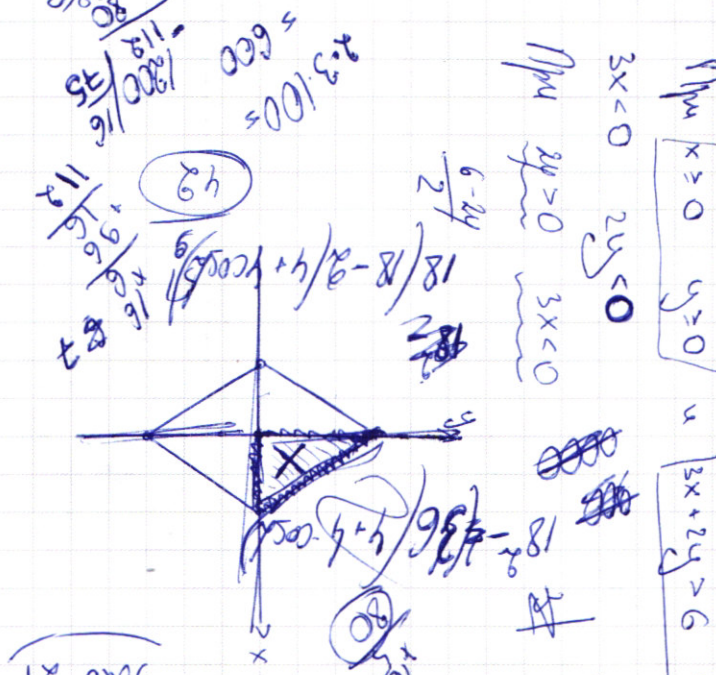
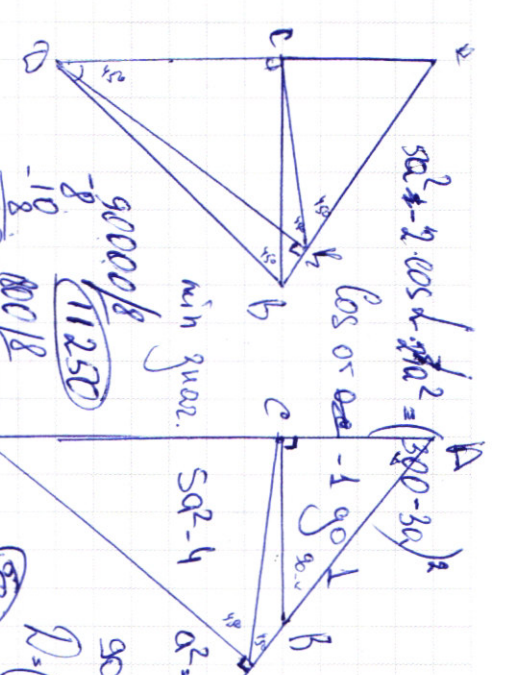
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^2 + 4x^2 - 4xy = xy$
 $y^2 + 4x^2 - (y-2x)^2 = xy$
 $y^2 + 4x^2 = 5xy$
 $2y = \frac{y-x^2}{2}$
 $\frac{1800}{20} = \frac{4}{450}$

$(\frac{9-x^2}{2})^2 + \frac{1}{4}x^2 = 5x \cdot \frac{9-x^2}{2} + 22500 = 4500$
 $\frac{81-18x^2+x^4}{4} + 4x^2 = \frac{45x}{2} - \frac{5x^3}{2} + 90000/4$
 $81-18x^2+x^4+18x^2 = 90x - 10x^3$
 $x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 90x + 81 = 0$
 $x = -1$

$5a^2 - 4a^2 \cdot \cos \alpha = 90000 - 18000a + 9a^2$
 $4a^2 \cdot \cos \alpha + 4a^2 + 90000 = 18000a$

$(1 - \cos \alpha) a^2 + 4500a + 22500 = 0$
 $D = 450^2 - 22500 = 4a^2 + (22500) - 2 \cdot \cos \alpha \cdot a \cdot 2a = 6a$
 $5a^2 - 4a^2 \cdot \cos \alpha = 6(300 - 3a) > 50$
 < 75

