МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leq 0$; Раскроем знак модуля:

Подмодульные нули: 0 ; 1 ; 3 .

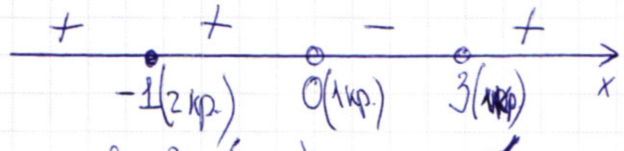
1) Если $x \in (-\infty; 0]$, то $\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} = \frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+(-x)(3-x)} =$

$= \frac{x^2-2x+5-4+4x}{4x^2-12x-3x+x^2} = \frac{x^2+2x+1}{5x^2-15x} = \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)}$;

$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0$; $|\cdot 5>0$

$\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$;

Решаем с помощью метода интервалов, (-1) - корень 2 кратности, 0, 3 — корни 1 кратности, нули знаменателя выкалываем.

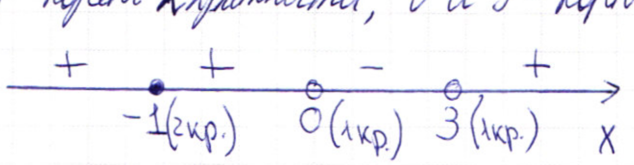


$x \in \{-1\} \cup (0; 3)$, но $x \in (-\infty; 0]$, значит, $x \in \{-1\}$.

2) Если $x \in [0; 1]$, то $\frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+x\cdot(3-x)} = \frac{(x+1)^2}{4x^2-12x+3x-x^2} = \frac{(x+1)^2}{3x^2-9x}$,

$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0$; $|\cdot 3>0$

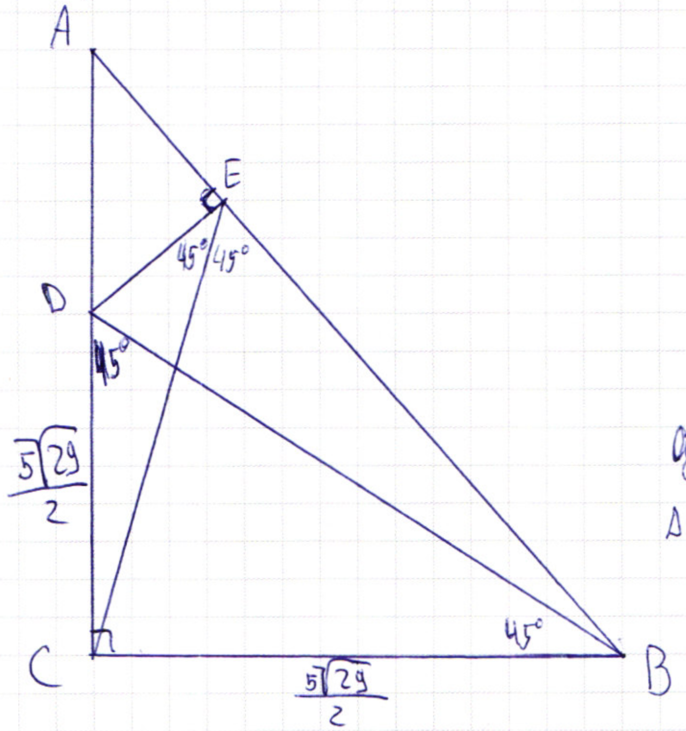
$\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$; (-1) - корень 2 кратности, 0 и 3 - корни 1 кратности, нули знаменателя выкалываем.



☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

5. 1) Если точки D и E лежат на катете и гипотенузе, а не на прямых, содержащих их, то $DC < AC$, как часть катета.
По условию D и E лежат на катете и гипотенузе, значит, $DC < AC$.



$DE \perp AB$, значит, $\angle DEB = 90°$.
$\angle DEC = 45° \Rightarrow \angle BEC = 90° - 45° = 45°$.
$\angle DEB + \angle DCB = 90° + 90° = 180°$, значит, $CDEB$ - вписанный. Тогда $\angle CDB = \angle CEB = 45°$.
$\angle CBD = \angle CED = 45°$, т.к. они опираются на одну дугу. Тогда $\angle CDB = \angle CBD = 45°$, значит, $\triangle CDB$ - равнобедренный $\Rightarrow DC = BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$.
$DC < AC$ по выше доказанному, значит,
$\frac{5\sqrt{29}}{2} < \sqrt{29}$, по условию
$\frac{5}{2} < 1$, что неправда.

~~Задача~~ 7. По условию $f(ab) = f(a) + f(b)$
Пусть $a = 1$, $b = 2$, тогда $f(2) = f(1) + f(2)$
$0 = f(1)$

$f(x) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = f(p_1) + f(p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = p_1 + f(p_1) + f(p_1^{\alpha_1 - 2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) =$
Пусть $x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i - простое число.
$= \ldots = p_1 + p_1 + \ldots + p_k + \ldots + p_k = p_1 \cdot \alpha_1 + p_2 \cdot \alpha_2 + p_3 \cdot \alpha_3 + \ldots + p_k \cdot \alpha_k$.

