МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30°$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y| > 4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y) < 0$.

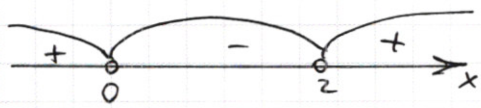
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$$

Нули модулей:

$$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x \le 0 \\ \dfrac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0 \quad (1) \end{cases}$$



$x \in (0;2)$

вернёмся к системе

$$\begin{cases} x \in (0;2) \\ x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

$$\begin{cases} x \in (0;2) \\ \dfrac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x^2+2x} \le 0 \quad (2) \end{cases}$$

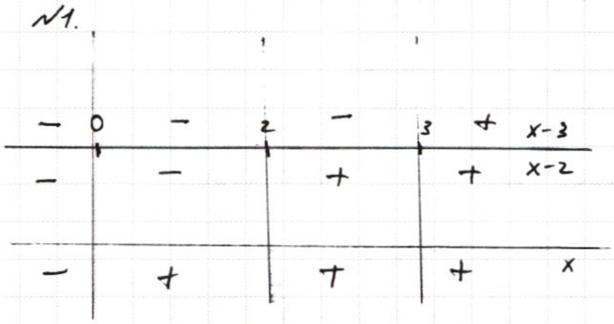
$x \in (0;2)$

вернёмся к системе:

$$\begin{cases} x \in (0;2) \\ x \in (0;2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;2).$$

$$\begin{cases} x \in [2;3) \\ \dfrac{(x-2)^2}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0 \quad (3) \end{cases}$$

№1.



(1) $\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \le 0$

$\dfrac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \le 0$

$f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \le 0$

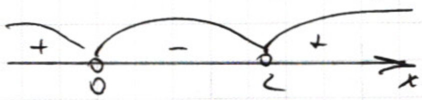
$D_f = R \setminus \{0;2\}$

Нули: $x=2$.

(2) $\dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)} \le 0$

$f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x(x-2)}$

$D_f = R \setminus \{0;2\}$ Нули: $x=2$



(3) $\dfrac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \le 0 \Leftrightarrow x \in (0;2)$

вернёмся к системе:

$$\begin{cases} x \in [2;3) \\ x \in (0;2) \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

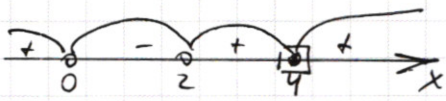
$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \dfrac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0 \quad (4) \end{cases}$$

(4) $\dfrac{x^2-8x+16}{3x(x-2)} \leq 0$

$\dfrac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$

$f(x) = \dfrac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$

$D_f = R \setminus \{0; 2\}$ Нули: $x = 4$



$x \in (0; 2) \cup \{4\}$

Вернёмся к системе

$\cancel{x \geq 3}$ $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \in (0; 2) \cup \{4\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$

Ответ: $x \in (0; 2) \cup \{4\}$.

№3.

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 = xy \quad (1) \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

(1) $x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$

$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \quad | : y^2$

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 5\dfrac{x}{y} + 4 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{5-3}{2} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5+3}{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = 1 \\ \dfrac{x}{y} = 4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 4y \end{array}\right.$$

Вернёмся к системе:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4y \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ y^2 + y - 5 = 0 \quad (2) \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4y \\ y^2 + 4y - 5 = 0 \quad (3) \end{cases} \end{array}\right.$$

(2) $y^2 + y - 5 = 0$

$D = 1 + 20 = 21$

$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

(3) $y^2 + 4y - 5 = 0$

$D_1 = 4 + 5 = 9$

$$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{-2+3}{1} \\ y = \dfrac{-2-3}{1} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -5 \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

вернёмся к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y\\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=4y\\ \left[\begin{array}{l}y=1\\ y=-5\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\\ y=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\\ y=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-20\\ y=-5\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(-20;-5)$; $(4;1)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$.

№4.

