МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

В решении будем пользоваться известными фактами: $|a|\cdot|b| = |ab|$; (легко доказываются перебором знаков)

Также функцией $\operatorname{sgn}(x)$ и св-вом $\operatorname{sgn}(x)\cdot x = |x|$.

$\left(\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}\right)$ - стандартное определение.

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leq 0$$

$$\frac{x^2-6x+9-2|x-3|+1}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|} \leq 0.$$

$$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{(2+\operatorname{sgn}(x^2-2x))(x^2-2x)} \leq 0$$

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{(x^2-2x)} \leq 0$$

(из определения $\operatorname{sgn}(x)$ $2+\operatorname{sgn}(x^2-2x) > 0$ при любом x).

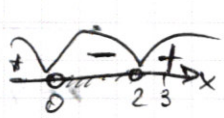
$$\left[\begin{array}{l} (1)\ \begin{cases} (|x-3|-1)^2 = 0 \\ x^2-2x \neq 0 \end{cases} \\ (2)\ \begin{cases} (|x-3|-1)^2 > 0 \\ x^2-2x < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

(очевидно, квадрат выражения неотрицателен)

(1): $\begin{cases} (|x-3|-1)^2 = 0 \\ x^2-2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3|-1=0 \\ x(x-2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{array}\right. \\ \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right. \\ x\neq 0 \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$

(2): $\begin{cases} (|x-3|-1)^2 > 0 \\ x^2-2x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 4 \\ x\neq 2 \end{cases}$ (см. п. (1)) $\begin{cases} \\ x(x-2)<0. \end{cases}$

$x(x-2)<0$: $f(x)=x(x-2)$ нули $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$



$x\in(0;2)$. Совокупность — в ответ объединение.

Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$.

Задача 3.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} & (1) \\ x+y^2=5. & (2) \end{cases}$$

Возведём (1) в квадрат (по частям). В результате могут получиться лишние корни, не удовл. условию $x \geq 2y$ или $xy \geq 0$, необходимым для существования корня, так что позже выполним проверку.

Получим:

$$x^2-4xy+4y^2=xy; \quad x^2-5xy+4y^2=0; \quad (x-4y)(x-y)=0.$$

Отсюда 1) $x=4y$ или 2) $x=y$.

Подставляя в (2):

1) $4y+y^2=5$,

$y^2+4y-5=0$

$(y+5)(y-1)=0$

$y=-5,\ y=1$

$(x;y) \in \{(-20;-5);(4;1)\}$.

2) $y+y^2=5$

$y^2+y-5=0;\ D=1+4\cdot 5=21$

$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}=x$.

$(x;y) \in \left\{\left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right); \left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)\right\}$.

Объединив, выполним проверку:

$x=-20,\ y=-5$: $x=-20<-10=2y$ — не подходит

$x=4,\ y=1$: $\begin{cases} 4-2=\sqrt{4\cdot 1} \\ 4+1^2=5 \end{cases}$ — подходит

$x=y=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$: $x=y>0 \Rightarrow x<2y=2x$ — не подходит

$x=y=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$: $\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}+1+\sqrt{21}=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}=|x|=|y|=\sqrt{xy}$ (1) верно

$\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}+\dfrac{1+21+2\sqrt{21}}{4}=\dfrac{1+21+2\sqrt{21}-2-2\sqrt{21}}{4}=\dfrac{20}{4}=5$ (2) верно — подходит.

Ответ: $(x;y) \in \left\{(4;1); \left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)\right\}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

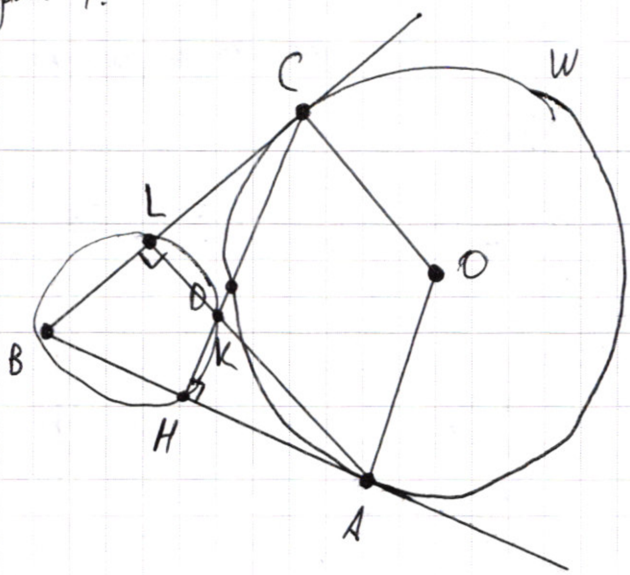
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.



W – исходная окружность

$HA^2 = HD \cdot HC$ (св-во касат. и сек.)

По условию $S_{ABD} = 6$;

$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot DH \cdot AB \Rightarrow AB \cdot DH = 12$.

$\frac{12}{HA^2} = \frac{HD \cdot AB}{HD \cdot HC} = \frac{AB}{CH}$.

