



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром  $O$  касается прямых  $AB$  и  $BC$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно. Высота  $CH$  треугольника  $ABC$  пересекает эту окружность в точках  $S$  и  $D$ . Найдите отношение  $AB : CH$ , если площадь треугольника  $ABD$  равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $DE \perp AB$ . Найдите отношение  $AD : AC$  и площадь треугольника  $AED$ , если известно, что  $AC = \sqrt{29}$ ,  $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$ , а  $\angle CED = 45^\circ$ .
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами  $(x; y)$ , удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = p$  для любого простого числа  $p$ . Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $3 \leq x \leq 19$ ,  $3 \leq y \leq 19$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. расск. числ.  $x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = \frac{x^2 - 2x + 1 + 4 - 4|x-1|}{(x-1)^2} =$   
 $= (x-1)^2 - 4|x-1| + 4 = (|x-1| - 2)^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{при } x \geq 1 & (x-3)^2 \\ \text{при } x < 1 & (1-x-2)^2 = (x+1)^2 \end{cases}$

расск. знамен.

$$4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3| = 4x(x-3) + |x| \cdot |x-3|$$

если  $x \geq 3$ , то  $|x| \cdot |x-3| = x \cdot (x-3)$ .

если  $x \leq 0$ , то  $|x| \cdot |x-3| = -x \cdot (3-x) = x \cdot (x-3)$

||  
 при  $x \geq 3$  или  $x \leq 0$ :  $4x(x-3) + |x| \cdot |x-3| = (4+1)(x \cdot (x-3))$

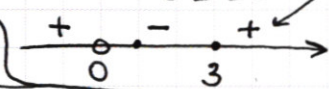
при  $0 < x < 3$   $|x| \cdot |x-3| = x \cdot (3-x) = -x \cdot (x-3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4x(x-3) + |x| \cdot |x-3| = x(x-3)(4-1) = 3 \cdot x \cdot (x-3)$$

Т.О. при  $x \geq 3$ . ~~исходн.~~ исходн. неравенство принимает вид:

$$\frac{(x-3)^2}{5 \cdot x \cdot (x-3)} \leq 0 \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3. \quad \text{Тогда вюр. } \frac{(x-3)^2}{5 \cdot x \cdot (x-3)} = \frac{x-3}{5 \cdot x} \leq 0$$

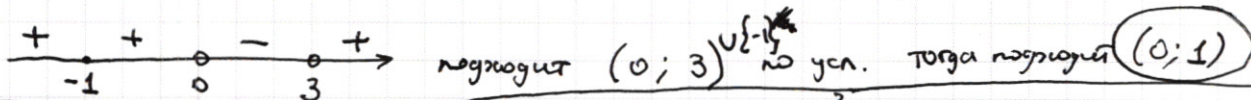
подходит  $(0; 3]$ , по ОДЗ  $(0; 3) \Rightarrow$  реш. нест. по усл.



при  $1 \leq x < 3$   $\frac{(x-3)^2}{3 \cdot x \cdot (x-3)}$ ;  $x \neq 3$  по усл. вюр.  $\Rightarrow \frac{x-3}{3 \cdot x} \leq 0$

$\Rightarrow$  по усл. подходит  $[1; 3)$  аналог. предыдущ.  
подходит  $(0; 3)$

при  $0 < x < 1$  числ. =  $(x+1)^2$   $\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{3 \cdot x \cdot (x-3)} \leq 0$  ОДЗ:  $x \neq 0$   
 знамен. =  $3 \cdot x \cdot (x-3)$   $x \neq 3$



при  $x \leq 0$ : числ. =  $(x+1)^2$   $\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{5 \cdot x \cdot (x-3)} \leq 0$  ОДЗ:  $x \neq 0$   
 знамен. =  $5 \cdot x \cdot (x-3)$   $x \neq 3$

подходит  $\{-1\} \cup (0; 3) \Rightarrow$  по усл. подходит только  $\{-1\}$ .