1) $f(3) = 3$, $\{x; y\} \in [3; 19]$, подходит.
2) $f(4) = 2 \cdot 2 = 4$, $\{x; y\} \in [3; 19]$, подходит.
3) $f(5) = 5$;
4) $f(6) = 2 + 3 = 5$;
5) $f(7) = 7$;
6) $f(8) = 6$;

$\{x; y\} \in [3; 19]$, подходит.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. $x \in [0;1]$ в этом случае, то $x \in (0;1]$ - решение этого случая.

3) Если $x \in [1;3]$, то $\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+(x)(3-x)} = \frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+3x-x^2} =$

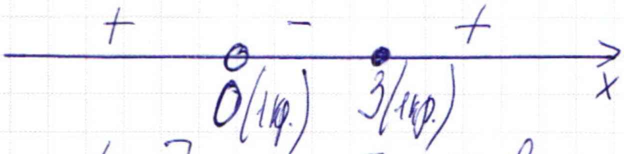
$= \frac{x^2-6x+9}{3x^2-9x} = \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)}$;

$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0; \quad |\cdot 3>0$

$\frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{x\cancel{(x-3)}} \leq 0;$

$\frac{x-3}{x} \leq 0;$

Решаем с помощью метода интервалов, 0 и 3 - корни 1 кратности, нули знаменателя выкалываем.



$x \in (0;3]$, но $x \in [1;3]$ в этом случае, значит, решение - $x \in [1;3]$.

4) Если $x \in [3;+\infty)$, то $\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)} = \frac{(x-3)^2}{4x^2-12x+x^2-3x} =$

$= \frac{(x-3)^2}{5x^2-15x} = \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} = \frac{x-3}{5x}$.

$\frac{x-3}{5x} \leq 0$; Решаем с помощью метода интервалов, 0 и 3 - корни 1 кратности.

7) $f(9)=3\cdot2=6$
8) $f(10)=2+5=7$
9) $f(11)=11$
10) $f(12)=2\cdot2+3=7$
11) $f(13)=13$
12) $f(14)=7+2=9$
13) $f(15)=5+3=8$
14) $f(16)=2\cdot4=8$
15) $f(17)=17$
16) $f(18)=2+3+3=8$
17) $f(19)=19$

$\{x;y\}\in[3;19]$, подходят.

(3) $f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Leftrightarrow f(x)-f(y)<0 \Longleftrightarrow f(x)<f(y)$.

$f(x)=f\left(y\cdot\frac{x}{y}\right)=f(y)+f\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

Проверяем условие (3):

1) $x=3,\ y=3 \Rightarrow f(3)=f(3)$
2) $x=4,\ y=4 \Rightarrow f(4)=f(4)$
3) $x=5,\ y=5 \Rightarrow f(5)=f(5)$

– не подходит.

4) $x=6,\ y=5 \Rightarrow f(6) \vee f(5)$

$\quad 5 = 5$ – не подходит.

5) $x=y=7,\ f(7)=f(7)$ – не подходит.
6) $x=8,\ y=6,\ f(8)\vee f(6)$

$\quad 6 \vee 5$

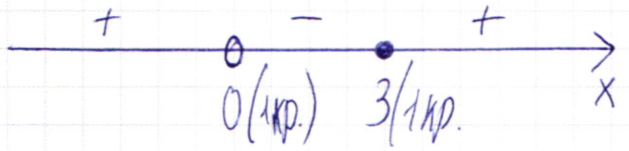
$\quad f(8)>f(6)$ – не подходит.

7) $x=9,\ y=6,\ f(9)\vee f(6)$

$\quad 6 \vee 5 \Rightarrow f(9)>f(5)$ – не подходит.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x \in (0;3]$, но $x \in [3;+\infty)$ в этом случае, значит, $x=3$.

~~Итого~~ Т.к. в изначальной дроби знаменатель не равен 0, то

$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| \neq 0$;

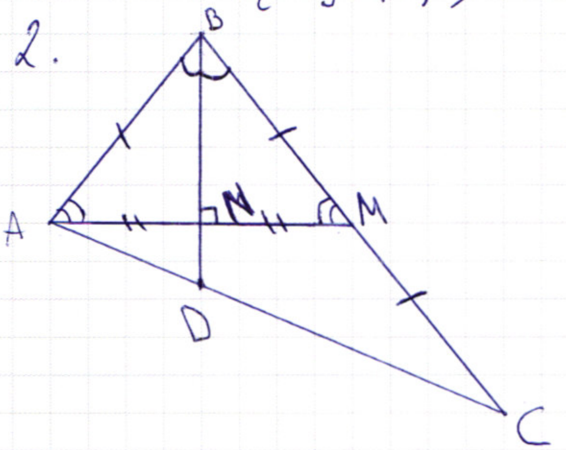
$4x(x-3)+|x(x-3)| \neq 0$;

Заметим, что это выражение не равно 0 при $x \neq 0$ и при $x \neq 3$.