Пусть AL – высота к BC в $\triangle ABC$; $AL \cap CH =$ т. K – ортоцентр $\triangle ABC$.

Тогда BLKH: $\angle L = 90^\circ$, $\angle H = 90^\circ$; $\angle L + \angle H = 180^\circ \Rightarrow$ можно вписать в окружность

По св-ву секущ. $AH \cdot AB = AK \cdot AL$

$\angle ALC = 90^\circ$ (высота) $\angle OCL = 90^\circ$ (радиус в т. касания) $\Rightarrow OC \parallel AL$.

Аналогично $CH \parallel AO$. Тогда AOKC – пар-м по определению.

$AO = OC = R \Rightarrow$ AOCK – ромб по признаку, и $AK = AO$.

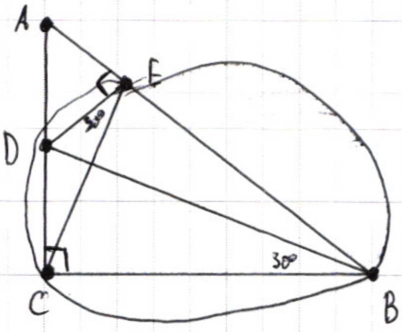
$AL = CH$ ($\triangle ABC$ – р/б: $BC = BA$ как отрезки касат. к w (или просто в силу симметрии отн. BO))

$AH \cdot AB = AL \cdot AK = CH \cdot AO \Rightarrow \frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH}) = \frac{12}{AH^2}$; $AO = 4$ по усл. $\Rightarrow \frac{12}{AH^2} = \frac{4}{AH} \Rightarrow AK = 3$ и

$\frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH} = \frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$

Задача 5.



По условию $\angle C = 90^\circ$

и $\angle DEA = 90^\circ$ ($DE \perp AB$).

Тогда $CDEB$: $\angle C = \angle E = 90^\circ$, $\angle C + \angle E = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow CDEB$ можно вписать.

Тогда $\angle DEC = \angle DBC = 30^\circ$ как впис. на

одной дуге

$\triangle DCB$: $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ \Rightarrow \frac{DC}{CB} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow DC = CB\sqrt{3} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC - DC}{AC} = 1 - \frac{DC}{AC} = 1 - \frac{\frac{2\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$\triangle ABC$ и $\triangle ADE$: $\angle A$ общий $\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AD \cdot AE}{AC \cdot AB}$, но $\angle AED = \angle ACB$ и $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ по I пр.

и $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow S_{ADE} = \frac{S_{ABC} \cdot AD^2}{AB^2} = \frac{1}{2}\,\frac{AC \cdot BC \cdot AD^2}{AB^2}$

По т.П. $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 7 + 4 \cdot \frac{7}{3} = \frac{49}{3}$; $AD^2 = \left(\frac{1}{3}AC\right)^2 = \frac{1}{9}AC^2$.

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}\,\frac{AC^3 \cdot BC}{AB^2 \cdot 9} = \frac{1}{18} \cdot \frac{7\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{49}{3}} = \frac{1}{6}\,\frac{14 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}}}{49} = \frac{1}{3} \cdot \frac{49}{49\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: $S_{ADE} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7.

Дано: $\forall a,b \in \mathbb{Q}_+ \quad f(ab) = f(a)+f(b). \quad \forall p \in \mathbb{P}_+ \quad f(p) = p.$

$f(ab) = f(a) + f(b).$

$f(a) = f(ab) - f(b). \quad \exists\, x = ab,\ y = b \quad (x, y \in \mathbb{Q}_+)$

$f(x/y) = f(x) - f(y)$ Нетрудно видеть, $\forall x, y \in \mathbb{Q}_+$.

Посчитаем $f(n)$ для всех $n \in \mathbb{N} \cap [1;18]$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(n)	0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17.	8

$f(1) = f(1\cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

остальные:

$f(4) = f(2) + f(2) = 4$
$f(6) = f(2) + f(3) = 5$
$f(8) = f(4) + f(2) = 6$
$f(15) = f(3) + f(5) = 8$
$f(16) = f(8) + f(2) = 8$

$f(9) = f(3) + f(3) = 6$
$f(10) = f(2) + f(5) = 7$
$f(12) = f(6) + f(2) = 7$
$f(14) = f(7) + f(2) = 9$
$f(18) = f(9) + f(2) = 8.$

Далее все пары подсчитываем упорядоченными;

Посчитаем, для скольких пар $(x;y)$ $f(x/y) = 0$: $f(x) - f(y) = 0$, $f(x) = f(y)$.

