



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$; ~~$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$~~ ; $c = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$. Если у них есть
другие простые множители, то мы не связаны с
условием и делаем произведение больше, что нам не нужно.
Тогда:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 20 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 37 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 17 \\ \beta_2 + \beta_2 \geq 17 \end{cases}$$

Складываем: $\Rightarrow \begin{cases} 2(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2) \geq 51 \\ 2(\alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2) \geq 64 \end{cases}$. $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 \geq 26 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2 \geq 32 \end{cases} \Rightarrow abc \geq 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2} \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

Пример: ~~$\begin{cases} a = 2^9 \cdot 7^5 \\ b = 2^5 \cdot 7^7 \\ c = 2^{12} \cdot 7^7 \end{cases}$~~ $\Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 = 26$. Пример: $\begin{cases} a = 2^9 \dots \\ b = 2^5 \dots \\ c = 2^{12} \dots \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2 \geq 32 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 37 \end{cases} \cdot \beta_2 \geq 0 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2 \geq 37 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2 = 37. \text{ Пример: } \begin{cases} \alpha_2 = 10 \\ \beta_2 = 0 \\ \alpha_2 = 27 \end{cases}$$

Значит, $(abc)_{\min} = 2^{26} \cdot 7^{37}$.

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $\frac{a+b}{a^2-bab+b^2}$ можно сократить на m , то и

$\frac{a^2-bab+b^2}{a+b}$ можно сократить, при этом m останется неизменным.

Знаменатель равен $(a+b) \Rightarrow m \leq a+b$. Пусть $m = a+b$.

$$\frac{a^2-bab+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} - \frac{bab}{a+b} = (a+b) - \frac{bab}{a+b} \Rightarrow bab : a+b. \text{ Пусть } bab = k(a+b)$$

$$bab = ak + kb \Rightarrow kb : a \text{ и } ak : b \text{ и несократима} \Rightarrow k : a \text{ и } k : b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k : ab \Rightarrow k \geq ab \Rightarrow bab \geq ab(a+b) \Rightarrow a+b \leq 8 \Rightarrow m=8. \text{ Пример: } \begin{cases} a=3 \\ b=5 \end{cases}$$

Если $m \neq a+b$, то пусть $m=d$. $a+b : d \Rightarrow bab : d$. Пусть $d > 8$.

Тогда $\text{НОД}(ab; d) > 1$. Но $\text{НОД}(a+b; d) > 1 \Rightarrow \text{НОД}(ab; (a+b)) > 1$.

Противоречие. Значит, $m=8$.

Ответ: $m=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty) \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty) \end{cases}$$

$$(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1})^2 = 2x^2-5x+3 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}$$

$$(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (x-1)(4x^3 - 2x^2 - 4x - 3)$$

$$2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 + 4x^3+4 - 2(7x-2)\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$4x^3-21x+2 = 2(7x-2)\sqrt{2x^2+2x+1}$$

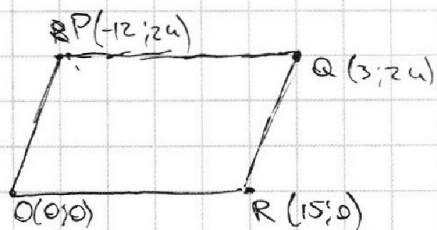
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$PQ = OR$ и $PQ \neq QR \Rightarrow$ не все равнозначны,
так, как показано на рисунке.

Система, задающая точки
параллелограмма:

$$\begin{cases} y \geq 0 & (OR) \\ y \leq 24 & (PQ) \\ y \geq -2x & (OP) \\ y \leq -2x + 30 & (QR) \end{cases}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12$$

Предположим, что параллелограмм —

множеством точек $y = -2x + b$, где $b \in [0; 30]$, при этом $y \in [0; 24]$. Тогда, если $A(x_1, y_1) \in l_1: y = -2x + b_1$, $B(x_2, y_2) \in l_2: y = -2x + b_2$

$\Rightarrow 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12 \Rightarrow b_2 = b_1 + 12$. Тогда с учетом

координат $\Rightarrow b_1 \in \mathbb{Z}; b_1 \in [0; 30]$. Тогда решение уравнения $b_2 - b_1 = 12$ равно $30 - 12 + 1 = 19$. $OR \parallel PQ \parallel O_x \Rightarrow$ у каждой точки прямой 25 точек. Значит, всего решений $19 \cdot 25^2$.