$300 - x + y = 2y$
 $300 - 2y + y = 2y$
 $300 - 2y > 2y$
 $300 > 4y$
 $y < 75$

$300 - 2y + y = 2y$
 $300 - 2y > 2y$
 $300 > 4y$
 $y < 75$

$5 \sqrt{29}$
 $29 \cdot \frac{29}{9} = \frac{AB^2}{BC}$
 $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{BC}$
 $\frac{AB}{2} = \frac{29}{2}$

$S = \frac{1}{2} AH \cdot AB$
 $\frac{AH}{AO} = \frac{AO}{CH}$
 $AH \cdot CH = 36$
 $AH = \frac{36}{CH}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

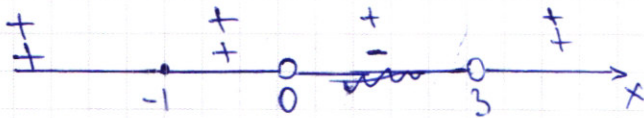
$$\sqrt{1} \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|} \leq 0$$

1) $x-1 < 0$, при $x < 1$ $x < 0$ при $x < 0$ $x-3 < 0$ при $x < 3$.

$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + (-x)(3-x)}$	$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + x(3-x)}$	$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + x(3-x)}$	$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + x(x-3)}$
$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x}{4x^2 - 12x - 3x + x^2}$	$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x}{4x^2 - 12x + 3x - x^2}$	$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + 3x - x^2}$	$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x}$
1) $\frac{x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 15x}$	2) $\frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 9x}$	3) $\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 - 9x}$	4) $\frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x}$
$x \in (-\infty; 0)$	$x \in [0; 1)$	$x \in [1; 3)$	$x \geq 3$

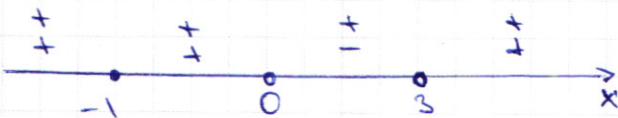
1) $\frac{x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 15x} \leq 0$ В числителе $(x+1)^2$ Знаменатель: $5x^2 - 15x = 0$

Нули числителя: $(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ Знаменатель: $5x^2 - 15x = 0$
 $5x(x-3) = 0$
 $x = 0$ $x = 3$



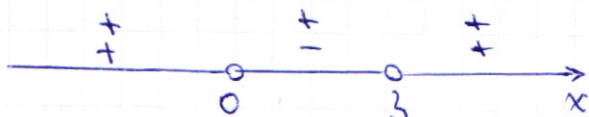
$x \in (0; 3)$ и $x = -1$. Но $x < 0 \Rightarrow$ Переходит только $x = -1$

2) $\frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 9x} \leq 0$ Нули числителя: $x = -1$ Знаменатель: $x = 0; x = 3$



$x \in (0; 3)$ и $x = -1$ Но $x \in [0; 1) \Rightarrow$ Переходит только $x \in (0; 1)$

3) $\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 - 9x} \leq 0$ Нули числителя: $x = 3$ Знаменатель: $x = 0, x = 3$
 $x \in (0; 3)$ Но $x \in [1; 3) \Rightarrow x \in [1; 3)$



4) $\frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} \leq 0$ Нули числителя $x=3$ и Знаменателя: $x=0$; $x=3$.

$\begin{array}{c} + \\ + \end{array}$
 $\begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}$
 $x \in (0; 3)$ Но $x \geq 3 \Rightarrow \emptyset$

Обратившись, получим: $x = -1$ и $x \in (0; 3)$.

Ответ: $x \in (0; 3)$ $x = -1$.

№3 $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + 4x^2 = 5xy \\ 2y + x^2 = \frac{9-x^2}{2} \end{cases}$

$\left(\frac{9-x^2}{2}\right)^2 + 4x^2 = 5x \cdot \left(\frac{9-x^2}{2}\right) \quad | \cdot 4$

$(9-x^2)^2 + 16x^2 = 10x(9-x^2)$

$81 - 18x^2 + x^4 + 16x^2 = 90x - 10x^3$

$x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 90x + 81 = 0$

$x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 90x + 81 = (x-1)(x+1)(x^2 + 10x - 1) = 0$