В итоге подходит  $[1; 3) \cup (0; 1) \cup \{-1\} = [-1; 3)$  ← Ответ:



$$x^2 - 2x + 1 + 4 - 4|x-1| = (x-1)^2 + 4(1-|x-1|)$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \left[ \begin{array}{l} \{x \geq 1 \\ (x-1-2)^2 \\ \{x < 1 \\ (1-x-2)^2 \end{array} \right. \\ & (|x-1|-2)^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & (x-1)^2 - 4|x-1| + 4 = \\ & = (x-1-2)^2 \\ & \quad \text{или} \\ & (1-x-2)^2 \end{aligned}$$

$$4x^2$$

$$4x(x-3) + |x| \cdot |x-3|$$

~~$$4x^2 - 12x + 8x$$~~

$$x(x-3)(4x+1)$$

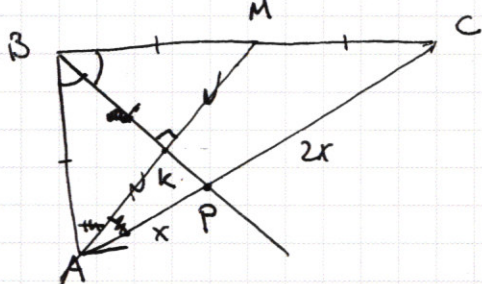
$$x(x-3) = |x| \cdot |x-3|$$

$$\begin{aligned} x &= |x| \\ x-3 &= |x-3| \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \geq 3 \\ \{x \leq 0 \\ x \leq 3 \end{array} \right. \quad \text{при}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. рассмотрим такой  $\Delta$ -к.  $ABC$



$BP$  - бисс.  
 $AM$  - мед.  
 $K = BP \cap AM$ .

В  $\Delta$ -ке  $ABM$   $BK$  - бисс. и  $\angle BKC = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow BM = AB$

т.к.  $BP$  - бисс. то по св-ву бисс.  $\frac{AP}{PC} = \frac{AB}{BC} =$   
 $= \frac{1}{2} \Rightarrow AP = x; PC = 2x$

обозначим  $AB = y$ , тогда  $BC = 2y$ .

тогда  $P_{ABC} = (AB) + (BC) + (AC) = x + 2x + y + 2y =$

$= 3(x+y) \Rightarrow$  по усл. должно быть, что

$x+y = 100$ , и  $x, y \in \mathbb{N}$ .

$x$  может принимать значения только  
до 49, т.к.  $3x$  - одна сторона, остальные  
 $2x$  это  $3y \Rightarrow$  если  $3x > 3y$ , то не вып.  
неравенство  $\Delta$ -ка.

$$\begin{cases} 2y < y + 3x \\ 3x < 3y \\ y < 2y + 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > y \\ x < y \end{cases}$$

$$x \leq 49$$

$$x < y < 3x$$

вып. при  $x \leq 49$  вып. при  $x \geq 26$   
т.к. при  $x = 25$   
 $y = 75; 3x = 75$

$$\Downarrow$$

$$y = 3x$$

а по усл.  $3x > y$ .

$$\text{т.о. } 49 \geq x \geq 26$$

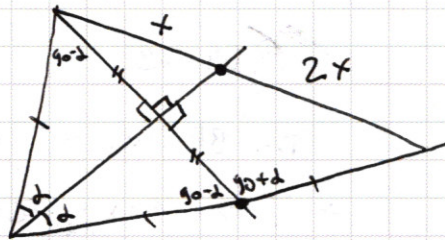
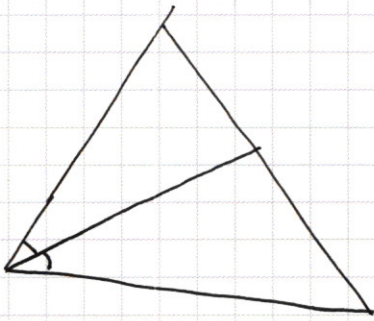
$\Downarrow$

поэтому т.к. кандрону  $x$  सबसे в соотв.