Дано:

$\omega(O;R)$

$R=4$

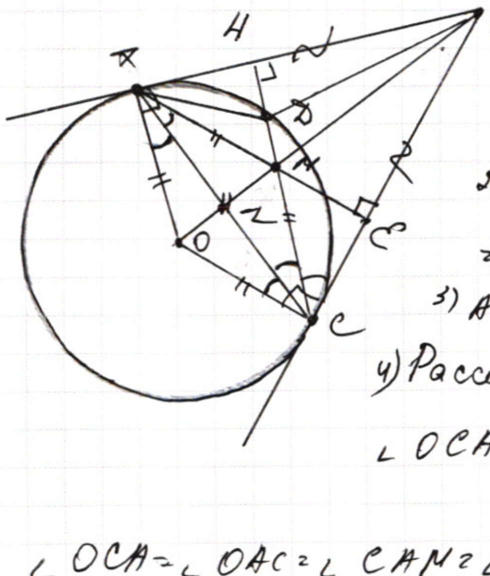
AB и BC - кас.

$S_{\triangle ABD}=6$

CH - выс.

$CH \cap \omega = D$

$\frac{AB}{CH}$ - ?



1) $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}HD\cdot AB$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}CH\cdot AB$

2) По св-ву кас.: $AB=BC$

$\Rightarrow \triangle ABC$ - р/б

3) $AM \parallel OC$ и $MC \parallel AO \Rightarrow OAMC$ - пар-м

4) Рассм. $OAMC$ - пар-м

$\angle OCA = \angle OAC$ ($\triangle AOC$ - р/б, т.к. $AO=OC=R$ $\Rightarrow \angle OAC=\angle OCA$)

$\angle OCA = \angle OAC = \angle CAM = \angle MCA$ - накр. леж. ($AM \parallel OC$ и сек. AC; $MC \parallel AO$ и сек. AC)

$\Rightarrow$ $OAMC$ - ромб $\Rightarrow$ $OC=OA=AM=MC=R$

5) $M \in \omega \Rightarrow AO=OC=AM=MC=OM=R \Rightarrow \triangle OMC$ и $\triangle AOM$ - р/сты

$\Rightarrow \angle MOC = 60^\circ \Rightarrow \angle OBC = 30^\circ$ ($\triangle OBC$ - прям.)

Зн., $OC = \frac{1}{2}OB \Rightarrow OB = 2R = 8$

6) т.к. $\triangle ABC$ - р/б $\Rightarrow$ BN - бис., выс. и мед.

$\Rightarrow \angle ABN = \angle NBC = 30^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABC$ - р/стор, зн. $AB = BC = AC$

7) т.к. BN - выс., CH и AE - выс.

$\Rightarrow$ по св-ву выс. $BN \cap CH \cap AE = D$ (M)

$\Rightarrow$ D совпад. с M.

8) $S_{\triangle ABC} = 3 S_{\triangle ABD} = 3 \cdot 6 = 18$

$\frac{1}{2} CH \cdot \cancel{AB} = 3 \cdot \frac{1}{2} HD \cdot \cancel{AB}$

$CH = 3HD$

9) $\triangle ABO$ - прям.:

$AB = BO \cos 30^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

10) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB$

$18 = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot 4\sqrt{3}$

$CH = \frac{2 \cdot 18}{4 \cdot \sqrt{3}}$

$CH = \frac{9}{\sqrt{3}}$

$CH = 3\sqrt{3}$

I) $\frac{AB}{CH} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

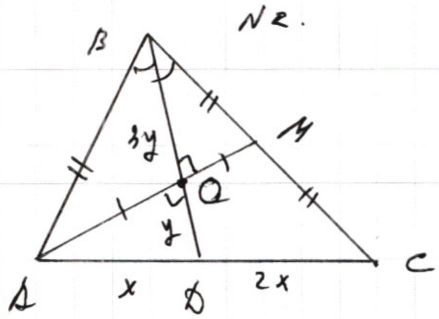
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

Дано:
△ABC
$P_{ABC} = 600$
AM - мед.
BD - бис.
AM ⊥ BD
кол-во △ - ?



1) Рассм. △ABM:
BO - выс. (AM ⊥ BD)
и BO - бис

⇒ △ABM - р/б
⇒ $AB = BM = MC = \frac{1}{2}BC$
(AM - мед. ⇒ MC = MB)
⇒ BO - мед ⇒ AO = OM

2) △CAM и сек. BD (теор. Менелая)

$$\frac{CD}{DA} \cdot \frac{AO}{OM} \cdot \frac{BM}{BC} = 1$$

$$\frac{CD}{DA} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$CD = 2DA$$

Пусть $DA = x$ ⇒ $CD = 2x$

3) △CBD и сек. AM (теор. Менелая).