$x=1$ $x=-1$

$D = 100 + 4 = 104$

$x_1 = \frac{-10 + \sqrt{104}}{2} = -5 + \sqrt{\frac{104}{4}} = -5 + \sqrt{26}$

$x_2 = \frac{-10 - \sqrt{104}}{2} = -5 - \sqrt{\frac{104}{4}} = -5 - \sqrt{26}$

1) $y = \frac{9-x^2}{2} = \frac{9-1}{2} = 4$ $(1; 4)$

2) $y = \frac{9-x^2}{2} = \frac{9-1}{2} = 4$ $(-1; 4)$

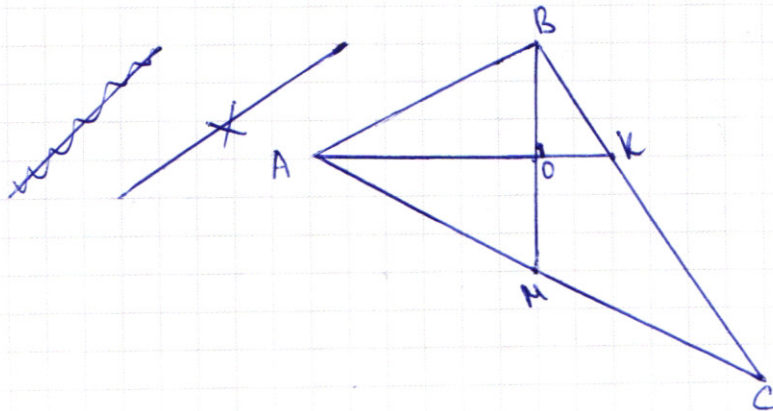
3) $y = \frac{9-x^2}{2} = \frac{9 - (\sqrt{26}-5)^2}{2} = \frac{9 - 26 + 2 \cdot \sqrt{26} \cdot 5 - 25}{2} = \frac{10\sqrt{26} - 42}{2} = 5\sqrt{26} - 21$

$(\sqrt{26} - 5; 5\sqrt{26} - 21)$

4) $y = \frac{9-x^2}{2} = \frac{9 - (-\sqrt{26}-5)^2}{2} = \frac{9 - 26 - 2 \cdot \sqrt{26} \cdot 5 - 25}{2} = -5\sqrt{26} - 21$

$(-\sqrt{26} - 5; -5\sqrt{26} - 21)$

№2



1) Заметим, что бис-са и медиана из одного угла не могут быть перпендикулярны, ведь тогда будет угол $> 180^\circ$ в треугольнике.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Тора через бис-са ~~и~~ $AK \perp$ медиане ~~и~~ BM и они пересекаются в точке O . Пусть $\angle BAD = x$. Тора $\angle OAC = x$ (бис-са), тогда $\angle ABO = 90 - x$ (по СУПТ) и $\angle AMO = 90 - x$ (по СУПТ), тогда $\triangle MAB$ - равноб. Пусть $AB = a$, тогда $AM = a$ и $MC = a$ (BM - медиана).

3) Одна сторона - a ; другая - $2a$. Знаем, третья - $300 - 3a$ ($P_{\triangle} = 300$).
По нер. треуг. $\begin{cases} a + 2a > 300 - 3a \\ a + 300 - 3a > 2a \\ 2a + 300 - 3a > a \end{cases} \begin{cases} 3a > 300 - 3a \\ 300 - 2a > 2a \\ 300 - a > a \end{cases} \begin{cases} 6a > 300 \\ 300 > 4a \\ 300 > 2a \end{cases}$

$$\begin{cases} a > 50 \\ 75 > a \\ 150 > a \end{cases} \Rightarrow a \in [51; 74] \quad a - \text{целое.}$$

Тора существует 24 варианта для a . Все можно проверить вернувшись к $\angle BAC$.