Таких пар $\underset{x=y}{18} + \Big(\underset{5\,6}{1} + \underset{8\,9}{1} + \big(\underset{7\,10\ \ 10\,12\ \ 7\,12}{1+1+1}\big) + \big(\underset{15,16,18}{1+1+1}\big)\Big) \cdot \underset{x\leftrightarrow y}{2} = 18 + 16 = 34.$

Всего пар $18^2 = 324$. Остаётся $324 - 34 = 290$ кандидатов (эти 34 не подходят)

Разобьём все на пары $(x;y)$ и $(y;x)$. Поскольку $x \neq y$ и $f(x/y) \neq 0$, то

будет $\frac{290}{2}$ пар, причём в каждой 1 значение $f(x_i;y_i)$ >0 и 1 значение <0, ведь

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) = -(f(y) - f(x)) = -f(y/x)$. Тогда всего <0 будут $\frac{290}{2} \cdot 1 = 145$ значений,

т.е. 145 искомых пар. Ответ: 145.

Задача 6.

$$\begin{cases} (1)\ |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \\ (2)\ x^2-2x-4y+y^2 \le 0. \end{cases}$$

В решении будем пользоваться известным фактом, что $|a|+|b| \geq a+b \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$, причём равенство лишь при $a, b \geq 0$ (легко док-ся перебором знаков).

(1):

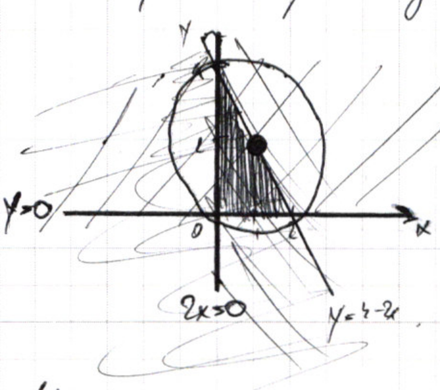
$|2x|+|y|+|4-2x-y| \geq 2x+y+4-2x-y=4$, причём

$$|2x|+|y|+|4-2x-y|=4 \iff \begin{cases} 2x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 4-2x-y\geq 0 \end{cases}$$

$4-2x \geq y$

$4 \geq 2x+y$

$\begin{cases} 2x=0 \\ y=0 \\ 4-2x-y=0 \end{cases}$ построим в одной плоскости:



$4-2x-y=0$

$y=4-2x.$

x	0	1
y	4	2

С учётом знаков неравенств заштрихуем области:

тогда решение (1) — ~~внутренность треугольника (со сторонами)~~

— вся плоскость без этого треугольника.

(2): $x^2-2x+1-1+4-4y+y^2-4 \le 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2 \le 5$ — ур-ие окружности;

центр $(1;2)$, радиус $\sqrt{5}$. Заметим, что расстояние от $(1;2)$ до $(0;4)$, $(0;0)$ и $(2;0)$ равно $\sqrt{5}$, тогда полученная окружность — описанная для ранее полученного Δ.

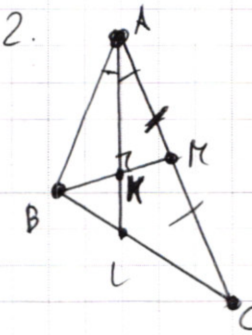
Искомая площадь - разность площадей окружности и треугольника;

$= \pi\cdot(\sqrt{5})^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 5\pi-4 \approx 11{,}42.$

Ответ: $5\pi-4$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

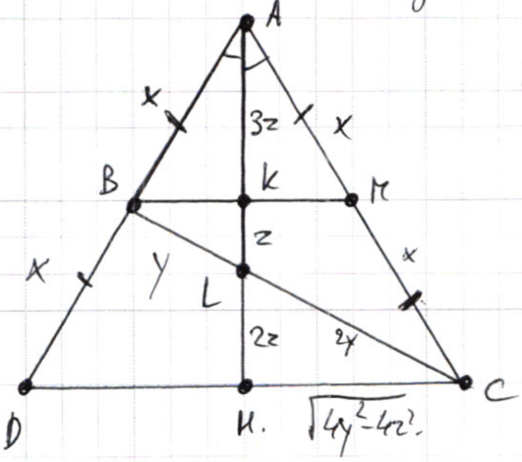
Задача 2.



Пусть в $\triangle ABC$ AL - бисс. и $AL \perp BM$.
BM - мед. $AL \cap BM = $ т. K

Тогда $\triangle AKB$ и $\triangle AKM$ равны по II пр.:
AK - общая, $\angle BAK = \angle MAK$, $\angle AKB = \angle AKM = 90°$
бисс.

Тогда $AB = AM = MC$, $AB = \frac{1}{2}AC$.



Продлим AB на $BD = AB$.
Тогда $AD = AC$, $\triangle ADC$ - р/б.

] $AL \cap DC = $ т. H. $\longrightarrow \angle DHA = 90°$.
AL - бисс.

По т. Фалеса $AK = KH$; $\triangle BLM \sim \triangle CLD$
($DBMC$ - р/б трапеция, т.к. BM - ср. линия в р/ст $\triangle$.

$k = \frac{BL}{LC}$; ~~по т.~~ по осн. св-ву бисс. $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$,

$\frac{KL}{LH} = \frac{1}{2}$ (пропорц. отрезки);] $AB = x$, $BL = y$, $AK = 3z$. $3x + 3y = 600$.