$\{ \rightarrow y$  по всего кол-во решений - кандр  
значения  $x$ .  $49 - 26 + 1 = 50 - 26 = 24$ .

Ответ: 24.





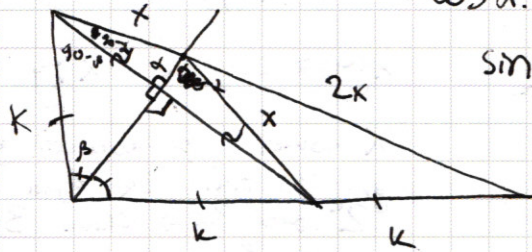
$$\cos(\pi - \alpha)$$

$$-\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\frac{k}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin \beta}$$

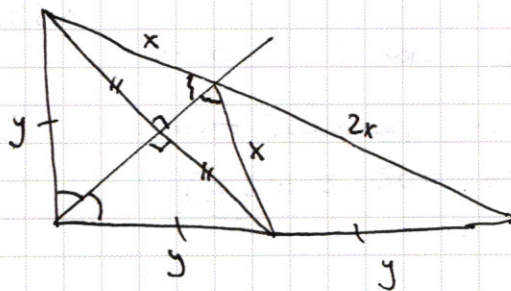
$$\frac{2k}{\sin \alpha} =$$



одна сторона в 2 р. больше другой  
3<sup>ья</sup> сторона делится на 3.

$$x + y = 100$$

76 24  
76 72  
75





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} & (1) \\ 2y + x^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

Заметим, что т.к.  $\sqrt{xy} > 0$  по определению, то  $y - 2x > 0 \Rightarrow$  можно возвести в квадрат.

$$(y - 2x)^2 = xy$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

рассмотрим ст.ч.  $y$ .

$$D = 25x^2 - 4 \cdot 4x^2 = 25x^2 - 16x^2 = 9x^2 = (3x)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{5x \pm 3x}{2} = x; 4x.$$

подставим в (2).

$$2y + x^2 = 9$$

$$2x + x^2 = 9 \Rightarrow x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 9 = 40$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \sqrt{10} \Rightarrow$$

$$x=y = \begin{matrix} -1 + \sqrt{10} \\ \text{или} \\ -1 - \sqrt{10} \end{matrix}$$

$$2y + x^2 = 9$$

$$2 \cdot 4x + x^2 = 9$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$D = 64 + 4 \cdot 9 = 64 + 36 = 100 = 10^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 10}{2} = 1; -9. \Rightarrow \begin{matrix} x=1 & ; & y=4 \\ x=-9 & & y=-36 \end{matrix}$$

Ответ:  $x=y = -1 \pm \sqrt{10}$ ;  $x=1$  и  $y=4$ ;  $x=-9$  и  $y=-36$



$$y - 2x = \sqrt{xy}$$

$$2y + x^2 = 9$$

$$2y - 4x = 2\sqrt{xy}$$

$$2y + x^2 = 9$$

$$2y + x^2 - 2y - 4x = 9 - 2\sqrt{xy}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 13 - 2\sqrt{xy}$$

$$(x+2)^2 = 13 - 2\sqrt{xy}$$

$$2y = (9 - x^2)$$

$$2y = (3-x)(3+x)$$

$$2y - 2x = 2\sqrt{xy}$$

$$(y - 2x)^2 = y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$y^2 + 4x^2 - 5xy = 0$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

~~Дискриминант~~

$$D = 25x^2 - 4 \cdot 4x^2 = 9x^2 = (3x)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{5x \pm 3x}{2} = x; 4x.$$

$$2y + x^2 = 9$$

$$2x + x^2 = 9$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 9 = 40$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2}$$