Значит, решение неравенства $x \in \{-1\} \cup (0;3)$.

Ответ: $x \in \{-1\} \cup (0;3)$.

2.



Пусть BD – биссектриса, AM – медиана, $BD \cap AM = N$, $BD \perp AM$. Тогда в $\triangle ABM$: BN – высота и биссектриса, значит, он равнобедренный. $AB=BM=MC$. Т.к. BD – биссектриса, то $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$. Из любого равнобедренного треугольника, как из $\triangle ABM$, можно построить искомый, т.е. продлить в 2 раза BM за точку M – точка C, и $\triangle ABC$ – искомый. То есть надо узнать кол-во способов построить равнобокий треуг. с целочисл. боковыми сторонами. большими 50, иначе если $AB \leq 50$, то $AB+BC \leq 150$. Тогда $AB+BC \leq AC=300-AB+BC$. Но по неравенству треугол. $AB+BC > AC$. Заметим, что, зная сторону AB, известны $BC=2AB$ и $AC=300-3AB$. Т.к. ~~...~~ есть признак равенства треугольников по 3 сторо-

8) $x = 10$, $y = 7$, $f(10) \vee f(7)$

$7 = 7$

$f(10) = f(7)$ – не подходит

9) $f(11) = f(11)$, $x = y = 11$.

10) $x = 12$, $y = 7$, $f(12) \vee f(7)$

$7 \vee 7$

$f(12) = f(7)$ – не подходит

11) $f(13) = f(13)$, $x = y = 13$

12) $x = 14$, $y = 9$, $f(x) \vee f(y)$

$7 \vee 6$

$f(14) > f(6)$ – не подходит

13) $x = 15$, $y = 8$, $f(15) \vee f(8)$

$8 \vee 6$

$f(15) > f(6)$ – не подходит

14) $x = 16$, $y = 8$, $f(16) \vee f(8)$

$8 \vee f(8)$, как в п. 13.

15) $f(17) = f(17)$, $x = y = 17$, не подходит.

16) $x = 18$, $y = 8$, $f(18) \vee f(8)$

$8 \vee f(8)$ как в п. 13.

17) $f(19) = 19$, $x = y = 19$ – не подходит.

Ответ: 0 пар.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

нам, что зная 3 стороны треугольник строится однозначно.
По неравенству треугольника $AC + AB > BC \Leftrightarrow 300 - 3AB + AB > 2AB \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 300 > 4AB \Leftrightarrow AB < 75$. Значит, боковая сторона больше 50 и меньше 75. Тогда есть 24 варианта её длины (51, 52, ... 74), т. е. есть 24 разных искомых треугольников.

Ответ: 24.

6. $\begin{cases} \cancel{|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6;} \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}; (1) \\ 2y + x^2 = 9; (2) \end{cases}$

(2): $y = \frac{9 - x^2}{2}$;

(1): $\frac{9 - x^2}{2} - 2x = \sqrt{x\left(\frac{9 - x^2}{2}\right)}$;

$\frac{(9 - x^2)^2}{4} + 4x^2 - 2x(9 - x^2) = \frac{x(9 - x^2)}{2}$;

$\frac{81 + x^4 - 18x^2}{4} + 4x^2 - 18x + 2x^3 = \frac{9x - x^3}{2}; \Big| \cdot 4$

$81 + x^4 - 18x^2 + 16x^2 - 72x + 8x^3 = 18x - 2x^3; \Big| -18x + 2x^3$

$x^4 + 81 - 2x^2 - 90x + 10x^3 = 0; \Big| : x^2 \ne 0$

$\left(x^2 + \frac{81}{x^2}\right) + \left(10x - \frac{90}{x}\right) - 2 = 0$;

~~Пусть t~~ $\left(x - \frac{9}{x}\right)^2 + 18 + 10\left(x - \frac{9}{x}\right) - 2 = 0$;

Пусть $t = x - \frac{9}{x}$, тогда $t^2 + 10t + 16 = 0$;

$t = -2$ или $t = -8$

$x - \frac{9}{x} = -2; \Big| \cdot x$ $\qquad$ $x - \frac{9}{x} = -8; \Big| \cdot x$

$x^2-9=-2x$;

$x^2+2x-9=0$;

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 9}}{2}=$

$=-1\pm\sqrt{10}$;.

$x^2-9=-8x$;

$x^2+8x-9=0$;

$x_3=1$;

$x_4=-9$;.