$CH = \sqrt{4y^2 - 4z^2}$ (т. Пифагора)

$CD = 4\sqrt{y^2 - z^2}$.

По формуле медианы $\overset{BC}{3y} = \sqrt{\frac{4x^2 + 16(y^2 - z^2) - x^2}{4}} = 2\sqrt{y^2 - z^2 + \frac{3}{4}x^2}$.

$9y^2 = 4y^2 - 4z^2 + 3x^2$.

$5y^2 = 3x^2 - 4z^2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑦ $\forall a,b>0,\ a,b\in\mathbb{Q}:\ f(ab)=f(a)+f(b).$

$\forall p\in\mathbb{P}:\ f(p)=p$

$f(ab)=f(a)+f(b).$

$f(a)=f(ab)-f(b).\qquad x,y\in\mathbb{Q}$

$\exists\, x=ab,\ y=b:\ x,y\in\mathbb{Q}\qquad \boxed{f(x/y)=f(x)-f(y)}$

~~$f(1)=f(2)-f(2)=0$~~ $f(1)=f(a)-f(a)=0.$

$f(2)=2\quad f(3)=3\quad f(4)=f(2)+f(2)=4.\quad$ $f(x)$ — сумма всех его простых делителей для $x\in\mathbb{N}$.

$f(5)$ ~~$f(6)=f(6)$~~

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(n)	0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8

$f(x)-f(y)<0$

Различных f: 0, 2, 3, 4, 5 (×2), 6 (×2), 7 (×3), 8 (×3), 9, 13, 17, 11. — 12 штук.

[illegible] 0, 2, 3, 4, 55, 66, 777, 888, 9, 11, 13, 17.

$f(x)-f(y)<0.$ — $\left(\dfrac{\text{Общее число} - \text{число пар равных}}{2}\right)$

пар равных: $\underset{55}{1}+\underset{66}{1}+\underset{77}{3}+\underset{88}{3}=8$.

Всего пар $18\cdot17$

Ответ: $\dfrac{18\cdot17-8}{2}=9\cdot17-4=170-21=149.$

☑ черновик ☐ чистовик

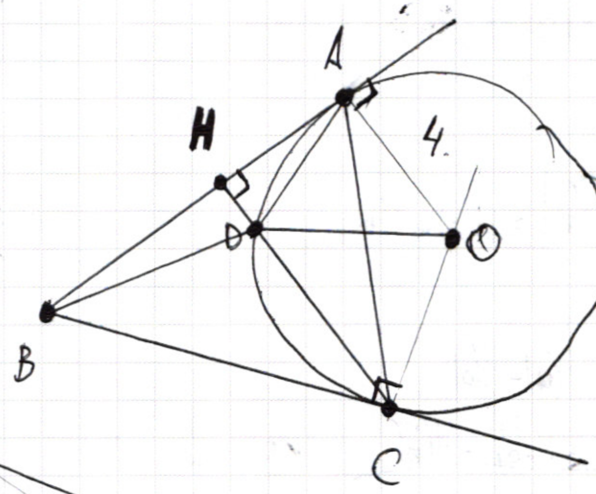
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

④.

$\frac{1}{\cancel{21}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}}$ $\quad \frac{1}{3\sqrt{2}}$



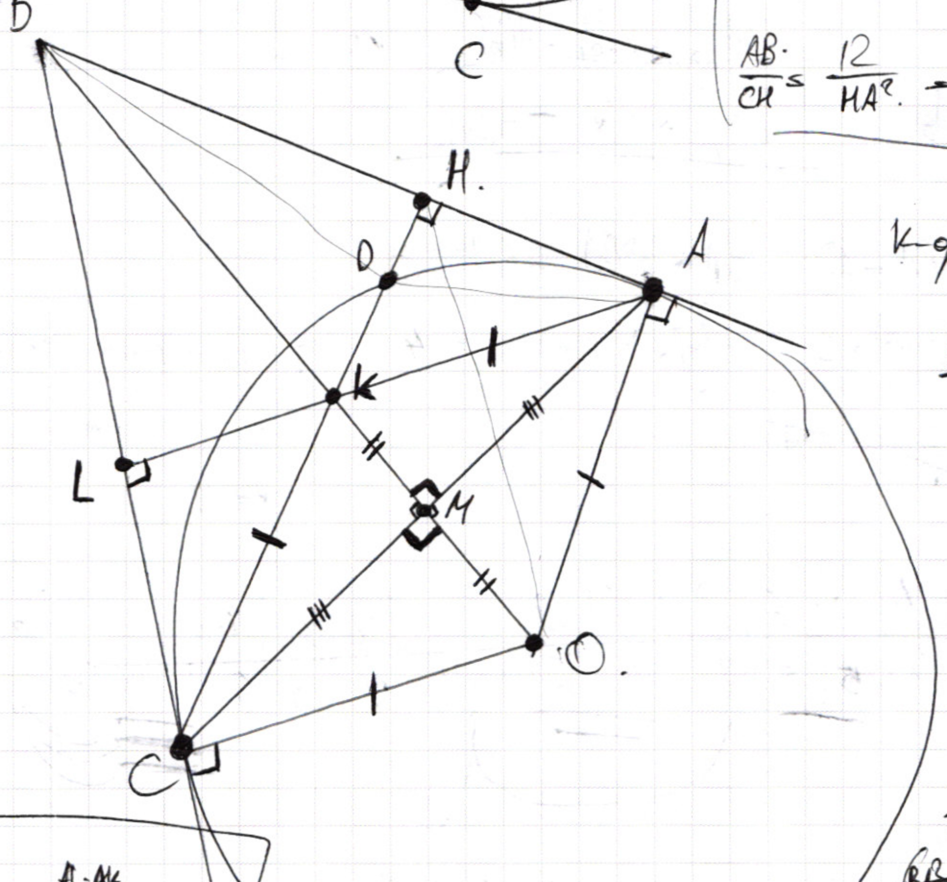
$AB \cdot DK = 12$ $\quad \frac{AB}{CH} = ?$