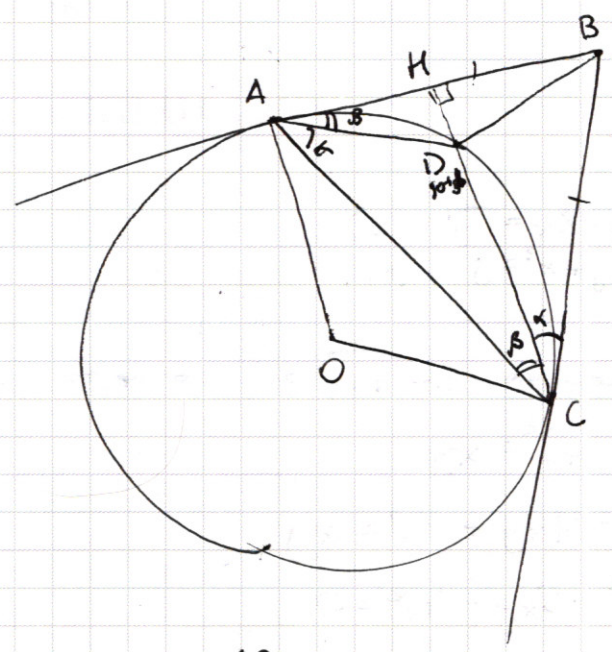
$$\frac{4}{4} + \frac{25}{4} = \frac{x^2}{4}$$

$$29 = x^2$$

$$x = \sqrt{29}$$

$$29 + \frac{25 \cdot 29}{4} = \frac{25}{4} x^2 + x^2$$

$$29 + \frac{25 \cdot 29}{4} = \frac{25 + 4}{4} x^2 \Rightarrow \frac{29 + 25 \cdot 29}{1 + \frac{25}{4}} = \frac{29}{4} x^2$$



AB=BC

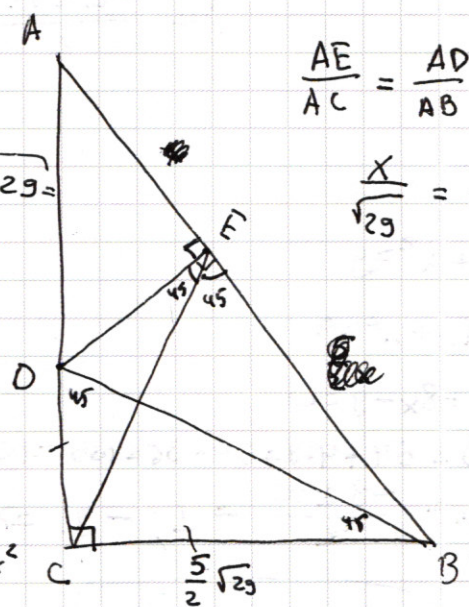
$$S_{\text{тре}} = \frac{DH \cdot AB}{2} = 15$$

$$DH \cdot AB = 30$$

$$\alpha + 2\beta = 90$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(p) = p$$

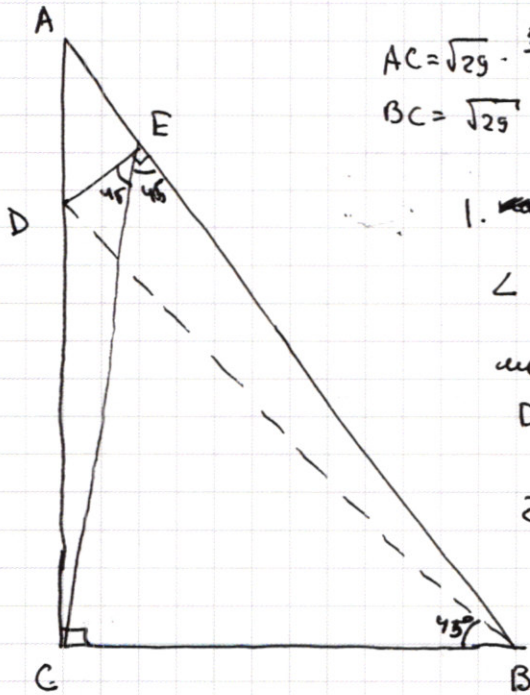


$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\frac{x}{\sqrt{29}} = \frac{AD}{3.5x}$$



5.



$$AC = \sqrt{29} \cdot \frac{5}{2}$$

$$BC = \sqrt{29}$$

1. ~~рассм.~~ рассм. DEBC - четырехугольник;  $\angle DEB = 90^\circ =$

$\angle DCB \Rightarrow$  по свойству вписанного четырехугольника

мы можем описать  $\omega$ -окружность DEBC.

