МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 9 КЛАСС. Вариант 14

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $3^{14}7^{13}$, $bc$ делится на $3^{19}7^{17}$, $ac$ делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на $m$?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, диаметр $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям $\omega$ и $\Omega$.

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа $x$, $y$, $z$ удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\dfrac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта $A$ в пункт $B$ выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт $B$ на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от $A$ к $B$, а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в $B$ на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между $A$ и $B$.

7. [6 баллов] Вписанная окружность $\omega$ прямоугольного треугольника $ABC$ с прямым углом $B$ касается его сторон $CA$, $AB$, $BC$ в точках $D$, $E$, $F$ соответственно. Луч $ED$ пересекает прямую, перпендикулярную $BC$, проходящую через вершину $C$, в точке $Y$; $X$ – вторая точка пересечения прямой $FY$ с окружностью $\omega$. Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

1) Пусть степени вхождения 3 и 7 в числа $a, b$ и $c$ — $a_3, b_3, c_3$ и $a_7, b_7$ и $c_7$, соответственно. =>

из условия:
$$\begin{cases} a_3+b_3 \geq 14 & (1) \\ a_7+b_7 \geq 13 & (2) \\ b_3+c_3 \geq 19 & (3) \\ b_7+c_7 \geq 17 & (4) \\ a_3+c_3 \geq 23 & (5) \\ a_7+c_7 \geq 42 & (6) \end{cases}$$

Тогда $(abc)_{min} \geq 3^{(a_3+b_3+c_3)} \cdot 7^{(a_7+b_7+c_7)}$.

2.) $((1)+(3)+(5))\,|:2$

$2\cdot(a_3+b_3+c_3) \geq 56$

$a_3+b_3+c_3 \geq 28$

пример:
$a_3 = 9$
$b_3 = 5$
$c_3 = 14$

3.) $((2)+(4)+(6))\,|:2$

$2(a_7+b_7+c_7) \geq 72$

$a_7+b_7+c_7 \geq 36$

пример
$a_7 = 21$
$b_7 = 0$
$c_7 = 21$

но $a_7+c_7 \geq 42$, а $a_3, b_3, c_3, a_7, b_7, c_7 \geq 0$ (числа натуральные) =>

=> $a_7+b_7+c_7 \geq 42$. пример: $a_7 = c_7 = 21, b_7 = 0$

4.) $(abc)_{min} = 3^{(a_3+b_3+c_3)_{min}} \cdot 7^{(a_7+b_7+c_7)_{min}} =$

$= 3^{28} \cdot 7^{42}$ (достигается при $a = 3^9 \cdot 7^{21}$

$b = 3^5 \cdot 7^0$

$c = 3^{14} \cdot 7^{21}$.

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | x | x | x | x | x | x |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2.)

$$\begin{cases} \frac{L}{v_m} - \frac{L}{v_б} = -1 \\ \frac{L}{v_m+7} - \frac{L}{v_б+7} = -0{,}6 \end{cases}$$

$\frac{84}{28} = 3 - 4$

$\frac{21 \cdot 94{,}5}{27}$

$3{,}5 \cdot 21 + 49$

$27 \cdot 4{,}5$

$$\frac{\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_б}}{} = \frac{5}{3}$$

$\frac{84}{35} - \frac{84}{38} - \frac{1}{v_б+7}$

$21 \cdot 3 + 49$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 3{,}5 \\ \hline 105 \\ +63 \\ \hline 73{,}5 \end{array}$$

$$2{,}4 - 3 = \frac{\frac{v_б - v_m}{v_m v_б}}{\frac{v_б - v_m}{(v_m+7)(v_б+7)}} = \frac{(v_m+7)(v_б+7)}{v_m v_б} = \frac{5}{3}$$

$\frac{12}{5} = 2{,}4$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 4{,}5 \\ \hline 135 \\ +108 \\ \hline 121{,}5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 73{,}5 \\ +49 \\ \hline 122{,}5 \end{array}$$

$3 \cdot 21 + 49$

$$\begin{array}{r} 63 \\ +49 \\ \hline 112 \end{array}$$

$28 \quad 21$

$40 \cdot 28$

$5 v_m v_б = 3 v_m v_б + 21 v_m + 21 v_б + 147$

$2 v_m v_б = 21 v_m + 21 v_б + 147$

$\frac{84}{242} =$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 4{,}5 \\ \hline 27 \\ 315 \\ +98 \\ \hline 1215 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 4 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ \times 21 \\ \hline 35 \\ +70 \\ \hline 73{,}5 \\ +49 \\ \hline 122{,}5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 3 \\ \hline 74 \end{array}$$

$v_m = 49 - v_б$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

$\frac{a}{b}$ - несократимая $\Rightarrow (a, b) = 1$.