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{AD}{AC} = 1$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{x}{3x} = 1$$

$\frac{BO}{OD} = 3$ ⇒ $BO = 3OD$; Пусть $OD = y$ ⇒ $BO = 3y$.

4) $\begin{cases} AB + BC + AC = 600 \\ BM^2 = BO^2 + OM^2 \text{ (△BOM - прям.; по теор. Пифагора)} \\ AD^2 = AO^2 + OD^2 \text{ (△ADO - прям.; по теор. Пифагора)} \end{cases}$

$\begin{cases} 3AB + 3x = 600 \\ AB^2 = 9y^2 + OM^2 \\ x^2 = OM^2 + y^2 \end{cases}$ $\begin{cases} AB + x = 200 \ (1) \\ AB^2 = 9y^2 + OM^2 \ (2) \\ x^2 = OM^2 + y^2 \ (3) \end{cases}$

(2) - (3) (1) $AB = 200 - x$

$$AB^2 - x^2 = 8y^2$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Подставим AB в $AB^2 - x^2 = 8y^2$

$(200-x)^2 - x^2 = 8y^2$

$40000 - 400x = 8y^2$

$5000 - 50x = y^2$

$y^2 + 50x = 5000$

5) т.к. AM – мед. => $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMC}$ (по св-ву мед.)

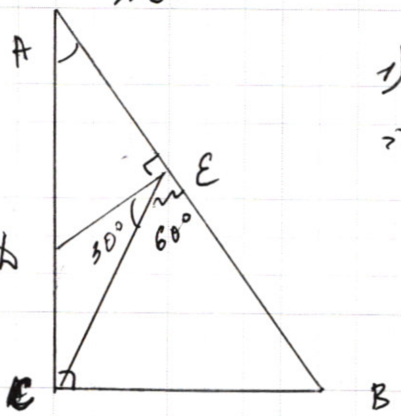
$\frac{1}{2} \cdot 3y \cdot 2 \cdot OM = S_{\triangle AMC}$

$S_{\triangle AMC} = 3yOM.$

№5.

Дано:
$\triangle ABC$ – прям.
$D \in AC$
$E \in AB$
$DE \perp AB$
$AC = \sqrt{7}$
$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$
$\angle CED = 30^\circ$

$\frac{AD}{AC}$ – ?
$S_{\triangle AED}$ – ?



1) $\triangle ABC$ – прям.
=> по теор. Пифагора:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB = \sqrt{7 + 4 \cdot \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{21+28}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

2) Рассм. $\triangle$ ~~DAE~~ DAE и $\triangle$ CAB – прям.:

$\angle DAE = \angle CAB$ – общий

$\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$

=> $\triangle DAE \sim \triangle BAC$ (по 2-м равным углам).

=> $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ => $AD = \frac{AB \cdot AE}{AC}$

$AD = \frac{7 \cdot AE}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot AE$

=> $\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{7}AE}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \frac{AE}{\sqrt{3}}.$

$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB}$

$DE = \frac{AE \cdot BC}{AC}$

$DE = \frac{AE \cdot 2\sqrt{7}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{3}} AE$

3) $S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} AE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot AE = \frac{AE^2}{\sqrt{3}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

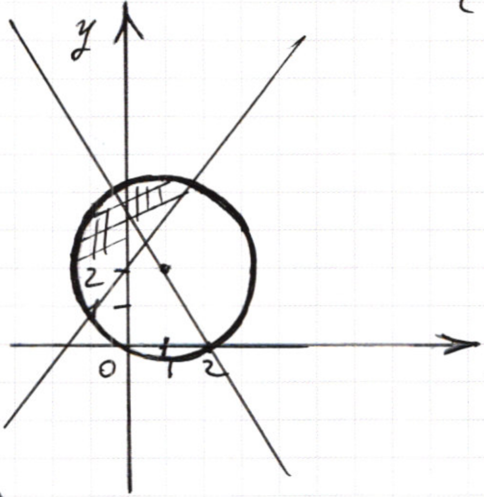
№6.