1) Если $x=-1+\sqrt{10}$, то $y=\frac{9-(-1+\sqrt{10})^2}{2}=\frac{9-(1+10-2\sqrt{10})}{2}=\frac{-2+2\sqrt{10}}{2}=-1+\sqrt{10}$.

2) Если $x=-1-\sqrt{10}$, то $y=\frac{9-(1+\sqrt{10})^2}{2}=\frac{9-(1+10+2\sqrt{10})}{2}=\frac{-2-2\sqrt{10}}{2}=-1-\sqrt{10}$.

3) Если $x=1$, то $y=\frac{9-1^2}{2}=\frac{8}{2}=4$.

4) Если $x=-9$, то $y=\frac{9-9^2}{2}=\frac{9-81}{2}=\frac{-72}{2}=-36$.

Проверка: 1) $-1+\sqrt{10}-2(-1+\sqrt{10})=\sqrt{(-1+\sqrt{10})^2}$;

$\cancel{-1+\sqrt{10}}+2-2\sqrt{10}=\cancel{-1+\sqrt{10}}$;

$2-2\sqrt{10}=0$.

Неверно.

2) $-1-\sqrt{10}-2(-1-\sqrt{10})=\sqrt{(-1-\sqrt{10})^2}$;

$-1-\sqrt{10}+2+2\sqrt{10}=1+\sqrt{10}$;

$1+\sqrt{10}=1+\sqrt{10}$;

$2(-1-\sqrt{10})+(-1-\sqrt{10})^2=9$;

$-2-\cancel{2\sqrt{10}}+1+10+\cancel{2\sqrt{10}}=9$;

$9=9$;, верно.

3) $4-2\cdot 1=\sqrt{4\cdot 1}$;

$2=2$

$2\cdot 4+1^2=9$;

$9=9$;, верно.

4) $-36-2(-9)=\sqrt{36\cdot 9}$;

$-36+\cancel{18}=\cancel{18}$;

$-36=0$, неверно.

Ответ: $x_1=-1-\sqrt{10}$, $y_1=-1-\sqrt{10}$; $x_2=1$, $y_2=4$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №5

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

6. $\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \text{ ; (1)} \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \text{ ; (2)} \end{cases}$

(2) : $(x^2-2x+1)-3y+y^2-1\le 0$; $|-(x^2-2x+1)\ge 0$, поэтому:

$y^2-3y-1\le 0$;

Решим соответствующее уравнение: $y^2-3y-1=0$

$y=\frac{3\pm\sqrt{9+4\cdot 1}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

~~$y\in[\frac{3}{}$ 13~~ $y\in\left[\frac{3-\sqrt{13}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$.

(1) : $6-3x-2y\vee 0$;

$\frac{6-3x}{2}\vee y$; $\frac{6-3x}{2}=y$ — прямая.

1) Если $x\ge 0, y\ge 0$, $6-3x-2y\ge 0$, то $3x+2y+6-3x-2y>6$

$6>6$

нет решений

2) Если $x\ge 0, y\ge 0$, $6-3x-2y\le 0$, то $3x+2y+\cancel{6}-\cancel{6}+3x+2y>6$;

$6x+4y>6$;

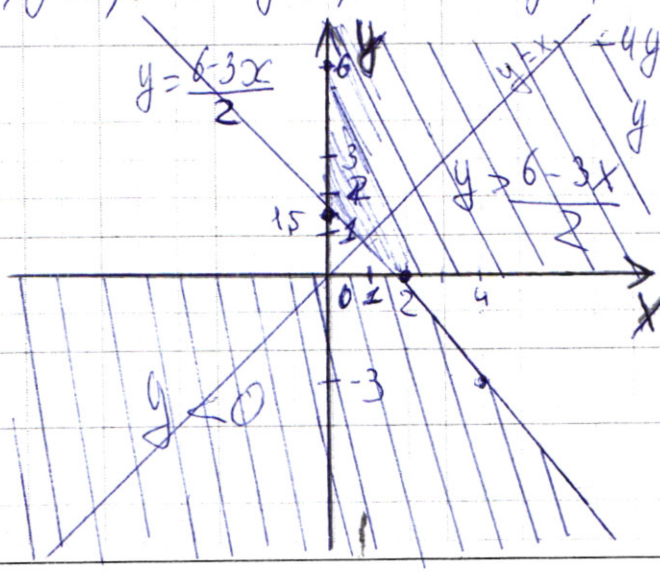
$3x+2y>6$;

$y>\frac{6-3x}{2}$.

3) Если $x\ge 0, y\le 0, 6-3x-2y\ge 0$, то $3x-2y+\cancel{6}-3x-2y>\cancel{6}$;

$-4y>0$;

$y<0$.