Т.к. воспользуемся теоремой синусов:

$$a^2 + (2a)^2 - 2 \cdot \cos \alpha \cdot a \cdot 2a = (300 - 3a)^2$$

$$\text{где } \alpha = \angle BAC. \quad 5a^2 - 2 \cos \alpha \cdot 2a^2 = 90000 - 1800a + 9a^2$$

$$a^2 (5 - 4 \cos \alpha) = 90000 - 1800a + 9a^2$$

$$a^2 (4 + 4 \cos \alpha) - 1800a + 90000 = 0$$

$$D = (1800)^2 - 4 \cdot 90000 (4 + 4 \cos \alpha)$$

$D > 0$, при $\forall \alpha$. Т.к. $\max \alpha \neq \cos \alpha = 1$, тогда $1800^2 - 4 \cdot 90000 \cdot 8 = 10000 (18^2 - 32 \cdot 9) = 90000 (36 - 32) = 360000 > 0$.

$$a_{1,2} = \frac{1800 \pm \sqrt{1800^2 - 360000(4 + 4 \cos \alpha)}}{2(4 + 4 \cos \alpha)}, \quad a_{\min} = \frac{1800 - \sqrt{360000}}{16}$$

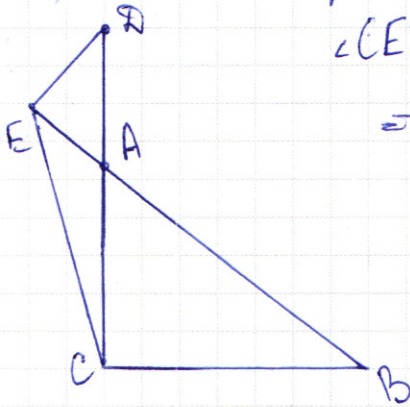
Т.к. тогда ~~меньше минимальной и больше максимальной.~~

~~При $\cos \alpha = 0$ $\alpha = 180^\circ$ $\sqrt{1800^2 - 360000} = 0$~~

Подставляя разные значения α можно убедиться, что мы получили все α от 51 до 75.

Ответ: 24 треугольника.

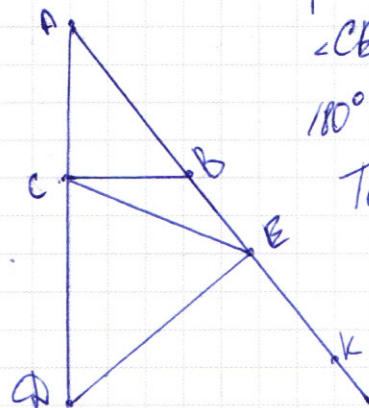
15) 1) Если E на прямой AB за точку A .



$\angle CED = \angle DEA + \angle AEC$ $\angle AEC > 0$, а $\angle DEA \neq 90^\circ$.

$\Rightarrow \angle CED > 90^\circ$, а по усл. $\angle CED = 45^\circ$.

2) Если E на прямой AB за точку B .



$\angle CED = 45^\circ \Rightarrow \angle BEC = 45^\circ$

$180^\circ - \angle BEC - \angle DEC = 45^\circ$

Тогда $\angle CBA \neq 45^\circ$.

Т.к. B ближе к A ,

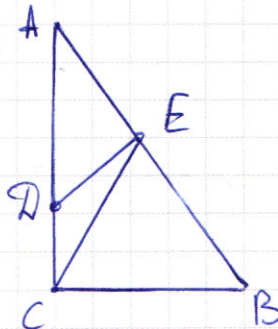
чем E , тогда

$AC > BC$.

(Против большего угла, большая сторона), а по усл. $AC < BC$.

3) Тогда E на отрезке AB (не в A и не в B , т.к. $\angle CED = 45^\circ$).

Если D на отрезке AC :



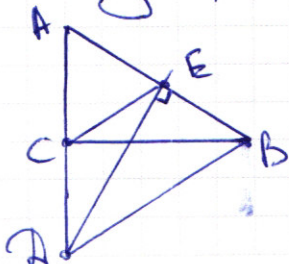
$\angle CED = 45^\circ \Rightarrow \angle CEB = 180^\circ - \angle AED - \angle CED = 45^\circ$

Четырёхугольник $CDEB$ - вписанный $\angle DCB + \angle DEB = 180^\circ$.

Тогда $\angle CED = \angle BEC$, то хорды, стягивающие эти

углы равны, т.е. $CD = BC$, но $CD < AC \Rightarrow AC > CD = BC$, а по усл. $BC > AC$. (D не в точке C , т.к. $\angle CED = 45^\circ$)

Тогда E на AB , а D - на продолжении AC за точку C (если за точку A , то E не на отрезке AB . Т.к. в точке A)



~~$\angle CED = \angle BCD = \angle BEA$~~ \Rightarrow четырёхугольник $DCEB$ - вписанный.

