МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $\dfrac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leq 0$ $\qquad x^2-2x+5=0$

$D_1 = 1^2-5<0$

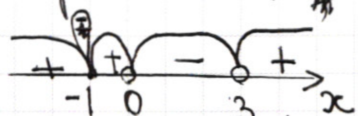
$4x^2-12x = 4x(x-3)$

Пусть $\underline{x<0}$, тогда $|x|=-x$, $|x-1|=-x+1$, $|x-3|=-x+3$

$$\frac{x^2-2x+5+4(x-1)}{4x^2-12x+(-x)\cdot(-x+3)} = \frac{x^2+2x+1}{4x(x-3)+x(x-3)} = \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)}$$

$\forall$ ф-цию $y=\dfrac{(x+1)^2}{5x(x-3)}$ $\qquad D(y)=(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$

$y=0$ при $x=-1$



~~$y \geq 0$ при $x \in (-\infty;0)\cup(3;+\infty)$,~~

~~но $x<0$, зн., $x\in(-\infty;0)$~~

$y \leq 0$ при $x \in \{-1\}\cup(0;3)$, но $x<0$, зн., при $\underline{x=-1}$

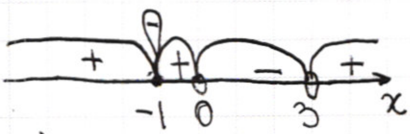
Пусть $\underline{0 \leq x < 1}$, тогда $|x|=x$, $|x-1|=1-x$, $|x-3|=3-x$

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x||x-3|} = \frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x+x\cdot(-x+3)} = \frac{x^2+2x+1}{4x(x-3)-x(x-3)} =$$

$$= \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)}$$

$\forall$ ф-цию $y=\dfrac{(x+1)^2}{3x(x-3)}$ $\qquad D(y)=(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$

$y=0$ при $x=-1$



$y\leq 0$ при $x\in\{-1\}\cup(0;3)$, но

$x\in[0;1)$, зн., $\underline{x\in[0;1)}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

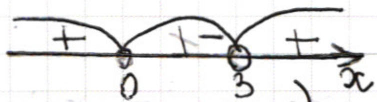
Пусть $1 \le x < 3$. Тогда $|x| = x$, $|x-1| = x-1$, $|x-3| = -x+3$

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} = \frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x(x-3)-x(x-3)} = \frac{x^2-6x+9}{3x(x-3)} = \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)}$$

∢ ф-цию $y = \dfrac{(x-3)^2}{3x(x-3)}$

$D(y) = \cancel{\mathbb{R}}\ (-\infty; 0) \cup (0;3) \cup (3;+\infty)$

$y = 0$ при $x = 3$, но $3 \notin D(y)$. Тогда $y \neq 0$ при любых x. ~~ни при каких~~ x.



$y \le 0$ при $x \in (0;3)$, но $x \in [1;3)$, зн., $\underline{x \in [1;3)}$

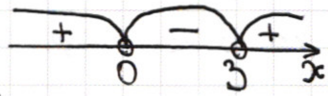
Пусть $x \ge 3$. Тогда $|x| = x$, $|x-1| = x-1$, $|x-3| = x-3$

$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)} = \frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x(x-3)+x(x-3)} = \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)}$$

∢ ф-цию $y = \dfrac{(x-3)^2}{5x(x-3)}$

$D(y) = (-\infty;0) \cup (0;3) \cup (3;+\infty)$

$y = 0$ при $x = 3$, но $3 \notin D(y)$. Тогда $y \neq 0$ при любых x.