2. проведем BD: тогда  $\angle DBC$  и  $\angle DEC$

опр. на  $\omega$   $\Rightarrow$  опр.  $\omega$ -ти  $\Rightarrow$   $\angle DEC = \angle DBC = 45^\circ$

$$\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 45^\circ$$

3. рассм  $\triangle$ -ки DBC -  $\text{пр/г}$ :

$\angle DBC = 45^\circ \Rightarrow$  он  $\text{пр/г} \Rightarrow DC = CB =$

$$= \sqrt{29} \Rightarrow \text{т.к. } AC = CD + AD, \text{ то}$$

$$AD = AC - CD = \frac{5}{2}\sqrt{29} - \sqrt{29} = \frac{3}{2}\sqrt{29} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{3 \cdot \sqrt{29}}{2} : \frac{5 \cdot \sqrt{29}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{29}}{2} \cdot \frac{2}{5 \cdot \sqrt{29}} =$$

$$= \frac{3}{5}$$

применим т. Пиф. к  $\triangle$ -ку ABC

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} =$$

$$= \sqrt{29 \cdot \frac{25}{4} + 29} =$$

$$= \sqrt{29 \cdot \frac{29}{4}} = \sqrt{\frac{29^2}{4}} = \frac{29}{2}$$

рассм  $\triangle$ -ки ADE и ~~ABC~~ ABC

они  $\text{пр/г}$  и  $\angle A$  - общий  $\Rightarrow$  подобны

тогда  $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{2,5\sqrt{29}} = \frac{1,5\sqrt{29}}{0,5 \cdot 29} \Rightarrow AE = \frac{1,5 \cdot 2,5 \cdot 29}{0,5 \cdot 29}$

$$= \frac{1,5 \cdot 2,5}{0,5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2}$$

тогда  $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AE \cdot AD}{AB \cdot AC} = \frac{15}{2} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{29}}{2} \cdot \frac{2}{29} \cdot \frac{2}{5 \cdot \sqrt{29}} = \frac{9}{29}$

поэтому  $\triangle$ -ки подобны, так как произведение сторон, заключенные равные углы

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{5}{2} \cdot \sqrt{29} = \frac{29 \cdot 5}{4} \Rightarrow S_{ADE} = \frac{9}{29} \cdot S_{ABC} =$$

$$= \frac{9}{29} \cdot \frac{29 \cdot 5}{4} = \frac{9 \cdot 5}{4} = \frac{45}{4}$$

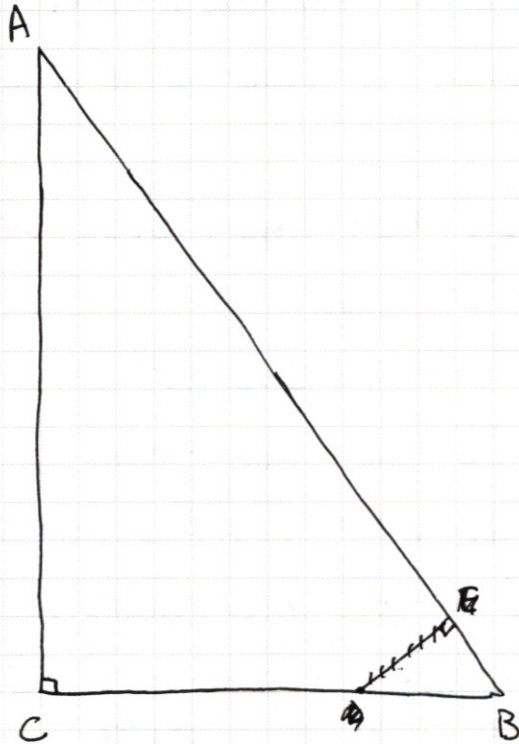


ШИФР
------

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$6. \begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$

рассм. 2<sup>ое</sup> пер-во.