$\angle CED = 45^\circ \Rightarrow \angle CBD = 45^\circ \Rightarrow \triangle BCA$ - равноб. ; равн. бег.

Тогда $AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC+DC}{AC} = 1 + \frac{DC}{AC} = 1 + \frac{5\sqrt{29}}{2\sqrt{29}} = 1 + 2,5 = 3,5$$

$$S_{AED} = \frac{AE \cdot DE}{2}$$

Рассмотрим $\triangle AED$ и $\triangle ACB$.
 $\angle A$ - общий; $\angle ACB = \angle AED = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$ по двум углам.

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{ED}{BC}$$

Из 1: $AC \cdot AD = AB \cdot AE$

$$AC(AC+DC) = AB \cdot AE$$

$$29 + \frac{5 \cdot 29}{2} = \frac{29}{2} \cdot AE$$

$$\frac{3,5 \cdot 29}{\frac{29}{2}} = AE$$

$$AE = 7$$

Из 2: $AD \cdot BC = AB \cdot ED \rightarrow (AC+DC) \cdot BC = AB \cdot ED \rightarrow$

$$\frac{29 \cdot 5}{2} + \frac{29 \cdot 25}{4} = \frac{29}{2} \cdot ED$$

$$29 \cdot 10 + 29 \cdot 25 = 2 \cdot 29 \cdot ED$$

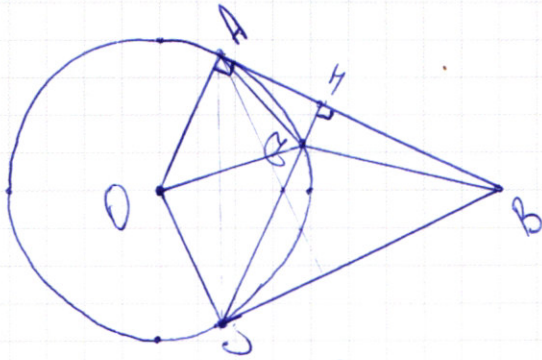
$$35 = 2 \cdot ED$$

$$ED = \frac{35}{2}$$

$$S_{AED} = \frac{7 \cdot \frac{35}{2}}{2} = \frac{7 \cdot 35}{4} = 61,25$$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = 3,5$; $S_{AED} = 61,25$.

№ 4



Дано: AB и BC - касательные к окр. с центром в O .
 CH - высота ABC . D пересечение CH и окр. с центром в O .

$$S_{ABCD} = 15, \text{ Радиус } R_0 = 6.$$

$$\frac{AB}{CH} = ?$$

Решение №6

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

$$1) |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6.$$

При $x \geq 0$ и $y \geq 0$ $\# 3x + 2y > 12$ и $3x + 2y < 0$ - всё хорошо

~~$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| = 3x - 2y$~~ Т.к. первое слагаемое уже > 6 .

1) Тогда пусть $3x + 2y \geq 0$ и $3x + 2y \leq 6$.

$$\text{При } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0 \quad |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| = 3x + 2y + 6 - 3x - 2y = 6 \quad \ddot{}$$

$$\text{При } x \leq 0 \text{ и } y \geq 0 \quad |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| = -3x + 2y + 6 - 3x - 2y = 6 - 6x.$$

$$x < 0 \Rightarrow 6 - 6x > 6 \quad \checkmark$$

$$\text{При } x \geq 0 \text{ и } y < 0 \quad |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| = 3x - 2y + 6 - 3x - 2y = 6 - 4y$$

$$y < 0 \Rightarrow 6 - 4y > 6 \quad \checkmark$$

$$\text{При } x < 0 \text{ и } y < 0 \quad |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| = -3x - 2y + 6 - 3x - 2y = 6 - 6x - 4y$$

$$x < 0 \text{ и } y < 0 \Rightarrow 6 - 6x - 4y > 6 \quad \checkmark$$

2) А если $3x + 2y > 6$. Пусть ~~$3x + 2y = S$~~

$$\text{При } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0 \quad |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| = 3x + 2y + 3x + 2y - 6 = 6x + 4y - 6 > 6. \quad \checkmark$$

$$\text{При } x < 0 \text{ и } y \geq 0 \quad |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| = -3x + 2y - 6 + 3x + 2y = 4y - 6.$$