$y \le 0$ при $x \in (0;3)$, но $x \ge 3$,

зн., $\underline{x \in \varnothing}$

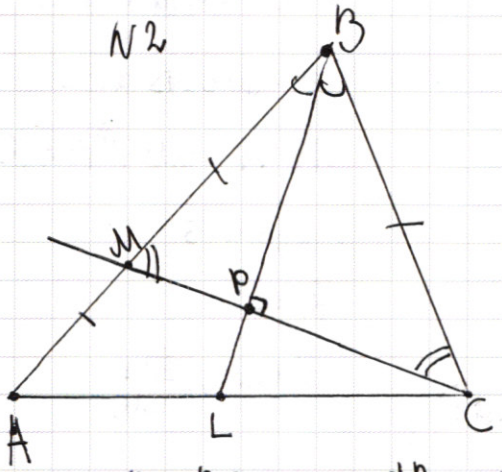
Множество решений неравенства — объединение получ. реш.

$x \in \{-1\} \cup [0;1) \cup [1;3)$

Ответ: $\{-1\} \cup [0;3)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2



~~Если~~ Пусть в $\triangle ABC$ медиана CM перпендикулярна биссектрисе BL

$CM \cap BL = P$

Тогда BP – бисс. $\triangle MBC$, т.к. $\angle MBP = \angle CBP$

BP – выс. $\triangle MBC$, т.к. $BP \perp MC$. Значит, $\triangle MBC$ – равнобедр. с осн. MC, тогда $MB = BC$, но $AB = 2MB$, зн., $AB = 2BC$.

По Т о неравенстве треугольника $\begin{cases} AB < BC + AC \\ AC < AB + BC \end{cases}$

(нер-во $BC < AB + AC$ очевидно, т.к. $BC < AB$)

$\begin{cases} 2BC < BC + AC \\ AC < 2BC + BC \end{cases}$ $\begin{cases} BC < AC \\ AC < 3BC \end{cases}$, т.е. $BC < AC < 3BC$ (*)

$P = AB + BC + AC = 2BC + BC + AC = 3BC + AC$

$3BC + AC = 300$

$AC = 300 - 3BC$ (**)

Учитывая нерав-во (*), получим $BC < 300 - BC < 3BC$

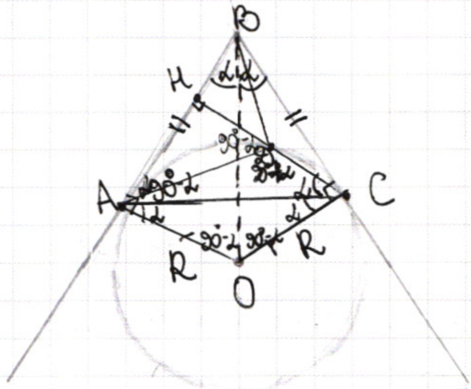
$\begin{cases} BC < 300 - BC \\ 300 - BC < 3BC \end{cases}$ $\begin{cases} 2BC < 300 \\ 300 < 4BC \end{cases}$ $\begin{cases} BC < 150 \\ BC > 75 \end{cases}$ $75 < BC < 150$

AC однозначно выражается через BC, ~~но~~ а $BC \in [76; 149]$, поэтому

$149 - 76 + 1 = 74$

Ответ: 74

N 4



Дано: ~~ΔAH~~ Окр.$(O;R)$

BA и BC - касат-ые к Окр.$(O;R)$

A и C - точки кас.

CH - выс. ΔABC

$CH \cap$ Окр.$(O;R) = D, C$

$S_{ABD} = 15$

$R = 6$

Найти: $\frac{AB}{CH}$

Решение:

1. $\measuredangle$ ΔABD, DH - высота ($D \in CH$, а $CH \perp AB$), AB - основание, зн., $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} DH \cdot AB$, т.е. $DH \cdot AB = 30$.

2. Пусть $\angle CAO = \alpha$. Тогда $AC = 2R\cos\alpha$.