$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ сократим на $m \Rightarrow$ $a+b \vdots m$

$a^2-9ab+b^2 \vdots m$.

1.) Пусть $a \underset{m}{\equiv} r_1$ ; $b \underset{m}{\equiv} r_2$ ($r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, иначе $(a, b) \neq 1$, т.к $a+b \vdots m$ и если, бсо, $r_1 = 0$, то и $r_2 = 0 \Rightarrow (a, b) \neq 0$!!!)

а.) $a+b \vdots m \Rightarrow$ $r_1 + r_2 \underset{m}{\equiv} 0$

б.) $a^2-9ab+b^2 \vdots m \Rightarrow$ $r_1^2 - 9r_1r_2 + r_2^2 \underset{m}{\equiv} 0$.

$(r_1+r_2)^2 - 11r_1r_2 \underset{m}{\equiv} 0$.

$-11r_1r_2 \underset{m}{\equiv} 0$

($(r_1+r_2)^2 \vdots m$ из п.а).

в.) $r_1 + r_2 \underset{m}{\equiv} 0$. $\mid \cdot r_1$ $(r_1 \neq 0)$

$r_1^2 + r_1r_2 \underset{m}{\equiv} 0$.

$r_1r_2 \underset{m}{\equiv} -r_1^2 \Rightarrow$ $11r_1^2 \underset{m}{\equiv} 0$.

$r_1 \neq 0 \Rightarrow 11 \underset{m}{\equiv} 0$.

~~11~~ $11 \vdots m$.

$\Downarrow$

$11 \geq m$

г.) при $a = 1$; $b = 10$ дробь $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{11}{11}$.

сократима на 11 $\Rightarrow$ $m_{max} = 11$.

Ответ: $m = 11$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 3

Пусть $\begin{cases} 3x^2+5x+1=A \\ 5-6x=B \end{cases}$ $(A+B=3x^2-5x+6)$

$\Downarrow$

$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x$

$\Downarrow$

$\sqrt{A+B}-\sqrt{A}=B$ (возведем в квадрат обе части ур-я)

$(A$ и $A+B\geq 0)$

$A+B+A-2\sqrt{(A+B)A}=B^2$

$(2A+B-B^2)=2\sqrt{(A+B)A}$

$4A^2+2AB-2AB^2+2AB-2AB^2+B^2-B^3-B^3+B^4=4A^2+4AB$ (снова возведем в кв-т)

$B^4-2B^3+B^2-4AB^2=0$

$B^2(B^2-2B+1-4A)=0$

$\Downarrow$

1.) $B^2=0 \Rightarrow B=0$

$5-6x=0$

$6x=5$

$x=\frac{5}{6}$

$B=0;\ A>0$, т.к. $x>0$

$\Downarrow$

ур. усл.

2.) $B^2-2B+1-4A=0$.

$(5-6x)^2-2(5-6x)+1=4(3x^2+x+1)$

$36x^2+25-60x-10+12x+1=12x^2+4x+4$

$24x^2-52x+12=0$

$12x^2-26x+6=0 \Rightarrow$

$(B-1)^2-4A=0$.

$36x^2-48x+16=12x^2+4x+4$.

$24x^2-52x+12=0$.

$12x^2-26x+6=0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 3 (продолжение)

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 12 \cdot 6}}{24} = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 288}}{24} =$$

$$= \frac{26 \pm \sqrt{676 - 288}}{24} = \frac{26 \pm \sqrt{388}}{24} =$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$$

а.) $x = \frac{13 + \sqrt{97}}{2}$

$12 > x > 11$

$\Downarrow$

$A > 0$, т.к $x > 0$.