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 & (2) \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 & (1) \end{cases}$$

(1) $x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0$

$x^2 - 2x + 1 - 1 - 4y + y^2 + 4 - 4 \le 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5$ – ур-ие окр-ти с центром $(1;2)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

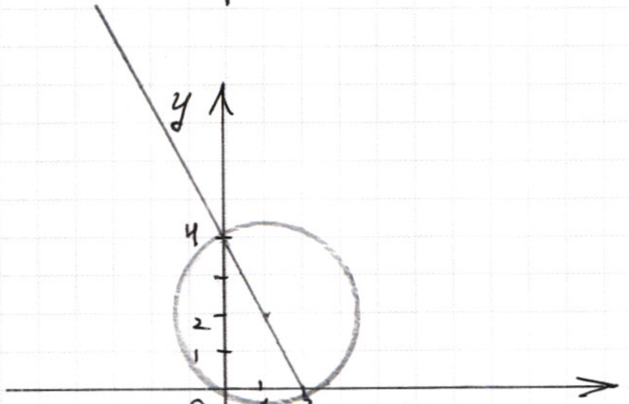


(2) $\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \\ y = 4 - 2x \end{cases}$ – ур-ие прям. лин. ф-ия

x	0	-1
y	4	7

$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ y = 4 - 2x \end{cases}$ – ур-ие прям. лин. ф-ия.

x	1	2
y	2	0



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$16-24+10-2$

$32 > 16$

$4 \cdot 2$

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$$

№1 : $x \in (0;2)$

Нули: $\cancel{x^2-6x+10-2|x-3|=0}$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

		0		2		3		
−			−		−		+	$x-3$
−			−		+		+	$x-2$
−			+		+		+	x

$\emptyset$

$\begin{cases} x \le 0 \\ \dfrac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0 \end{cases}$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \le 0 \qquad \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \le 0$$

$x \ne 2$

$x \ne 0$

$\begin{cases} x \le 0 \\ x \in (0;2) \end{cases} \quad \emptyset$

$\begin{cases} x \in (0;2) \\ \dfrac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x^2+2x} \le 0 \end{cases}$

$$\frac{(x-2)^2}{(x-2)x} \le 0$$

$\boxed{x \in (0;2)}$

$\begin{cases} x \in [2;3) \\ \dfrac{(x-2)^2}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0 \end{cases}$

$$\frac{(x-2)^2}{3x^2-6x} \quad \emptyset$$

$\begin{cases} x \ge 3 \\ \dfrac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0 \end{cases}$

$$\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} \le 0 \qquad \frac{(x-4)(x-4)}{3x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{(x-4)^2}{x(x-2)} \le 0$$

$x \in (0;2)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

③ $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2y)^2=xy \\ x+y^2=5\end{cases}$ $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \quad (1) \\ x=5-y^2 \end{cases}$ $\cancel{(5-y^2)^2-5(5-y^2)y+4y^2=0}$

(1) $: y^2$

$\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\frac{x}{y}+4=0$ $\quad \frac{x}{y}=\frac{5\pm3}{2}$ $\quad \left[\begin{array}{l}\frac{x}{y}=4 \\ \frac{x}{y}=1\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=4y \\ x=y\end{array}\right.$

$D=25-16=9$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4y \\ x=5-y^2\end{cases} \\ \begin{cases}x=y \\ x=5-y^2\end{cases}\end{array}\right.$