3. Т.к. $\angle CAO = \alpha$, то $\angle BAC = 90^\circ - \alpha$. Тогда $AC = 2AB \cdot \cos(90^\circ - \alpha) =$
$= 2AB \cdot \sin\alpha$ ($AB = BC$ как отрезки касательных к окр-ти).

$$2AB\sin\alpha = 2R\cos\alpha$$

$$AB \cdot \sin\alpha = R\cos\alpha$$

$$R = AB \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad AB = R\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 6 \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$$

$DH \cdot AB = DH \cdot 6 \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$

$\angle AOC = \cup$ ~~AC~~ ADC (как центр. угол, опир. на $\cup AOC$).

$\angle ADC = \frac{1}{2} \cup AC$ (как впис. угол, опир. на $\cup AC$) $= \frac{1}{2}(360^\circ - \cup ADC) =$
$= 180^\circ - \frac{\angle ADC}{2} = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \alpha$

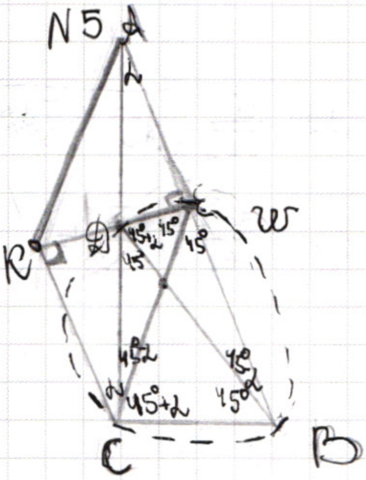
$\angle HDA = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$. Т.к. ΔAHD - прямоуг., то $\angle HAD = \alpha$, т.о. $HD = AH \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$

$DH \cdot AB = DH \cdot R \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = \cancel{DH}\, AH \cdot R \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = AH \cdot R$

$\measuredangle$ ΔAHC - прямоуг.: $AH = AC \cdot \sin\alpha = 2R \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5



Дано: $\triangle ABC$ – п/у ($\angle C = 90^\circ$)

$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$BC = \sqrt{29}$

$\angle CED = 45^\circ$

$DE \perp AB$

Найти: $\frac{AD}{AC}$, $S_{\triangle AED}$

Решение:

$\triangle AED \sim \triangle ACB$ (по 2 углам), т.к. $\angle A$ – общий, $\angle E = \angle C = 90^\circ$.

Следовательно, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB}$, т.е. $\frac{AE}{DE} = \frac{AC}{CB} = \frac{\frac{5\sqrt{29}}{2}}{\sqrt{29}} = \frac{5}{2}$

$\operatorname{tg}\angle A = \frac{5}{2}$.

$\sin\angle A \cdot \cos\angle A = \frac{5}{2}$

$\sin\angle A \cdot \sqrt{1-\sin^2\angle A} = \frac{5}{2}$

$\sin^2\angle A(1-\sin^2\angle A) = \frac{25}{4}$

$\sin^2\angle A - \sin^4\angle A = \frac{25}{4}$

$\sin^4\angle A - \sin^2\angle A + \frac{25}{4} = 0$

$D = 1 - 4\cdot\frac{25}{4} = 1 - 25 = -24$

$\frac{\sin\angle A}{\cos\angle A} = \frac{5}{2}$

$\frac{\sin\angle A}{\sqrt{1-\sin^2\angle A}} = \frac{5}{2}$

$2\sin\angle A = 5\sqrt{1-\sin^2\angle A}$

$4\sin^2\angle A = 25 - 25\sin^2\angle A$

$29\sin^2\angle A = 25$

$\sin\angle A = \frac{5}{\sqrt{29}}$

Пусть $\angle A = \alpha$. Тогда $\angle ACE = 180^\circ - 135^\circ - \alpha = 45^\circ - \alpha$

Т.к. $\angle DEB = 90^\circ$ и $\angle DCB = 90^\circ$, то чет-к $CDEB$ – впис., причём DB – диаметр окружности ω

По Т Пифагора $AD^2 = AE^2 + DE^2$, причём $DE = AD\cdot\sin\alpha = AD\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}$