$A + B = 3x^2 - 5x + 6 =$

$= x(3x - 5) + 6 > 0$,

т.к $x$ и $3x - 5 > 0$.

$\Downarrow$

Ур. уст.

б.) $x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$.

$\frac{2}{6} > x > \frac{1}{6}$

$\Downarrow$

$A > 0$, т.к $x > 0$

$A + B = 3x^2 - 5x + 6 = x(3x - 5) + 6 > 0$

т.к $x(3x - 5) > -2{,}5$

(подставив пределы по модулю

$\frac{2}{6}\left(\frac{3}{6} - 5\right)$.)

$\Downarrow$

Ур. уст.

Ответ: $x = \frac{5}{6}$, $x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ |

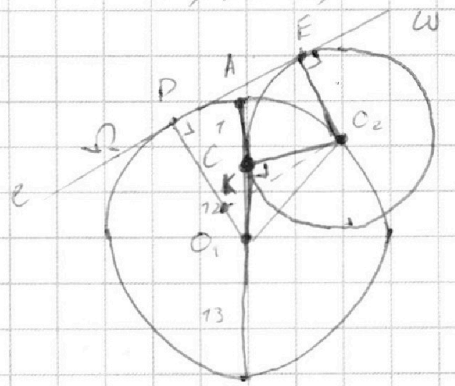
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

$AB = AC + BC = 26 \Rightarrow R_1 = 13.$

$O_1B = 13;\ AC = 1,\ CO_1 = 12$




$O_1$ и $O_2$ – центры ок-тей $\Omega$ и $\omega$. $R_1$ и $R_2$ – их радиусы.

1.) $\omega \cap \Omega = C \Rightarrow O_2C \perp AC$.

Запишем т. П-ра для $\triangle CO_2O_1$:

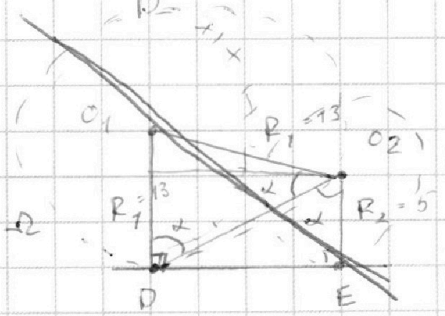
$R_1^2 = 12^2 + R_2^2$.

$R_2 = \sqrt{R_1^2 - 12^2} = 5$.

2.) пусть касательная – $\ell$.

$\ell \cap \Omega = D$

$\ell \cap \omega = E$, $O_1D \perp \ell$, $O_2E \perp \ell$.




3.) $\angle O_1DO_2 = \angle O_1O_2D$, т.к. $O_1O_2 = O_1D = R_1$.

$O_1D \parallel O_2E \Rightarrow \angle DO_2E = \alpha$

~~4.) a.) $DO_2 = \frac{5}{\cos\alpha}$, для $\triangle O_2ED$~~

~~б.) $DO_2^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2$.~~

3.) Отметим на $O_1D$ такую точку $K$, что $DK = O_2E = 5$.

$\Rightarrow O_1K = 13 - 5 = 8$. $O_2K \parallel DE$, так как $KO_2ED$ – прямоугольник $\Rightarrow DE = O_2K$, $O_2K = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$.

Ответ: $\sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 5

1.) $5x - y = 3z$

$5x = 3z + y \Rightarrow$ а.) $25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz$

б.) $x = \frac{3z+y}{5}$

2.) $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad | \cdot \cancel{ab}\ xyz$

$\frac{8yz}{15y - z} = x = \frac{3z+y}{5}$

$40yz = 45yz - 3z^2 + 15y^2 - yz$

$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$

$z_1 = 3y$

$z_2 = -\frac{5}{3y}$

Дробь из усл-я: $A = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2}$

1.) $z = 3y \Rightarrow A_1 = \frac{8 \cdot 9y^2 + 18y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} = \frac{45}{14}$

2.) $z = -\frac{5}{3y} \Rightarrow A_2 = \frac{55}{42}$.