☐ черновик ☑ чистовик Страница № 9

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

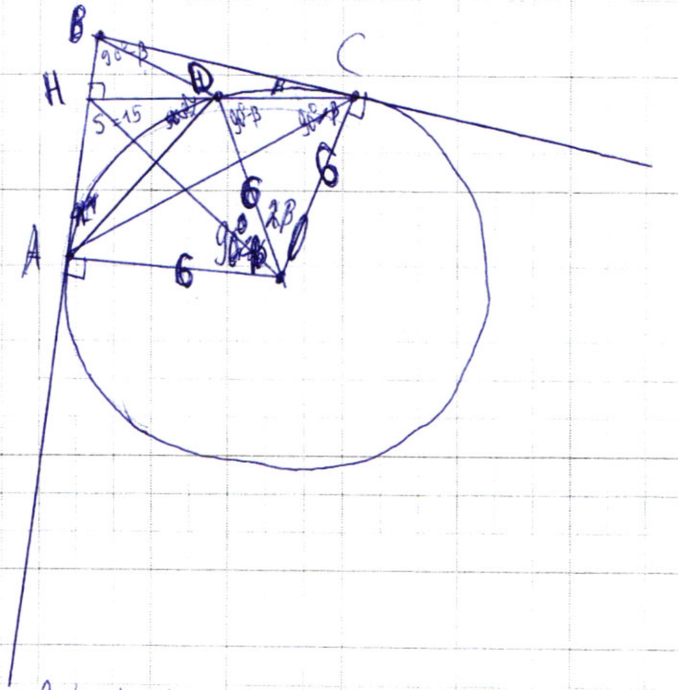
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

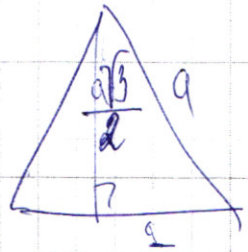
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

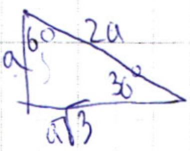
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







$S_3 = \frac{a\sqrt{3}\cdot a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\frac{a^2 \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\frac{BA\cdot HD}{2} = 15$

$\frac{BC\cdot HD}{2} = 15$

$BC\cdot HD = 30$

$BC = \frac{30}{HD}$

~~$|3x| + |2y| + |6-3x-2$~~

$x^2-2x+1+y^2-3y+1\le 0$

$(x+1)^2$

~~$3x+2y+6-3x-2y\ge 6$~~

$-3x+2y+6-3x-2y>6$;

$-6x+6>6$

$-6x>0$

$x<0$;

$x^2-2x-3y+y^2\le 0$;

~~$x^2-4x+y^2-3y\le 0$~~;

$y^2-3y-1\le 0$;

$y^2-3y-1=0$;

$y=\frac{3\pm\sqrt{9+4}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

1

☑ черновик ☐ чистовик Страница №

$$\begin{cases} y-2x=7\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$y=\frac{9-x^2}{2}$

$\frac{9-x^2}{2}-2x=7\sqrt{x\left(\frac{9-x^2}{2}\right)}$

$\frac{(9-x^2)^2}{4}+4x^2-2x(9-x^2)=\frac{x(9-x^2)}{2}$

$\frac{9^2+x^4-18x^2}{4}$ ~~$+16x^4+4x^2(9-$~~

$+4x^2-18x+2x^3=\frac{9x-x^3}{2}$

$9^2+x^4-18x^2+16x^2-72x+8x^3=18x-2x^3$

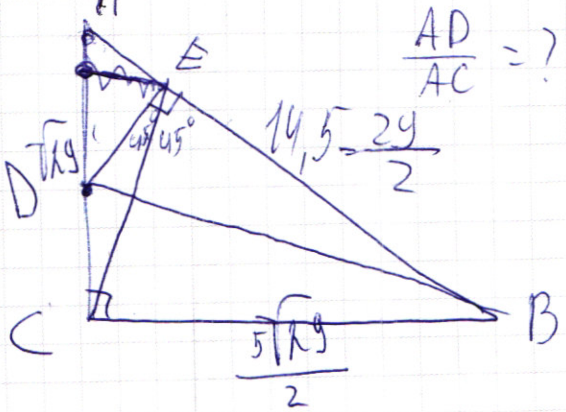
$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$

$\frac{9^2+x^4+16x^2-18x^2-72x+8x^3}{2x}=\frac{9-x^2}{x}$

$x^4+8x^3-2x^2-72x+81=18x-2x^3$

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$

~~$x^2+10x-2-\frac{90}{x}+\frac{81}{x^2}=0$~~



$\frac{AD}{AC}=?$

$14,5=\frac{29}{2}$

$(x+3)^4=(x^2+6x+9)^2=$

$=x^4+36x+81-12x^3-108x+$

$+18x^2=x^4-72x$

$5x^3-x^2-45x$

$y^2+4x^2-4xy=xy$

$y^2=-5xy-4x^2$

$2y=2\sqrt{xy}+4x=9-x^2$

$x^2+4x+2\sqrt{xy}=9$

$\sqrt{xy}=\frac{9-x^2-4x}{2}$

$y=\left(\frac{9-x^2-4x}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{x}$