Ответ: $19 \cdot 25^2 = 11875$

и.к. пары b_i можно выбрать 19 способами, а пары точек на этих прямых — 25^2 .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b = 0$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \vee \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

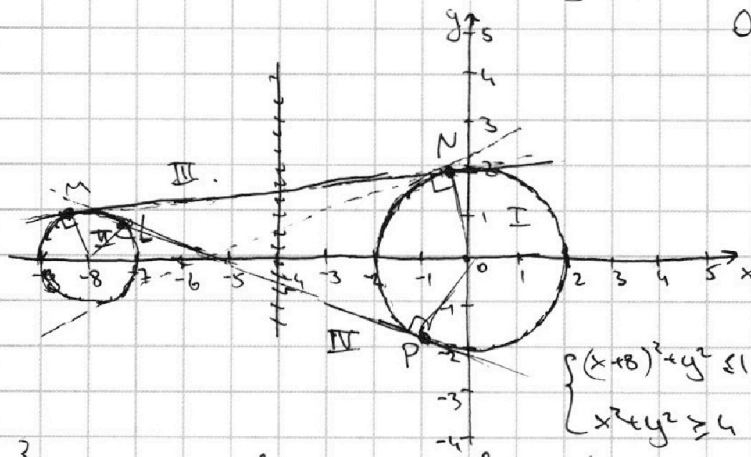
$(x+8)^2 + y^2 = 1$ — окружность с центром $O_1(-8; 0)$ и радиусом 1.
 $x^2 + y^2 = 4$ — окружность с центром $O_2(0; 0)$ и радиусом 2.

Окружности не пересекаются

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \text{ задаёт}$$

всю внутренность задаёт окружность I (включая её границу), а

задаёт окружность II (включая границу).



Значит, уравнение неравенства

$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ задаёт две ранее упомянутых круга.

$ax - y + 10b = 0$ — прямая. Решения $2 \Rightarrow$ эта прямая — общая касательная двух окружностей. $A(-8; 0)$, $B(0; 0)$,

M и N — точки касания прямой II с I и II окружностями соответственно. O — пересечение прямой III и ax на x , $O(2; 0)$.

Тогда $\frac{2}{2} = \frac{2-8}{1} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 2 - 16 \Rightarrow 2 = 16$. Значит, $-16a + 10b = 0$.

$$a = \frac{1}{\sqrt{8^2 - 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}} \Rightarrow b = \frac{-16}{30\sqrt{7}} = \frac{-8}{15\sqrt{7}} \Rightarrow \text{II: } y = \frac{1}{3\sqrt{7}} \cdot 10 \cdot \frac{8}{15\sqrt{7}}$$

Аналогично находится вторая внешняя касательная:

$$y = -\frac{1}{3\sqrt{7}} \cdot 10 \cdot \frac{8}{15\sqrt{7}}$$

Рассмотрим прямую IV . Пусть она пересекает $y=0$ в Q . $\Rightarrow (Q(q; 0)) \Rightarrow \frac{-q}{2} = \frac{8+q}{1} \Rightarrow 0 = 3q + 16$

$$q = -\frac{16}{3} \Rightarrow 10b = \frac{16}{3}a, a = \frac{-2}{\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2^2}} = \frac{-2 \cdot 3}{\sqrt{220}} = \frac{-3}{\sqrt{55}} \Rightarrow b = \frac{16 \cdot (-3)}{\sqrt{55} \cdot 3 \cdot 10} =$$

$$= -\frac{8}{\sqrt{55}}. \text{ Аналогично для второй внутренней касательной, } a = \frac{3}{\sqrt{55}}; b = \frac{8}{5\sqrt{35}}.$$