$A_2 < A_1$, $A_2$ достигается при

$y = 3$; $z = -5$; $x = -2,4$

Ответ: $\frac{55}{42}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6

Пусть $AB = L$, скорости велосипедиста и мотоциклиста — $v_в$ и $v_м$, соответственно. ( в [км], [$\frac{км}{ч}$])

Запишем уравнения из условия:

$$\begin{cases} 1.)\ \dfrac{L}{v_м} + 1 = \dfrac{L}{v_в} \\ 2.)\ v_в \cdot \dfrac{L}{v_м} + 49 = v_м \cdot \dfrac{L}{v_в} \\ 3.)\ \dfrac{L}{v_м + 7} + \dfrac{36}{60} = \dfrac{L}{v_в + 7} \end{cases}$$

$$\frac{L}{v_м + 7} + 0{,}6 = \frac{L}{v_в + 7}$$

$$1.)\ \begin{cases} \dfrac{L}{v_м} - \dfrac{L}{v_в} = -1 & (1) \\ \dfrac{v_в L}{v_м} - \dfrac{v_м L}{v_в} = -49 & (2) \end{cases}$$

(1) : (2)

$$\frac{\frac{1}{v_м} - \frac{1}{v_в}}{\frac{v_в}{v_м} - \frac{v_м}{v_в}} = \frac{1}{49}.$$

$$\frac{\frac{v_в - v_м}{v_м v_в}}{\frac{v_в^2 - v_м^2}{v_м v_в}} = \frac{1}{49}$$

$$\frac{\cancel{v_в - v_м}}{\cancel{(v_в - v_м)}(v_в + v_м)} = \frac{1}{49}$$

$$v_в + v_м = 49.$$

$$v_м = 49 - v_в.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6 (продолжение 1)

2.) $\begin{cases} \frac{L}{v_m} - \frac{L}{v_в} = -1 & (1) \\ \frac{L}{v_m+7} - \frac{L}{v_в+7} = -0,6 & (3) \end{cases}$ разделим (1) на (3)

$$\frac{\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_в}}{\frac{1}{v_m+7} - \frac{1}{v_в+7}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\frac{v_в - v_m}{v_в v_m}}{\frac{v_в - v_m}{(v_в+7)(v_m+7)}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{(v_в+7)(v_m+7)}{v_в v_m} = \frac{5}{3}.$$

подставим $v_m = 49 - v_в$ из п.1:

$$3(v_в+7)(56-v_в) = 5v_в(49-v_в)$$

$$168v_в - 3v_в^2 + 1176 - 21v_в = 245v_в - 5v_в^2$$

$$2v_в^2 - 98v_в + 1176 = 0$$

$$v_в^2 - 49v_в + 588 = 0$$

по т. Виета:

$v_в = 28\frac{км}{ч}$; $v_в = 21\frac{км}{ч}$.

но $v_в = 28\frac{км}{ч}$ не уд. ур. исходным 1 =>

$v_m > v_в$, а при $v_в = 28$ $v_m = 21 < 28$!!!

$\Downarrow$

$v_в = 21\frac{км}{ч}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6 (продолжение 2)

$v_B = 21 \frac{км}{ч} \Rightarrow v_m = 28 \frac{км}{ч}$

(1): $\frac{L}{28} - \frac{L}{21} = -1.$

$L\left(\frac{1}{28} - \frac{1}{21}\right) = -1$

$L\left(\frac{21-27}{27\cdot 21}\right)$

$L\left(\frac{\quad}{63}\right)$

$L\left(\frac{7-9}{7\cdot 3^3}\right) = -1$

$L\left(\frac{-2}{7\cdot 3^3}\right) = -1$

$L = \frac{7\cdot 3^3}{2}$ км

$L = 94,5$ км.

Ответ: 94,5 км.