$$y > 1,5$$

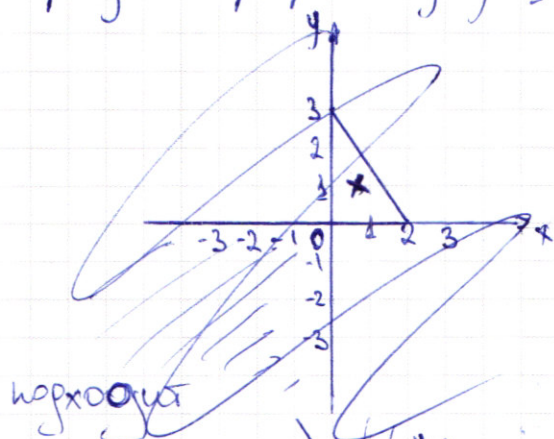
$$\text{При } x \geq 0 \text{ и } y < 0 \quad |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| = 3x - 2y - 6 + 3x + 2y = 6x - 6$$

$$x > 1.$$

$$\text{При } x < 0 \text{ и } y < 0 \quad |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| = -3x - 2y - 6 + 3x + 2y = -6 \quad \ddot{}$$

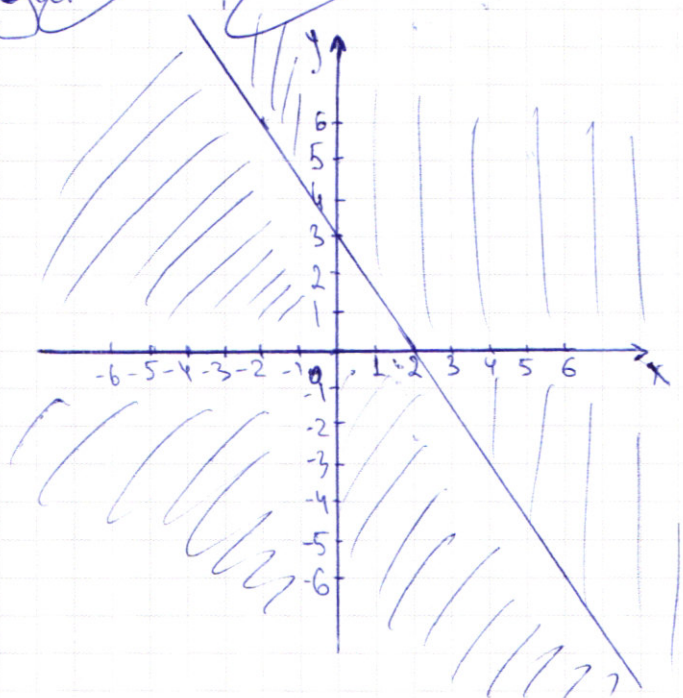
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Нарисуем график порхающих на областей. ✗ - не порхорит
/// - порхорит.



Границы ~~не порхо~~ - порхорит.
Кроме $(0; \text{от } 0 \text{ до } 3)$;
 $(\text{от } 0 \text{ до } 2; 0)$ и $(0; 3) \text{ до } (2; 0)$.

Порхорит все область кро-
ме треугольника с верши-
нами $(0; 0)$, $(0; 3)$ и
 $(2; 0)$.



2) $x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$.

~~$x^2 - 2x = 0$~~ $x^2 - 2x = 0$

~~$x = 0$~~ $x = 0$ $x = 2$.

Парабола ветви вверх $\Rightarrow < 0$ между корнями.

$y^2 - 3y = 0$

$y = 0$ $y = 3$ Парабола ветви вверх $\Rightarrow < 0$ между корнями.

При $x \in [0; 2]$ и $y \in [0; 3]$ - все хорошо. + $\frac{3 \cdot 2}{2}$ к мажору.

$$\text{А} \quad y^2 - 3y + x^2 - 2x \leq 0 \quad y^2 - 3y + x^2 - 2x = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (y^2 - 3y)$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{4 - 4(y^2 - 3y)}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{4 - 4(y^2 - 3y)}}{2}$$

Парабола ветви вверх $\Rightarrow x \in \left(1 - \sqrt{1 - y^2 + 3y} ; 1 + \sqrt{1 - y^2 + 3y} \right)$