$AO = R = 4.$

$AO \parallel CH.$

$HD \cdot HC = \deg(H;\omega) = HA^2$

$\frac{AB}{CH} = \frac{12}{HA^2} =$



K – ортоцентр.

$\frac{BH}{BA} = \frac{BK}{BO}$

$BH = \frac{BA \cdot BK}{BO}$

$AH^2 = AK^2 - KL^2 =$

$= CK^2 - KH^2 =$

$= AO^2 - KH^2 =$

$\left(\frac{BA^2}{BH^2} - 1\right) KH^2 = AH^2.$

$\frac{BA^2 - BH^2}{BH^2} KH^2 = AH^2.$

$AH^2 = AO^2 - KH^2 = AO^2 \left(1 - \frac{BH^2}{AB^2}\right)$

$AH^2 = \frac{AB^2 - BH^2}{AB^2} AO^2$ $\quad = 16$

$CH^2.$ $\quad AH^2 = \frac{CH^2}{AB^2} AO^2.$

$AH^2 \cdot AB^2 = CH^2 \cdot AO^2.$

$AL = AK.$

$\Downarrow$

$AH \cdot AB = CH \cdot AO.$ $\quad | : CH \cdot AH.$

$\frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH} = \frac{12}{AH^2}.$

$AO \cdot AH = 12.$

$AH = 3.$

$\frac{AB}{CH} = \frac{4}{3}.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

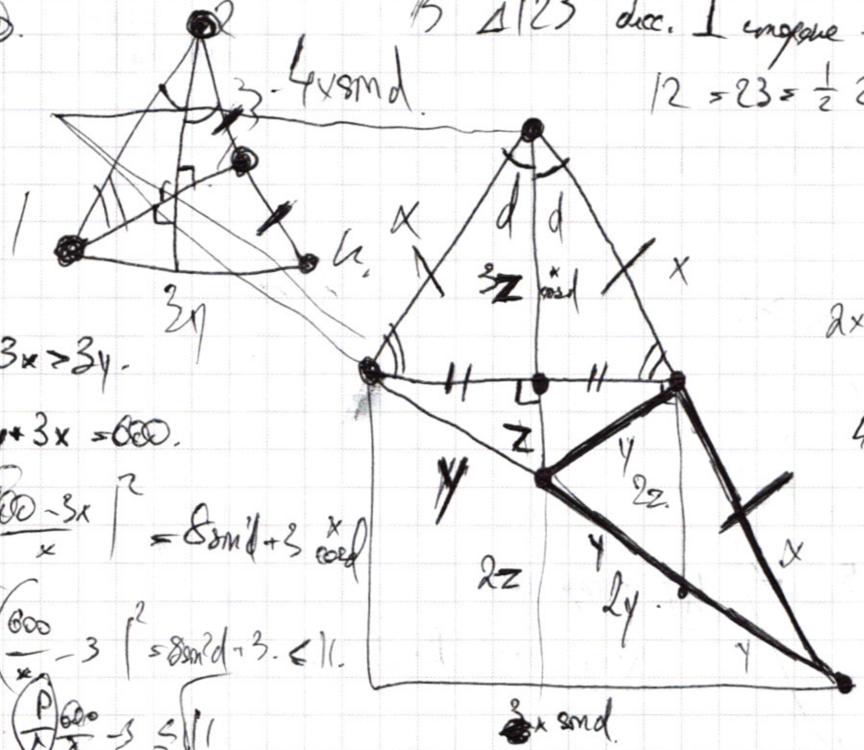
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

(2).

В $\Delta 123$ бисс. $\perp$ стороне $\Rightarrow$ он р/б.