$L\left(\frac{3-4}{84}\right) = -1$

$L = 84$ км

Ответ: 84 км

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | x | x | x | x | x | x |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

1.) $5x - y = 3z$

$5x = 3z + y \Rightarrow$ а.) $25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz.$

б.) $x = \frac{3z+y}{5}$

2.) $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Big| \cdot xyz$

$8yz + xz = 15xy.$

$\frac{8yz}{15y - z} = x = \frac{3z+y}{5}.$

$40yz = 45yz - 3z^2 + 15y^2 - yz$

$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$

$z_1 = \frac{4y \pm \sqrt{196y^2}}{6} = \frac{4y \pm 14y}{6}$

$z_1 = 3y$

$z_2 = -\frac{10}{6}y = -\frac{5}{3}y. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3y \\ z = -\frac{5}{3}y \end{array}\right.$

Рассмотрим дробь из условия А: $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$

$= \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2}.$

1.) $z = 3y$

$A_1 = \frac{8 \cdot 9y^2 + 18y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} = \frac{72 + 18}{1 + 27} = \cancel{\frac{100}{28} = \frac{25}{7}}$

$= \frac{90}{28} = \frac{45}{14}.$

Достигается при:

$y = 3;\ z = -5;\ x = -2,4.$

2.) $z = -\frac{5}{3}y.$

$A_2 = \frac{\frac{8 \cdot 25}{9}y^2 - 10y^2}{y^2 + \frac{25}{3}y^2} = \frac{\frac{110}{9}}{\frac{28}{3}} =$

$= \frac{110 \cdot 3}{3 \cdot 9 \cdot 28} = \frac{110}{84} = \frac{55}{42} \Rightarrow A_2 < A_1.$

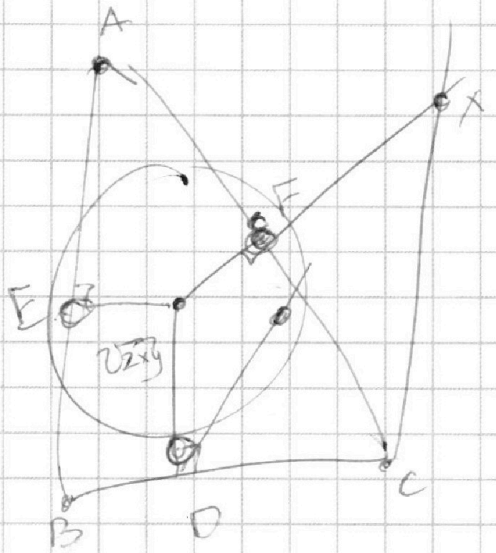
Ответ: $\frac{55}{42}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | | | | X | X |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | x | x | x | x | x | x |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5x - y = 3z$

$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$

$8yz + xz = 15xy$

$8yz + xz = 3(3z+y)y$

$8yz + \frac{(3z+y)z}{5} = 3(3z+y)y$

$40yz + 3z^2 + yz = 45zy + 15y^2$

$41yz + 3z^2 = 45zy + 15y^2$

$0 = 4zy + 15y^2 - 3z^2$

$3z^2 + y^2 = 4zy + 16y^2$

$\frac{8z^2 + 6yz}{16y^2 + 4zy} = \frac{4z^2 + 3yz}{8y^2 + 2zy}$

$25x^2 = 9z^2 + 6yz + y^2$

$x = \frac{3z+y}{5}$

$\frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | x | x | x | x | x | x |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$8yz + xz = 15yx$

$z = \frac{15yx}{8y+x}$

$5x - y = \frac{45yx}{8y+x}$

$(5x-y)(8y+x) = 45yx$

$40xy + 25x^2 - 8y^2 - yx = 45yx$

$25x^2 - 8y^2 = 6yx$

$8yz + xz = 15yx$

$x = \frac{8yz}{15y - z}$

$\frac{3z+y}{5} = \frac{8yz}{15y - z}$

$40yz = 45yz + 15y^2 - 3z^2 - zy$

$3z^2 = 4yz + 15y^2$

$3z^2 - 4yz = 15y$

$3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$

$\frac{4y \pm \sqrt{16y^2 + 180y^2}}{6}$

$z = \frac{4y \pm 14y}{6}$

$z = \frac{28}{6}y = \frac{14}{3}y$

$z = -\frac{5}{3}y$

$z^2 =$

$\frac{200}{9} \cdot 10 = \frac{110}{9}$

$\frac{200 \cdot 90}{9}$

$\frac{12}{5} = -2{,}4$

$\frac{55}{42} = 1\frac{13}{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [X] 3 [X] 4 [X] 5 [X] 6 [X] 7 [X]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 № 2 № 3 ??? перешли № 4 № 5 перешли № 6 № 7