По Т синусов $\frac{DE}{\sin(45^\circ-\alpha)} = \frac{CD}{\sin 45^\circ}$ $\quad CD = DE\cdot\frac{\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ-\alpha)} = AD\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}\cdot\frac{\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ-\alpha)}$

$$= AD \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin(45^\circ-\alpha)} = \cancel{\frac{AD}{D}}$$

$$\sin(45^\circ-\alpha) = \sin\alpha \cdot \sin 45^\circ$$

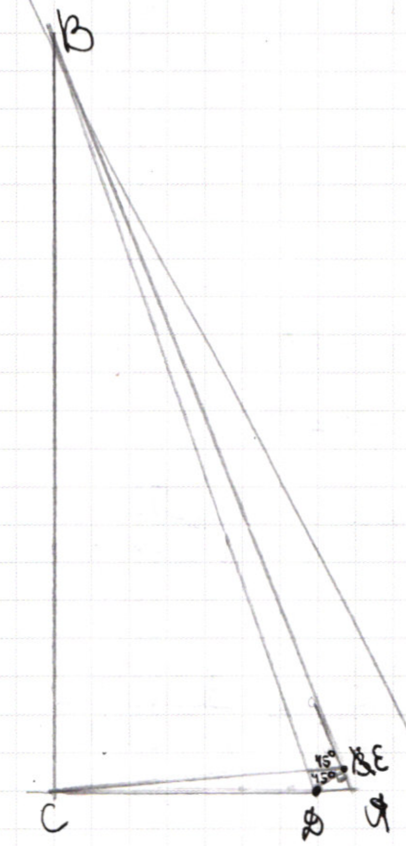
$AD = CD$, значит, $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$

$$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AD^2 - DE^2} \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \sqrt{AD^2 - \frac{25}{29}AD^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AD^2 \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = AD^2 \cdot \frac{5}{29} = \frac{1}{4}AC^2 \cdot \frac{5}{29} = \frac{1}{4} \cdot \frac{25 \cdot \cancel{29}}{\cancel{4}} \cdot \frac{5}{\cancel{29}} =$$

$$= \frac{125}{16}$$

N5



Дано: $\triangle ABC$ – прямоуг.

$\angle C = 90°$

$\cancel{\angle BE}\ \angle CED = 45°$

$DE \perp AB$

$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

Найти: $\frac{AD}{DC}$; $S_{\triangle AED}$

Решение:

Т.к. $\angle DEA$ и $\angle BED$ – смеж., то

$\angle BED = 180° - \angle DEA = 90°$

$\angle BEC = 90° - \angle CED = 45°$

Т.к. $AC = \sqrt{29}$ и $BC = \frac{5}{2}\sqrt{29}$, то $tg\angle A = 5$.

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{29 + \frac{25}{4} \cdot 29} = \sqrt{29 \cdot 3\frac{2}{4}} = \cancel{\sqrt{29 \cdot \frac{2}{4}} = \frac{3\sqrt{29}}{2}}$

$= \sqrt{29 \cdot \frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{29 \cdot 11}}{2}$

$CD = AD$

$$\frac{\frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin(45° - \angle)} = 1$$

$\sin(45° - \angle = \frac{5}{\sqrt{29}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$DH \cdot AB = AH \cdot R = 2R^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha$

$2R^2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 30$

$R^2 \sin\alpha \cos\alpha = 15$

$\sin\alpha \cos\alpha = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

$CH = AC \cdot \cos\alpha = 2R^2 \cdot \cos^2\alpha$

$\frac{AB}{CH} = \frac{\cancel{2}R \cdot ctg\alpha}{2R \cdot \cos^2\alpha} = \frac{ctg\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{2\cos^2\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} =$

$= \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{12}} = \frac{12}{2 \cdot 5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