$12 = 23 = \frac{1}{2} 24$



$x,\ 2x,\ 3y.$

$2x\sin\alpha = \sqrt{\frac{2x^2+18y^2-x^2}{4}}$

$4x^2\sin^2\alpha = \frac{18y^2-2x^2}{4}$

$8x^2\sin^2\alpha = 9y^2 - x^2.$

$x^2(8\sin^2\alpha + 1) = 9y^2 \in \mathbb{Z}.$

$\in \mathbb{Z}$

P не учитываем

$3x > 3y.$

$3y + 3x = 600.$

$\left(\frac{600-3x}{x}\right)^2 = 8\sin^2\alpha + 3\frac{x}{\cos\alpha}$

$\left(\frac{600}{x} - 3\right)^2 = 8\sin^2\alpha + 3. \leq 11.$

$\frac{P}{x}\ \frac{600}{x} - 3 \leq \sqrt{11}$

$\frac{600}{x} \leq \sqrt{11} + 3. < 7.$

$\frac{600}{7} \leq x.\quad x \geq 85\frac{5}{7}$

$x \geq 200 - x$

$x > 100.\quad x^2\cos^2\alpha + \frac{9}{4}x^2\sin^2\alpha = 9y^2$

$x^2 + \frac{5}{4}x^2\sin^2\alpha = 9y^2$

$x^2(1+8\sin^2\alpha) = 9y^2$

$\frac{x}{3y}\quad \frac{3y}{2x}$

$2x > 3y \Rightarrow \alpha = 30°$

$\frac{600}{x} - 3 = 8\sin^2\alpha + 3 \geq 3.$

$\frac{P}{6x} - 3 \geq 3$

$\frac{600}{x} \geq 6.$

$\frac{P}{6} \geq x$, но $x > \frac{P}{2}$

$\frac{600}{6} \geq x$ ~~$\Rightarrow x \leq 100$ но $x > 100$ из нер-ва Δ.~~

~~Такой Δ не существ.~~

$\in \mathbb{Z}\quad \geq 1.\quad \in \mathbb{Z}$

$x\sqrt{1+8\sin^2\alpha} = 3y.$

$\frac{600}{x} - 3 \geq 1.$

$\frac{600}{4} \geq x.$

$100 < x \leq 150.$

$3y > x$

$1+8\sin^2\alpha < 1+4\sin\alpha + 4\sin^2\alpha.$

$x + 2x\sin\alpha \geq 3y.$

$4\sin^2\alpha < 4\sin\alpha.$ вып. всегда.

$x(1+2\sin\alpha) > 3y$

$3y + x \geq 2x.$

$3y > x. \Rightarrow 200 - y < 3y.$

$3x \geq 3y$

$x\sqrt{1+8\sin^2\alpha} = 3y$

$< 3.$

$\text{ну} \geq 8\sin^2\alpha + 1.$

$0 < \alpha \leq 30°$

$200 < 4y$

$3z^2 = \frac{x^2\cos^2\alpha}{3}$

$y^2 = x^2\sin^2\alpha + \frac{x^2\cos^2\alpha}{9}$

$y > 50$

$t^2 = x^2\sin^2\alpha$

$1+8\sin^2\alpha$

$9y^2 = x^2(9\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$3y < 2x$

$\boxed{1+8\sin^2\alpha < 2}$

$0 \leq 8\sin^2\alpha \leq 2.$

$0 \leq \sin\alpha \leq \frac{1}{2}.$

$0 \leq \sin^2\alpha \leq \frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) $\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 \end{cases}$

$x^2 - 2x + 1 + 4 - 4y + y^2 \le 1 + 4$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5$ — ур-ие окр-ности

центр $(1;2)$ $R = \sqrt{5}$

$|2x| + |y| + |4-2x-y| > 4$

Лемма: ~~$|a| + |b| \ge |a+b|$. $a \ge 0$ и $b \ge 0$ одн.~~

$a > 0, b > 0$: $|a| = a, |b| = b$ $|a+b| = a+b$
$a<0, b<0$

$a+b \ge a+b$

$a<0, b>0$
(аналог. $a>0, b<0$). $|a| = -a$, $|b| = b$. ~~$|a+b| = |b - |a||$~~

~~$|b - a| \ge |b - |a||$ очев.~~

$|2x| + |y| + |4-2x-y| \ge$

$\ge \cancel{2x+y+4-2x-y} \ge 4$

$|2x| + |y| + |4-2x-y| = 4$

$\begin{cases} 2x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 4-2x-y \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 4 \ge 2x+y \end{cases}$

$2x + y = 4$
$y = 4 - 2x$

x	0	1
y	4	2

~~$S_{иск} = S_{окр} - S_{\Delta} = 5\pi - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 5\pi - 4$~~

$\pi \approx 3{,}1415926$

~~$5\pi \approx 15{,}42477$~~ ~~Ответ: $5\pi - 4 \approx 11{,}42$~~

$5\pi - 4 \approx 11{,}42$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$

$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|} \le 0$

$\frac{(|x-3|-1)^2}{2|x^2-2x|+|x^2-2x|} \le 0$. $\quad (|x-3|-1)^2 \ge 0$

1) $(|x-3|-1)^2 = 0$, $2(x^2-2x)+|x^2-2x| \ne 0$.