сл-ть легко легко попытка попытка попытка легко Не знаю

реш ТЧ ТЧ АЛГ ГЕОМ АЛГ ФИЗ ГЕОМ

№ 3

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x$$

$$3x^2-5x+6+3x^2+x+1-2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)}=36x^2+25-60x$$

$$6x^2-4x+7-2\sqrt{\text{дискр}}=36x^2+25-60x$$

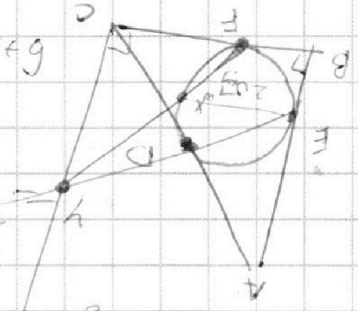
$$56x-2\sqrt{\text{дискр}}=30x^2+18$$

$$28x-\sqrt{\text{дискр}}=15x^2+9$$

$$\text{дискр}=(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)=$$

$$=9x^4+3x^3+3x^2-15x^3-5x^2-5x+18x^2+6x+6=$$

$$=9x^4-12x^3+16x^2+x+6.$$



20+12=32.

всего баллов 4+4+5+4+4+5+6

100 − 90 + 1

11

11

122 − 99

23

11

1 − 90 + 100

1 − 99 + 121

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | X |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N 1

$$\begin{cases} a_3+b_3 \geq 14 \\ c_3+b_3 \geq 19 \\ c_3+a_3 \geq 23. \end{cases}$$

$a_7+b_7 \geq 13$

$b_7+c_7 \geq 14$

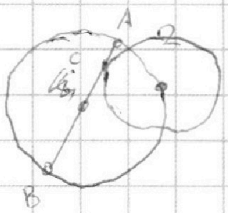
$a_7+c_7 \geq 42.$

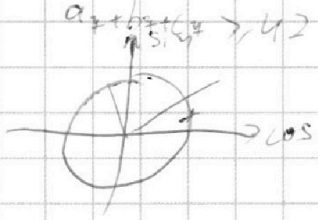
$a_3+b_3+c_3 \geq \cancel{36}\ 28$

$a_7+b_7+c_7 \geq \cancel{72}\ 36 < 42$

$a_3+b_3+c_3 \geq 42.$

N 4



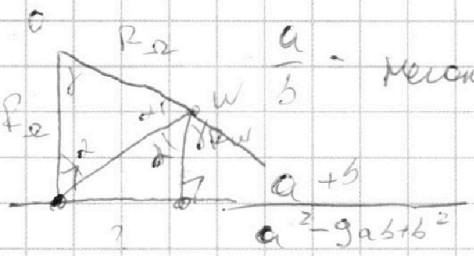




$a_3$

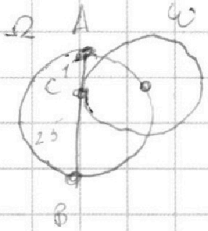
$b_3$

$c_3$

N 2




$\frac{a}{b}$ - несократим $\Rightarrow$ $(a,b)=1$




$a \equiv_m r_1$

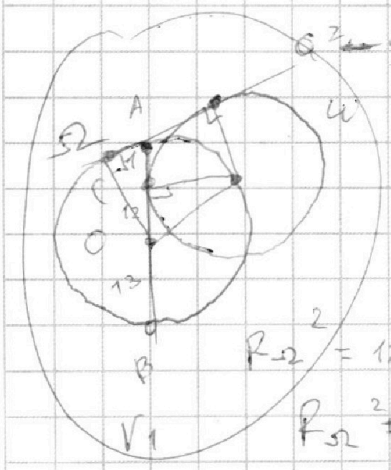
$b \equiv_m r_2$

$\Rightarrow m/b$

$m/a.$

N 4 !! $a+b \vdots m$

$a^2-9ab+b^2 \vdots m.$




$r_1^2-9r_1r_2+r_2^2 \equiv_m 0.$

$(r_1+r_2)^2-11r_1r_2 \equiv_m 0$

$-11r_1r_2 \equiv_m 0$

$r_1+r_2 \equiv_m 0.$

$r_1r_2+r_2^2 \equiv_m 0$

$R_\Omega^2 = 12^2+R_W^2$

$R_\Omega^2 = 144+R_W^2$

$11r_2^2 \equiv_m 0$

$11r_1^2 \equiv_m 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | x | x | x | x | x | x |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$6x^2 - 4x + 7 - 25 = 25 - 60x + 36x^2$