$4y+y^2-5=0$

$\cancel{D=1+80=81}$

$D_1=4+5=9$ $\quad \cancel{y=\frac{-1\pm9}{8}}$

$y=\frac{-2\pm3}{1}$

$\cancel{y=1 \quad y=\frac{-10}{8}=-\frac{5}{4}}$

$y=-5$
$y=1$

$y^2+y-5=0$

$\cancel{D=1+20}$

$D=1+20=21$

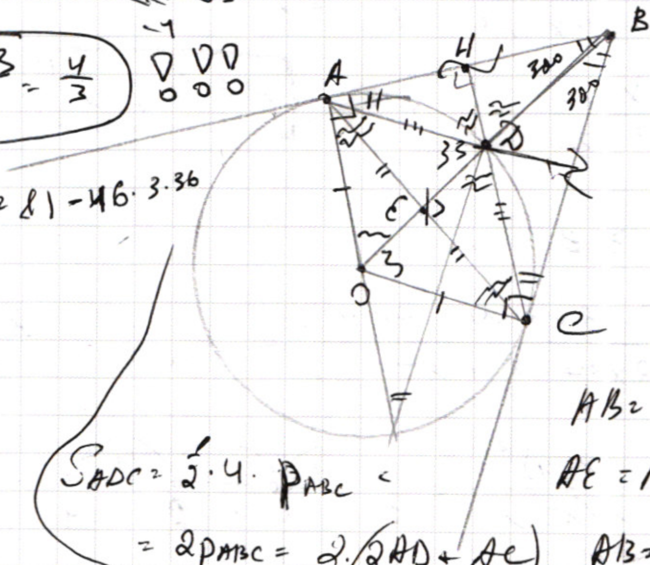
$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

Ответ: $(-20;-5)$; $(4;1)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$

$CH=\frac{9 \cdot 36 \cdot 8}{8 \cdot \sqrt{3}}=3\sqrt{3}$

④. $\frac{AB}{CH}-?$ $\quad R=4$ $\quad \frac{AB}{CH}=\frac{4}{3}$

$S_{\triangle ABD}=6$



$AB=CB$ (по св-ву кас.)
$\triangle ABC$-р/б

$D=81-4\cdot 6\cdot 3\cdot 36$

$S_{ABD}=\frac{1}{2}\cdot HD\cdot AB=6$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH$

$CH=\frac{2S_{ABC}}{AB}=$

$=\frac{6S_{ABD}}{AB}=\frac{36}{AB}$

$\cancel{\frac{AB}{CH}=36}$

$CH\cdot AB=36$

$AB=\frac{36}{CH}$

$4CH^2+3\cdot36-9CH=0.$

$S_{ADC}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot p_{ABC}=$

$=2p_{ABC}=2\cdot(2AD+AC)$

$\cancel{6=4\cdot\frac{2}{3}\cdot CH\cdot AB}$

$3=2\cdot\frac{2}{3}CH+AB$

$\frac{4}{3}CH+AB=3$ $\quad \frac{4}{3}CH+\frac{36}{CH}=3$

$AB=2AE$

$AE=R\cdot\cos30°$

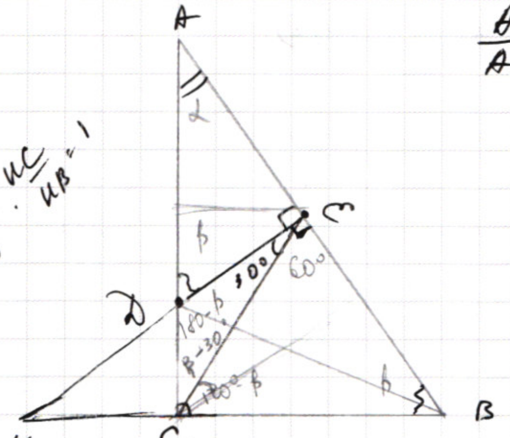
$AB=2R\cos30°=4\sqrt{3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



$\frac{BE}{EA} \cdot \frac{AD}{CD} \cdot \frac{HC}{HB} = 1$

$\frac{AD}{AC}$ – ? $S_{\triangle AED}$ – ?

$AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30°$

$AB = \sqrt{7 + 4 \cdot \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{21}{3} + \frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$\frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 7} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

~~$\sin\angle CAB = \frac{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{3} \cdot 7}$~~

$\triangle DAE \sim \triangle BAC$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ $\quad$ $\frac{CB}{AC} = \frac{DE}{AE}$

$\frac{7}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \frac{AD}{AE}$ $\quad$ $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \frac{DE}{AE}$

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{AD}{AE}$ $\quad$ $DE = \frac{2AE}{\sqrt{3}}$