2) $(|x-3|-1)^2 > 0$, $2|x^2-2x|+|x^2-2x| < 0$.

1) $(|x-3|-1)^2 = 0 \Leftrightarrow |x-3|-1=0 \Leftrightarrow |x-3|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2. \end{array}\right.$

$2(x^2-2x)+|x^2-2x| \ne 0$:

$(2+\text{sgn}(a))(x^2-2x) \ne 0$. $\Leftrightarrow x^2-2x \ne 0$.

$-1 \le \text{sgn}(a) \le 1 \Rightarrow$ $\quad x(x-2) \ne 0$

$x \ne 2,\ x \ne 0$.

$x=4$.

2) $x \ne 4,\ x \ne 2$

$2(x^2-2x)+|x^2-2x| < 0$.

$(2+\text{sgn}(a))(x^2-2x) < 0$.

$-1 \le \text{sgn}(a) \le 1 \Rightarrow (x^2-2x) < 0 \Leftrightarrow x(x-2) < 0$

$x \in (0;2)$

Ответ: $x \in (0;2) \cup \{4\}$.

③ $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \quad x=5-y^2$

$x\le 5$

$2y\le x \Rightarrow y\le \frac{x}{2}$

$5-y^2-2y=\sqrt{y(5-y^2)}$

$6-(y+1)^2=\sqrt{xy}$ $\quad \sqrt{xy}\le 6$ $\quad 0\le xy\le 36$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$ $\quad xy\ge 0$, $\sqrt{xy}\ge 0$ $\quad (x-2y)^2=xy$ $\quad x\ge 2y$

$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-xy=0 \\ x+y^2=5 \end{cases}$ $\quad x^2-5xy+4y^2=0$

$(x-4y)(x-y)=0$

$x=4y$ $\quad x=y$

$x+y^2=5$

$y^2+4y-5=0$ $\quad y^2+y-5=0$

$(y+5)(y-1)=0$ $\quad D=1+20=21$

$y=-5$, $x=-20$ $\quad y=1$, $x=4$ $\quad y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$, $x=y$

Ответ: $x=4,\ y=1$;

$x=y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$\boxed{x=4,\ y=1}$ $\quad x\ge 2y$ $\quad xy\ge 0$

~~$x=-20$ $\quad y=-5$ $\quad x<2y$~~

~~$y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}>0 \Rightarrow x>0$ $\quad x\ge 2y$~~

$\boxed{y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}=x}$ $\quad x\ge 2y$ $\quad xy\ge 0$

$\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2=\frac{1+21+2\sqrt{21}}{4}$

$\frac{-2-2\sqrt{21}}{4}$ $\quad \frac{\sqrt{21}-1}{4}$

5

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

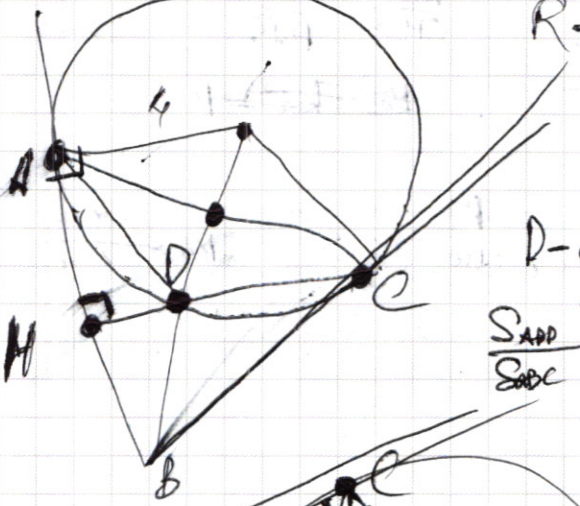
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4)

$S_{ABD} = 6$

$R = 4$

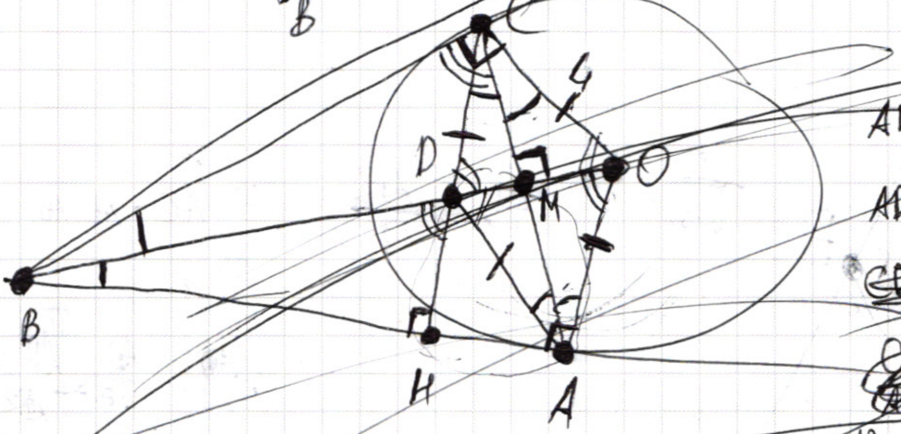


$AB \cdot HD = 12.$

D — ортоцентр

$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{HD}{DC}.$

$HD \cdot AB = 12 = 2S_{ABD}.$



ADCO — пар-м, ромб.