представим его как квадратный тригоном.

$$x^2 - 2x - y(3 - y) \leq 0$$

$$7. \text{ дано, что } f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$\text{т.е. } f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\text{тогда можно сказать, что } f(a) = f(ab) - f\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$\text{если подставить } a = \frac{x}{y}, \text{ то}$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y} \cdot b\right) - f\left(\frac{1}{b}\right), \quad b \in \mathbb{N}.$$

если  $b$  - простое, то необходимо и достаточно, чтобы  
 $f\left(\frac{x}{y} \cdot b\right) < f\left(\frac{1}{b}\right)$ .

$$6. \begin{cases} x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 \\ |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \end{cases}$$

первое можно переписать, как  $x^2 + y^2 \leq 2x + 3y \Rightarrow$  это круг радиуса

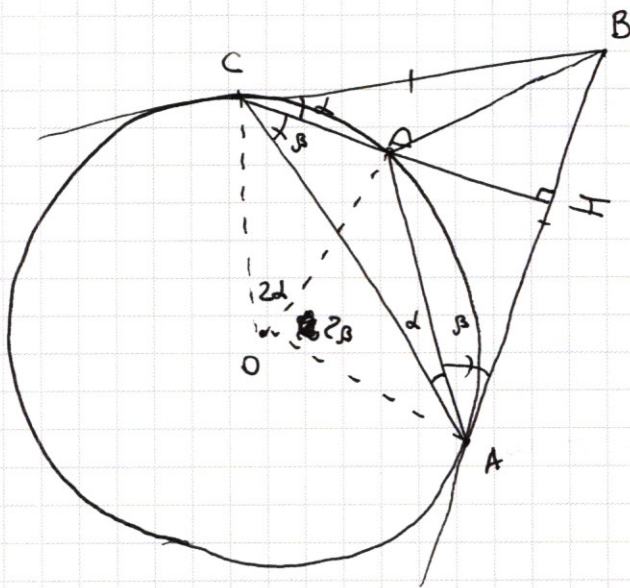
$$R = \sqrt{2x + 3y}$$

$$\text{также т.е. } |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6$$

$$\text{если } 6 > 3x + 2y \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & |3x| + |2y| + 6 - 3x - 2y > 6 \\ & |3x| - 3x + |2y| - 2y > 0 \end{aligned}$$





найти  $\cos \alpha$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DH = 15$$

$$AB \cdot DH = 30.$$

$$\frac{CD}{\sin 2\alpha} = 2R$$

$$2\alpha \cdot \frac{\sqrt{1}}{180} \cdot R$$

$$\frac{CD}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\pi - 180^\circ$$

$$\frac{\pi}{180} \text{ рад} = 1^\circ$$

$$\sin(30+30) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$180 - 2\alpha - 2\alpha = 90 - \alpha - \alpha$$

$$\frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AD} = \frac{AH}{DH}$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(b) = f(ab) - f(a)$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) - 3$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(1) - 3.$$

$$\frac{3}{4}$$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) - f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) - f(x)$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) - f(x)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) - f(x).$$