$AD = \frac{\sqrt{7}AE}{\sqrt{3}}$

~~$AD^2 = AE^2 + DE^2$~~

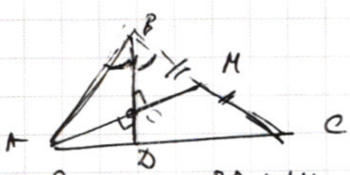
~~$\frac{7AE^2}{3} = AE^2 + \frac{4AE^2}{3}$~~

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{7}AE}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}$

~~$180-\beta-\alpha$~~ $= 30$ $\quad DE = \frac{2\sqrt{7}AD}{\sqrt{3} \cdot 7}$

$\frac{AD}{1} = \frac{DE}{\sin\alpha}$



$P = 600$ $\quad BD \perp AM$

$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$

$\frac{BO}{OD} = \frac{AC}{AD}$

$\frac{CD}{AD} \cdot \frac{AO}{OM} = \frac{1}{2} = 1$

$\frac{2AC}{\sqrt{3}} = \frac{CE}{\sin\alpha}$

$\frac{\sqrt{3}AD}{2AC} = \frac{DE}{CE}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

6. $\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \quad (1) \end{cases}$

$\cancel{x \geq 0}$
$y \geq 0$

$y = 0$
$x = \{1; 2\}$

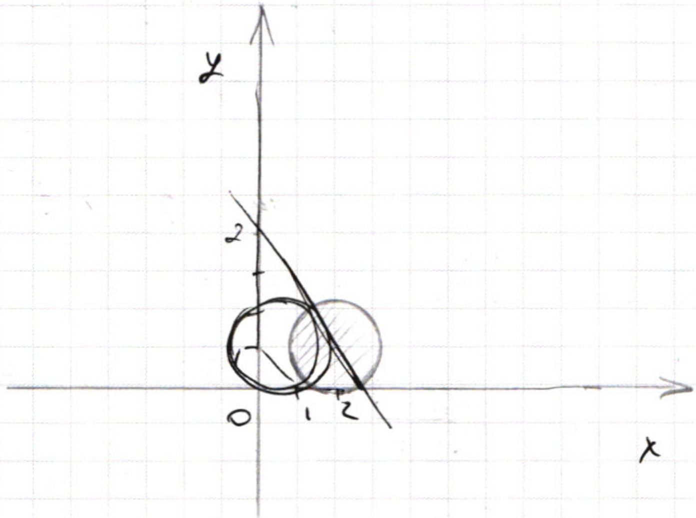
$x = 0$
$y = \{1; 2; 3; 4 \ldots\}$

(1) $x^2 - 2x + 1 - 1 - 4y + y^2 + 4 - 4 \leq 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 \leq 0$

$R = \sqrt{5}$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \quad (1; 2)$



$$\sqrt{\frac{2MO + AB + 3x}{2}\left(\frac{2M + AB + 3x - 2AB}{2}\right)\left(\frac{2MO + AB + 3x - 4AB}{2}\right) + \left(\frac{2MO + AB + 3x - 6x}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2MO + AB + 3x}{2} \cdot \frac{2MO - AB + 5x}{2} \cdot \frac{2MO - 3AB + 5x}{2} \cdot \frac{2M_O + AB - 3x}{2}} = \frac{\quad}{4}$$

$2{,}1 \times 2{,}1 = 4{,}41$

$2{,}2 \times 2{,}2 = 4{,}84$

$2{,}3 \times 2{,}3 = 5{,}29$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

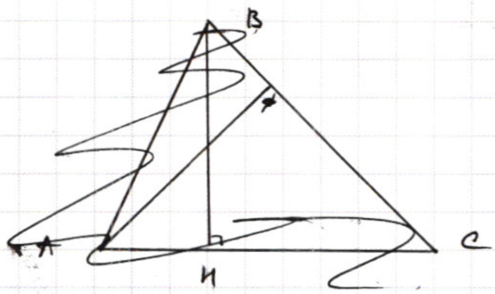
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

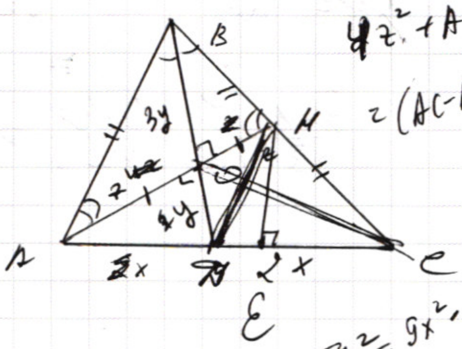
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.