$\frac{9-x^2}{2}$

$AB=\sqrt{29+\frac{25\cdot 29}{4}}=\sqrt{29\cdot\left(1+\frac{25}{4}\right)}=$

$=\sqrt{\frac{29\cdot 29}{4}}=\frac{29}{2}=14,5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}; \\ 2y+x^2=9; \end{cases}$$

$3x > 300-3x$

$x > 100-x$

$2x > 100$

$x > 50$

$300-3x > 2x$

$2y^2+8x^2-8xy=2xy;$

$300 > 6$

$75 > x$

$$\begin{cases} y^2+4x^2-4xy=xy; \\ 2y+x^2=9; \end{cases}$$

$(2x-y)^2=xy$

$74-50$

$y^2+4x^2-4xy=xy+2y+x^2-9;$

$2y+x^2=9$

$y^2+3x^2-5xy-2y+9=0;$

$4y^2+x^4+4x^2y=81$

$2y^2+8x^2-10xy+9=2y+x^2$

$4y^2+x^4+4x(2x-y)^2=81$

$2y^2+x^2y-4xy-2x^3=9\sqrt{xy}$

$4y^2+x^4+16x^3+4xy^2-16x^2y=81$

$y=\frac{9-x^2}{2}=\frac{-x^2}{2}+4{,}5;$

$y-2x=\sqrt{xy};$

$x \quad 9 \quad 4$

$AB:CH=?$

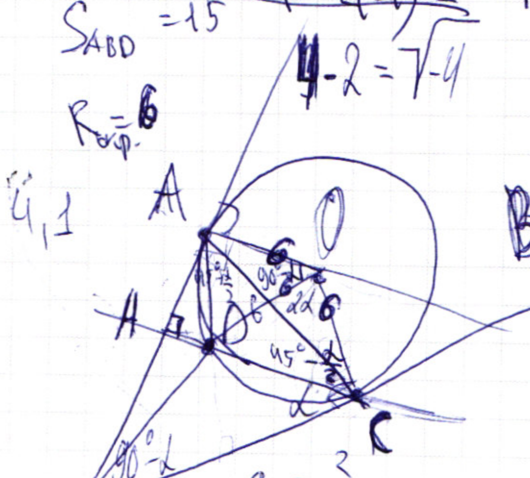
$S_{ABD}=15$

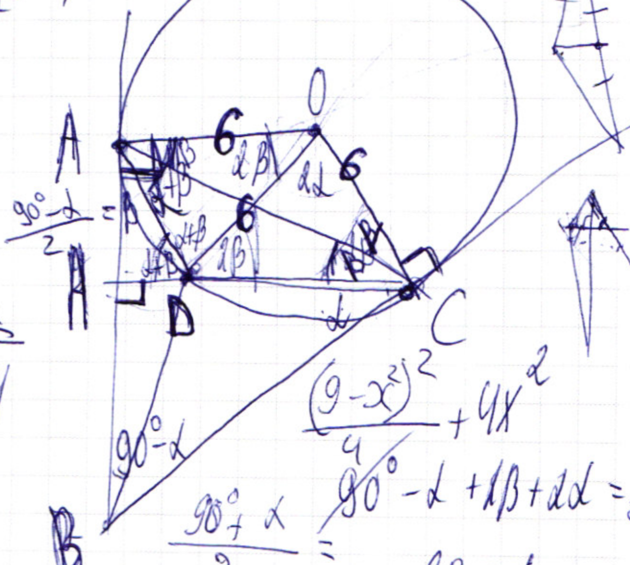
$R_{\text{оп.}}=6$

$\frac{7-2(-1)}{} =$

$4-2=\sqrt{-4}$

$4{,}1$





$\frac{90^\circ-\alpha}{2}=$

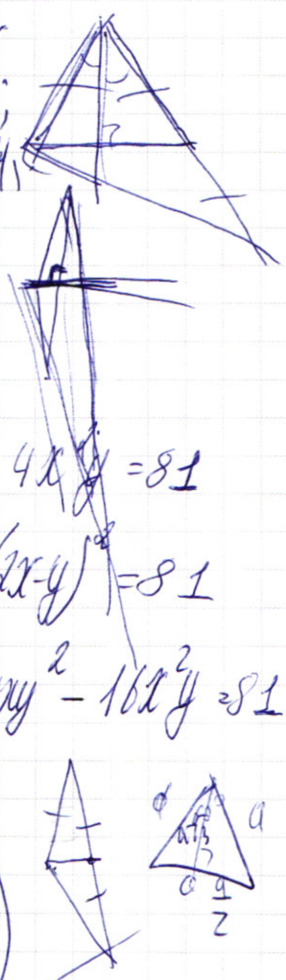
$\frac{(9-x^2)^2}{4}+4x^2$

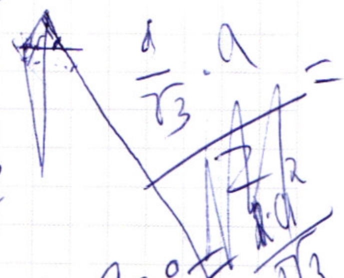
$90^\circ-\alpha+2\beta+2\alpha=180^\circ$