Ответ: $1{,}2$ или $\frac{6}{5}$

N3

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \ (1) \\ 2y + x^2 = 9 \ (2) \end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases} xy \geq 0 \\ 9 - 2y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} xy \geq 0 \\ 2y \leq 9 \end{cases}$ $\begin{cases} xy \geq 0 \\ y \leq 4{,}5 \end{cases}$

Выразим из (2) y: $y = \frac{9 - x^2}{2}$

$y - 2x \geq 0$

$y \geq 2x$

$x \leq \frac{y}{2}$

$\frac{9 - x^2}{2} - 2x = \sqrt{x \cdot \frac{9 - x^2}{2}}$

$9 - x^2 - 4x = 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot (3 - x)(3 + x)}$

$-x^2 - 4x + 9 = \sqrt{4 \frac{x}{2} (3 - x)(3 + x)}$

$-x^2 - 4x + 9 = \sqrt{2x(3 - x)(3 + x)}$

$9 - x^2 - 4x = \sqrt{2x(9 - x)^2}$

$\cancel{(x^2 + 4x - 9)^2 = 2x(9 - x)^2}$

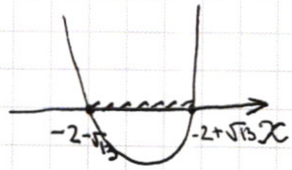
$x^2 + 4x - 9 = 0$

$D_1 = 2^2 + 9 = 13$

$-x^2 - 4x + 9 \geq 0$ или

$\cancel{x = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{1}}$ $x^2 + 4x - 9 \leq 0$

$x = -2 \pm \sqrt{13}$



$x \in [-2 - \sqrt{13}; -2 + \sqrt{13}]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \qquad y-2x-\sqrt{xy}=0 \qquad 2y+x^2=9$$

$9-2y\geq 0$

$2y\leq 9$

$y\leq 4{,}5$

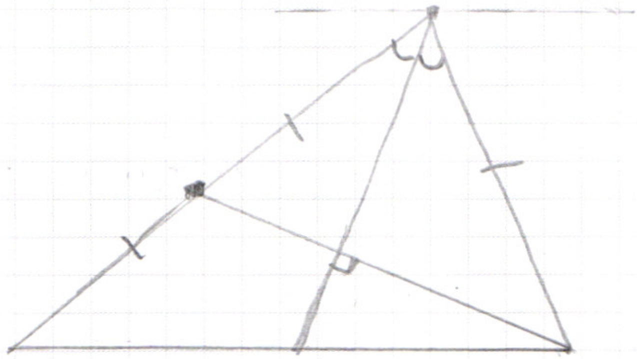
$x^2=9-2y$

$x=\sqrt{9-2y}$

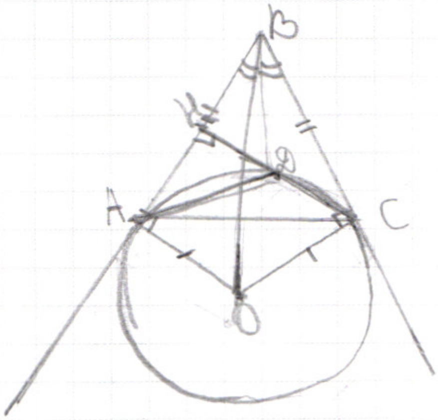
$y-2\cdot\sqrt{9-2y}=\sqrt{\sqrt{9-2y}\cdot y}=\sqrt{\sqrt{(9-2y)y^2}}=\sqrt[4]{(9-2y)y^2}$

$xy\geq 0$

$y-2\sqrt{xy}+x=(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2 \qquad y-2x-\sqrt{xy}=y-2\sqrt{xy}+x+\sqrt{xy}-3x$



$$\begin{array}{r} 300 \,|\, 4 \\ \underline{28} \quad 75 \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 149 \\ -\ 76 \\ \hline 73 \end{array}$$

$y=\frac{9-x^2}{2}$

$y-2x=\sqrt{xy}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)