$4z^2 + AE^2 = (AC - AE)^2 + Ce^2$

$4z^2 + AE^2 = 9x^2 - 6xAE + a^2$

$AB + BC + AC = 600$

$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{2BM} \quad DC = 2AD$ $\quad \triangle CAU:$

$\triangle CBD: \quad \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{AD}{AC} = 1 \qquad \frac{2x}{2x} \cdot \frac{AO}{OU} \cdot \frac{BM}{2BM} = 1$

$\frac{BO}{OD} = \frac{3}{2} \quad 3 \qquad \frac{AO}{OU} = 4$

$3HB + 3x = 600$

$\cancel{4x^2 = 4y^2 + 16z^2}$

$\cancel{AB^2 = 9y^2 + z^2}$

$\cancel{AB^2 = 9y^2 + 16z^2}$

$AB + x = \cancel{600}\ 200$

$AB^2 = 9y^2 + z^2$

$x^2 = y^2 + z^2$

$3yz = \sqrt{\frac{2z + a + 3y}{2} \cdot x}$

$AB^2 - x^2 = 8y^2$

$200^2 - 400x + x^2 - x^2 = 8y^2$

$100^2 - 100x = 2y^2$

$100 \cdot 50 - 50x = y^2$

$S_{ABM} = S_{AMC}$

$\frac{1}{2} \cdot 3y \cdot AM = \frac{1}{2}\cancel{y \cdot AO} +$

$\frac{3}{2}y \cdot z = \sqrt{\frac{(AM + MC + AC)}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$(AC-DA)^2 = DE^2 + CE^2 - 2\cdot DE\cdot CE\cdot \cos 30^\circ$

$7 - 2\sqrt{7}DA + DA^2 = \frac{4AD^2}{7} + CE^2 - \frac{4AD}{\sqrt{7}}\cdot CE\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABC} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{7}\cdot\cancel{2}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$

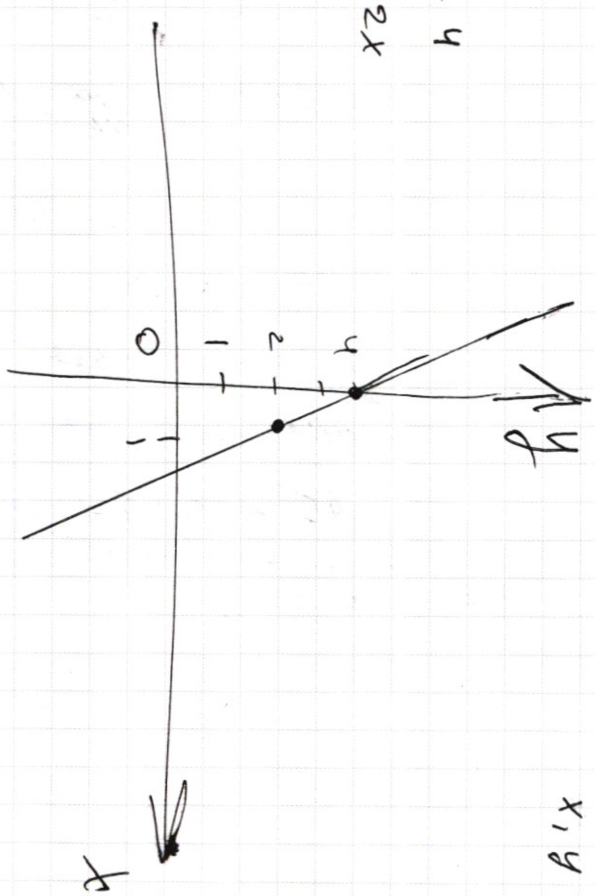
$\cancel{\frac{S\,AE^2}{\sqrt{3}\cdot 7} = \frac{AE^2}{7}}$

$x=0$

$y=0$

$2x+y=4$

$y=4-2x$



$x, y \geq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)