$\frac{90^\circ+\alpha}{2}=$

$2\beta+\alpha=90^\circ$

$=45$

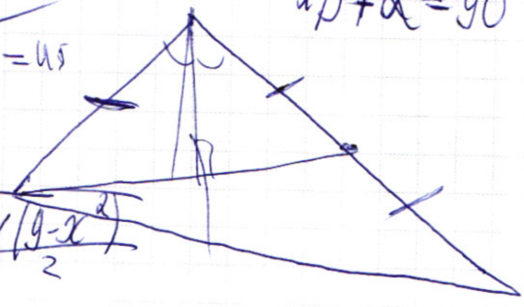




$\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot a=$

$\frac{\sqrt{2}a^2}{2\sqrt{3}}$

$\frac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{\frac{x(9-x^2)}{2}}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y - 2x = 7xy \\ xy + x^2 = 9 \end{cases}$$

~~$x - x$~~

$x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 90x + 81 = 0$

$-1 + 7\sqrt{10} + 2 - 2\sqrt{10} = 7\sqrt{1+7\sqrt{10}}$

$x^2 + \frac{81}{x^2} + 10x - \frac{90}{x} - 2 = 0$

$2 - 7\sqrt{10} - 0$

$\left(x - \frac{9}{x}\right)^2 + 18 + 10\left(x - \frac{9}{x}\right) - 2 = 0$

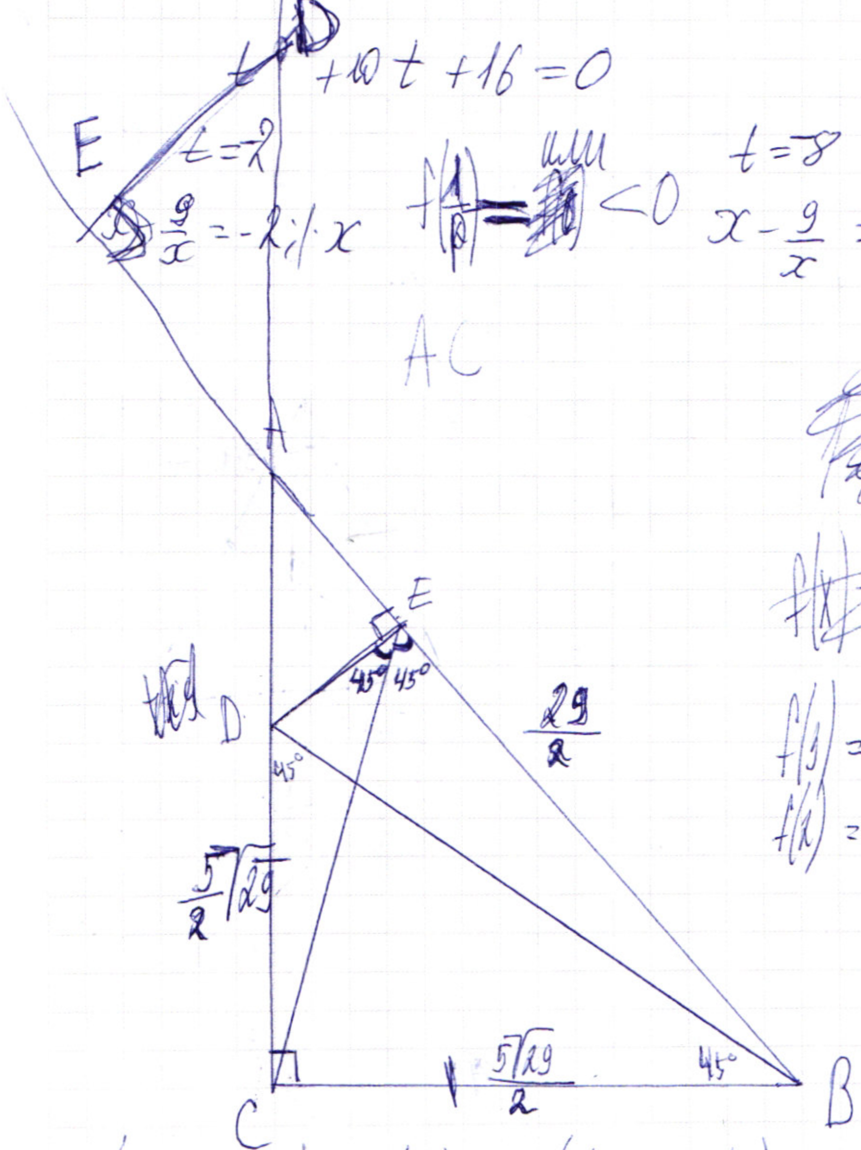
$f\left(\frac{ab}{c}\right) = f$

$t^2 + 10t + 16 = 0$

$t = -2$ или $t = -8$

$x - \frac{9}{x} = -2; | \cdot x$ $\quad f\left(\frac{1}{p}\right) < 0$ $\quad x - \frac{9}{x} = -8; | \cdot x$