$= 30x^2 - 56x + 18$

$= (15x^2 - 28x + 9)(15x^2 - 28x + 9)$

$= 225x^4 - 28 \cdot 15x^3 + 135x^2 - 28 \cdot 15x^3 + 28^2x^2 - 28 \cdot 9x + 135x^2 - 28 \cdot 9x + 81$

$= 225x^4 - 28 \cdot 30x^3 + (270 + 28^2)x^2 - 28 \cdot 18x + 81$

$225x^4 - 840x^3 + 1054x^2 - 504x + 81 =$

$9x^4 - 72x^3 + 76x^2 + x + 6$

$216x^4 - 828x^3 + 1038 - 505x + 75 = 0$

$(5 - 6x)(5 - 6x) =$

$25 - 30x - 30x + 36x^2$

$x = \frac{26 \pm \sqrt{\ }}{24}$

№2

$9x^2 - 4x + 7 - 25 = 25 - 60x + 36x^2$

$= 30x^2 - 56x + 18$

$= (15x^2 - 28x + 9)(15x^2 - 28x + 9)$

$= 225x^4 - 28 \cdot 15x^3 + 135x^2 - 28 \cdot 15x^3 + 28^2x^2 - 28 \cdot 9x + 135x^2 - 28 \cdot 9x + 81$

$= 225x^4 + 28 \cdot 30x^3 + (270 + 28^2)x^2 - 28 \cdot 18x + 81$

$(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1) =$

$9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 15x^3 - 5x^2 - 5x + 18x^2 + 6x + 6 =$

$= 9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$

$225x^4 - 28 \cdot 15x^3 + 135x^2 - 28 \cdot 15x^3 + 28^2x^2 - 28 \cdot 9x + 135x^2 - 28 \cdot 9x + 81$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [x] 5 [x] 6 [x] 7 [x]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 5

1.) $5x - y = 3z$

2.) $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$

$\frac{3}{4} - 5.$

$\frac{3-20}{4} = -\frac{17}{4}$

$8yz + xz = 15xy.$

$388 = 4 \cdot 97.$

$z( = \frac{15xy}{8y+x}$

$\frac{13 - \sqrt{97}}{4} - 5 = 5x - y = \frac{45xy}{8y+x}$

$= \frac{13 - \sqrt{97} - 20}{4}$

$(5x - y)(8y + x) = 45xy$

$\frac{1}{4}.$

$40xy + 5x^2 - 8y^2 - yx = 45xy$

$\frac{5}{6}$ $3x^2 - 5x$ $5x^2 - 8y^2 = 6xy$

$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2}$

$= \frac{3x(5x+y) - z^2}{25x^2 - 6yz}$

$-\frac{17}{16} + 6.$

$\frac{45 \cdot 8}{8 \cdot 2}$

$169 - 64 = 105$

$\frac{169}{-64}$
$105$

$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = \sqrt{A} = B$

$\sqrt{A+5-6x} - \sqrt{A} = 5 - 6x$

$3x^2 + x + 1 = A$

$5 - 6x = B$

$\sqrt{A+3x-25} \quad \sqrt{A-3x+25}$

$\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{17}{4}\right) + 6.$

$3x^2 - 2x + 35 = A$

$(2A+B-B^2)(2A+B-B^2) =$

$= 4A^2 + 2AB - 2AB^2 + 2AB + B^2 - B^3 - 2AB^2 - B^3 + B^4$

$(2A+B-B^2)$

$A+B+A - 2\sqrt{(A+B)A} = B^2$

$2A + B - B^2 = 2\sqrt{A^2+AB}$

$= 4(A^2+AB).$