$$f(x) =$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

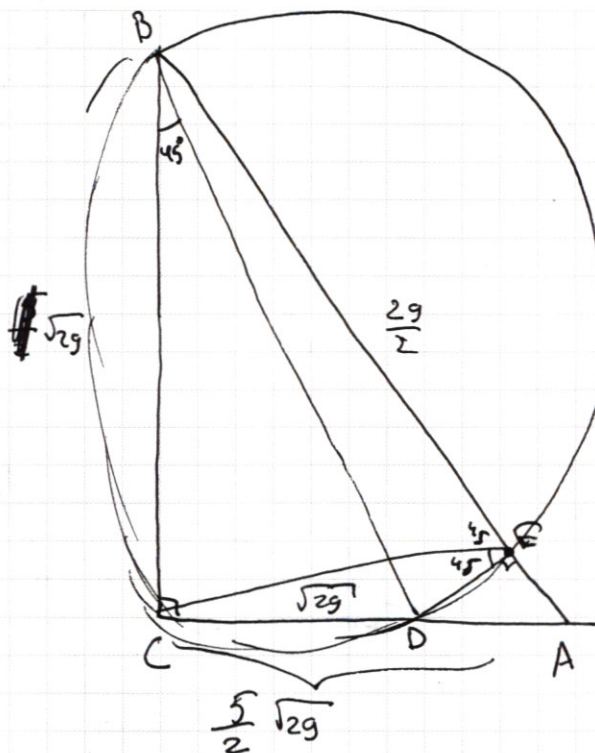
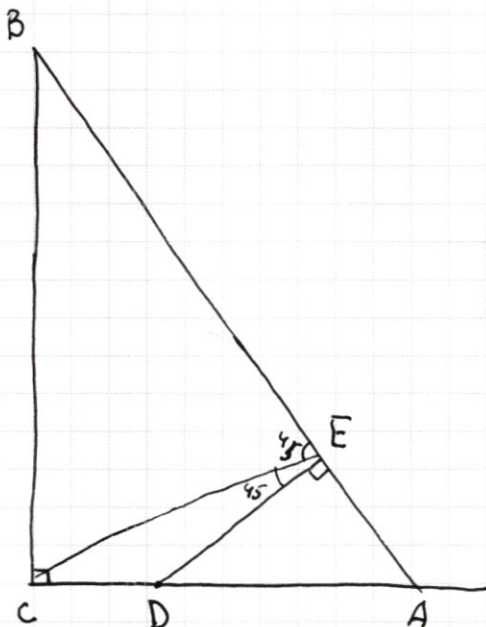
$$f(b) = f(c \cdot d)$$

$$f(b) = f(c) + f(d)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x \cdot z}{y}\right) - f(z)$$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x^2 - 2x - y(3-y) \leq 0$$

не м.б.  $< 0$ . т.к. при  $D < 0$   $AB = \sqrt{29 + \frac{25}{4} \cdot 29} = \sqrt{29 \left( \frac{4}{4} + \frac{25}{4} \right)} =$   
 $= \sqrt{\frac{29^2}{4}} = \frac{29}{2}$   
 Знак = знаку при  $x, y \geq 0$ .

поэтому  $x^2 - 2x - y(3-y) = 0$

$$D = 4 + 4y(3-y)$$

$$x^2 + y^2 \leq 2x + 3y \geq 0$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$4 + 12y - 4y^2 \geq 0$$

$$-4y^2 + 12y + 4 \geq 0$$

$$D = 144 + 4^2 = 144 + 16 = 160$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

если  $x \geq 0$   $x$

$$\frac{AE}{2.5\sqrt{29}} = \frac{1.5\sqrt{29}}{29}$$

если  $x \geq 0$   $y \leq 0$  (1)  $\Rightarrow 2x + 3y \geq 0$   $2x \geq -3y$

$x \geq 0$   $y \geq 0$  (2)

$x \leq 0$   $y \geq 0$  (3)

(1)  $(3x) = 3x$  (2)  $= -2y$   $|6 - 3x - 2y| = 6 - 3x + 2y$

$$2x + 3y \geq 0$$

$$-4y^2 + 12y + 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 4 + 4 = 160$$

$$x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot (y^2 - 3y) = 4 - 4y^2 + 12y = 0$$