$AD = CO = 4 = CD.$

~~$CD \cdot DH = 4DH$~~

$\frac{\frac{1}{2}CA}{CH} = \frac{CD}{CA}.$

$\frac{AB}{CH} = \frac{\frac{12}{DH}}{CD+DH} = \frac{12}{DH(DH+4)}.$

$\frac{1}{2}CA^2 = CD \cdot CH = 4(DH+4) = CH^2 - (DH)(DH+4) = \frac{1}{2}CH^2 + \frac{1}{2}AH^2.$

$\frac{1}{2}CH^2 - \frac{1}{2}AH^2 = DH(DH+4).$

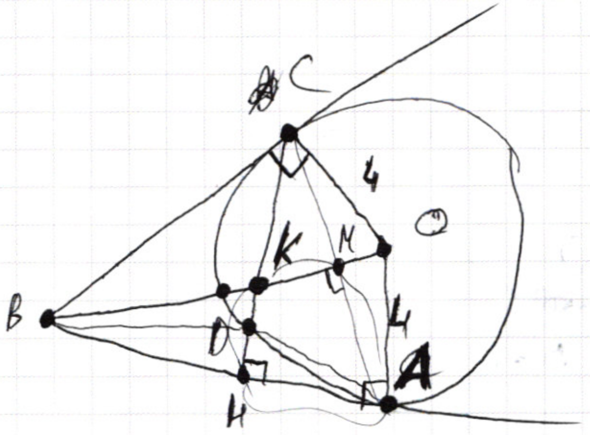
h

1, 3, 6, 5 (7).

4

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



K – центр окружн. $\triangle ABC$

KA – диаметр (DKA).

$AB \cdot DH = 12.$

$HD \cdot HC = HA^2.$

$\frac{AB}{CH} = \frac{12}{HA^2}.$

OKA – пр-м.

O и ромб.

$OK = 4.$

~~$HA^2 = KA^2$ H~~

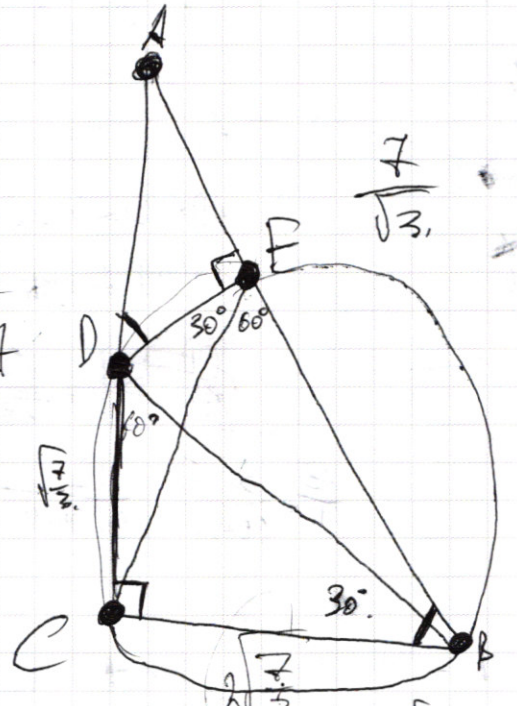
$HA^2 = KA^2 - KH^2 = 16 - KH^2.$

~~$CK \cdot CH = \frac{1}{2} CA^2.$~~

~~$\frac{KM}{KA} = \frac{CM}{CH} = \frac{CK}{CA}$~~ $KA = \frac{KM \cdot CA}{4 \cdot CK}$

$\frac{KH}{OA} = \frac{BH}{BA}. \quad KH = \frac{4BH}{BA}.$

(8)



$\frac{7}{\sqrt3}.$

$\sqrt7$

$\sqrt{\frac{7}{3}}.$

$2\sqrt{\frac{7}{3}}.$ $\frac{2\sqrt7}{\sqrt3}.$

~~$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB}$~~

$AD \cdot AC = AE \cdot AB.$

$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC},$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \boxed{\frac{AD \cdot AC}{AB^2}}$

$AB = \sqrt{7 + 4\cdot\frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{21+28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt3}.$

$\frac{AD}{AE} = \frac{\sqrt7}{\sqrt2},$

$\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt7 - \sqrt{\frac{8}{3}}}{\sqrt7} = \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt3}} = \frac{\sqrt3 - 1}{\sqrt3} = \frac{3-\sqrt3}{3}$

$S_{AED} = S_{ABC} \cdot \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AD \cdot AC}{AB^2} = S_{ABC} \cdot \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{\left(\sqrt7 - \sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2}{\frac{7}{\sqrt3}} \cdot \boxed{\frac{AC \cdot BC \cdot AD^2}{AB^2}}$