AC



$f(x) + f(y) = f(x)$

$f(3) = 3$

$f(2) =$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = f(p^2) + f(-1$

$f(p) = f(p^2) + f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1) + f(p_1^{\alpha_1 - 1} \ldots p_k^{\alpha_k}) =$

$= p_1$

$f(p_1 p_2 p_3) = f(p_1 p_2) + f(p_3) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) =$

$= p_1 + p_2 + p_3$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0;$$

$$\frac{1+2+5-4\cdot 2}{4+12+4}=\frac{0}{}=0$$

$y^2+4x^2 \cancel{-4xy} = xy$

$\frac{9x-x^3}{2} = \frac{9^2+x^4+16x^2-18x^3-72x-8x^3}{4}$

~~Если Подмо~~

$18x-2x^3=81+x^4-2x^2-72x-6x^3$

$$\frac{(x-1)^2+4-4|x-1|}{4x(x-3)+|x(x-3)|}\le 0;$$

$$\frac{1+2+5-4\cdot 2}{\cancel{4+12+4}}$$

$f(52)=f(3)+f(19)$

$90x=81+x^4-2x^2-x^3$

$xy\ge 0$

$f(52)=22$

~~Подмодульные нули: 0 ; 1 ; 3~~

$y=2x+\sqrt{xy}$

$4-12+2=-6\ne 0.$

$f(0)=\cancel{f(x)+f(0)}$ $=0$

1) $x\in(-\infty;0]$

$$\frac{(x-1)^2+4-4(-x+1)}{4x(x-3)+(-x)\cdot(-x+3)}\le 0.$$

$\sqrt{xy\cdot x^2}=x\sqrt{xy}$

$90x-81=x^4-x^2-(x^2+x^3)$

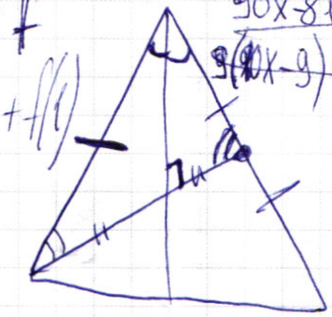
$9(10x-9)=$

$f(1)=f(1)+f(1)$

$\frac{9-x^2}{2}-2x=\frac{9-x^2-4x}{2}$

$$\frac{(x-1)^2+4+4(x-1)}{4x(x-3)+x(x-3)}\ge 0;$$

$f(1)=0$



$4x(x-3)+|x(x-3)|=0$

$$\frac{(x-1)(x-1+4)+4}{x(x-3)(4+1)}$$

$=\sqrt{\frac{9x-x^3}{2}}$

$f(3)=3=f(1)+f(3)=3$

$x\in\{-1\}\cup(0;1]\cup[1;3]\cup\{3\}=$

$=\{-1\}\cup(0;3]$.

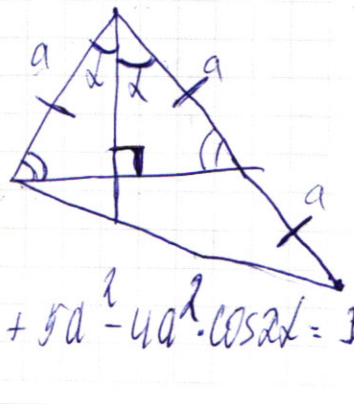
$x^2-2x+5-4(1-x)=x^2-2x+5-4+4x=x^2+2x+1=(x+1)^2$

$4x^2-12x+(-x)(3-x)=4x^2-12x+x^2-3x=5x^2-15x=$

$=5x(x-3)$

x^2

$$\cancel{\frac{(x+1)^2}{5x^2-15x}\le 0}$$



$b^2=a^2+4a^2-2a\cdot 2a\cdot\cos 2\alpha=5a^2-4a^2\cdot\cos 2\alpha$

$\frac{(9-x^2)^2}{4}+4x^2-2x(9-x^2)=\frac{x(9-x^2)}{2}$

$(9-x^2)^2+16x^2-8x(9-x^2)=2x(9-x^2)$

$3a+5a^2-4a^2\cdot\cos 2\alpha=300$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)