$$= 144 + 64 = 208$$

$$6 - 3x + 2y > 6$$

$$2y - 3x > 0$$

$$2x + 3y \geq 0$$

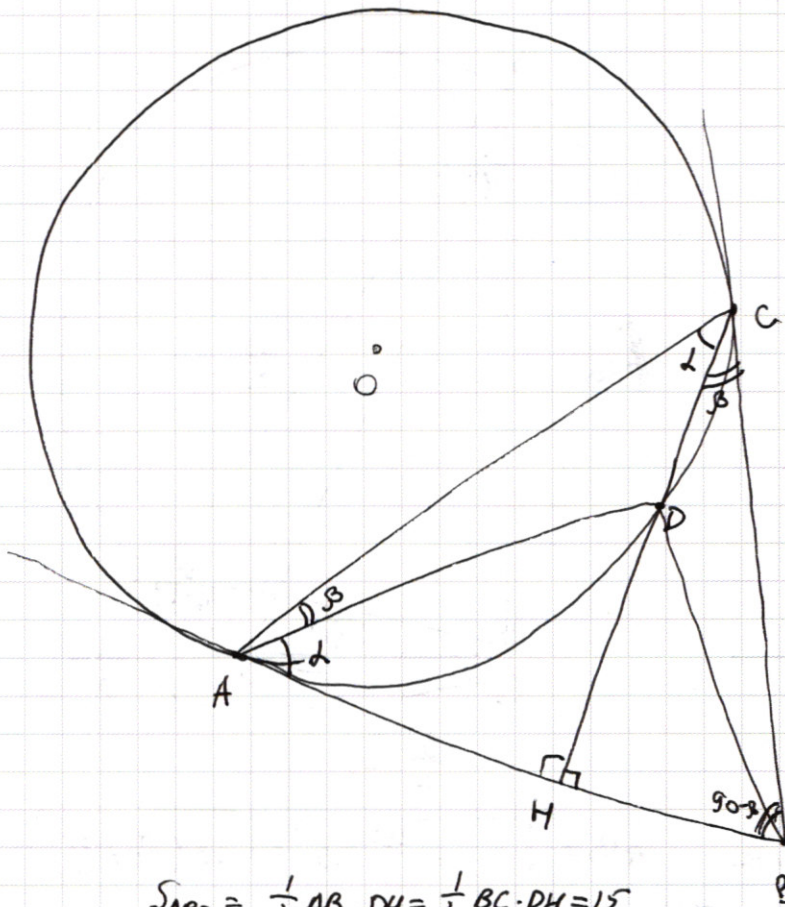
$$2y \geq 3x \text{ при } x=y=0$$

$$3y \geq -2x$$



$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| \geq 6.$$

$$x^2 - 2x - y(3 - y) \leq 0.$$



$$S_{ABO} = \frac{1}{2} AB \cdot DH = \frac{1}{2} BC \cdot DH = 15$$

$$AB \cdot DH = BC \cdot DH = 30.$$

$$AB = BC.$$

$$\alpha + \beta + \alpha + \beta + 90 - \beta = 180$$

$$2\alpha + \beta = 90$$

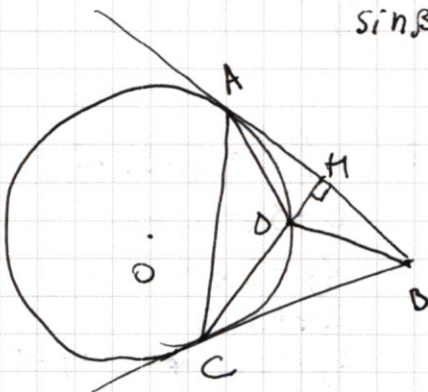
$$\frac{CD}{\sin \beta} = 2R = 12.$$

$$\frac{CD}{BH} \cdot AB = 12$$

$$\sin \beta = \frac{BH}{BC} = \frac{BH}{AB}$$

$$\frac{AD}{\sin \alpha} = 12 = \frac{AD}{DH} \cdot AD$$

$$\frac{CD}{BH} \cdot AB = \frac{AD^2}{DH}$$



$$f\left(\frac{x}{y}\right) < f(\beta)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) < f(\beta) + f\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$f(1) < f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{y}{x}\right) > 1$$