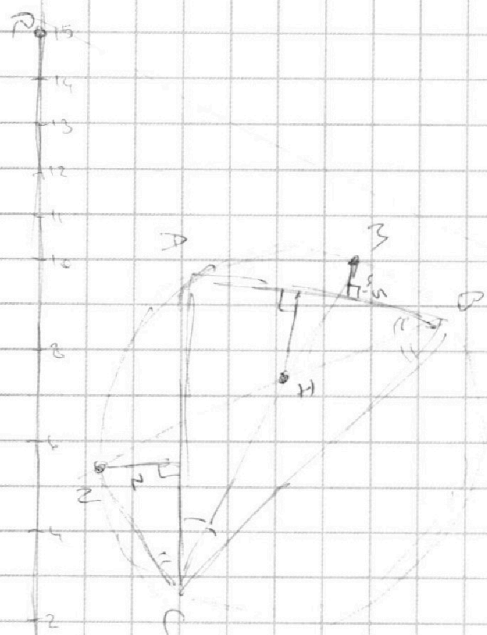
Ответ: $(a, b) \in \left(\frac{1}{3\sqrt{7}}; -\frac{8}{15\sqrt{7}}\right), \left(-\frac{1}{3\sqrt{7}}; \frac{8}{15\sqrt{7}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{55}}; -\frac{8}{5\sqrt{35}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{55}}; \frac{8}{5\sqrt{35}}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4x^2 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 =$$

$$y_2^2 = 2x^2 - 5x + 3$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ 500 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$b' = b_c + 112$$

$$T = 2 \times 2 = 4$$

$$\begin{array}{r}
 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 \\
 - (4x^4 - 4x^3) \\
 \hline
 -2x^3 - 2x^2 + x + 3 \\
 - (-2x^3 + 2x^2) \\
 \hline
 -4x^2 + x + 3 \\
 - (-4x^2 + 4x) \\
 \hline
 -3x + 3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

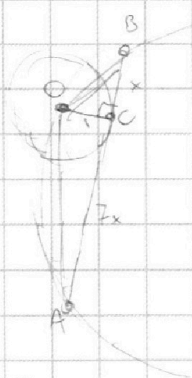
$$4x^2 - 3x + 4 - 2(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 7x + 1)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = 10 \cdot \sin \angle AOB = 10 (\sin \angle COB \cos \angle AOC + \sin \angle AOC \cos \angle COB) =$$

$$= 10 \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{9x^2+1}} + \frac{7x}{\sqrt{9x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

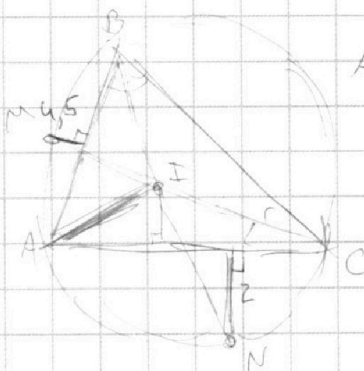
$$10 = \sqrt{1+4x^2} \cdot \sqrt{49x^2+1}$$

$$100 = 49x^4 + 50x^2 + 1 \Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0.$$

$$\frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{2 \cdot 49} = \frac{4\sqrt{369} - 50}{2 \cdot 49} = \frac{4 \cdot 37 - 50}{2 \cdot 49}$$

2	1
---	---

$$AT = (AB + AC - BC) \cos \alpha$$



$$\cancel{\frac{AC}{\cancel{AC} \cdot \cancel{AP}}} \cdot \lg P = \frac{G}{AC} \quad ; \quad \lg x = \frac{g}{AP}$$

$$32x^2 + 32x + 16 + 4 \cdot 98x^4 + 4 \cdot 98x^3 + 2 \cdot 98 - 8 \cdot 28x^3 - 8 \cdot 28x^2 - 4 \cdot 28 =$$

$$= x^5 + 7^5 - 42 \cdot 49x^3 + x^2(21^2 - 4 \cdot 49) - 4 \cdot 28x + 4$$

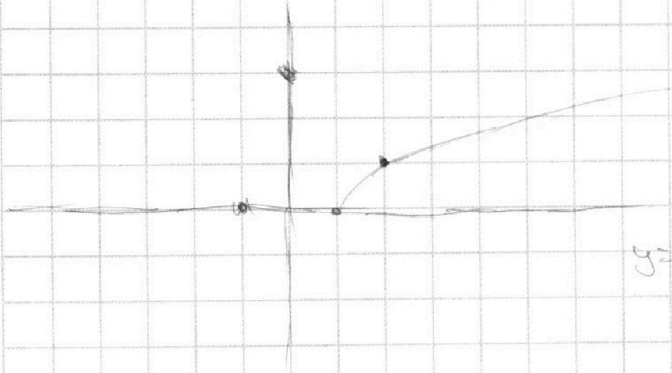
$$(4 \cdot 98 - 7^4)x^4 + x^3(25 \cdot 98 - 8 \cdot 28) + x^2(32 \cdot 8 \cdot 28 - 21^2 - 4 \cdot 49) + x(32 + 4 \cdot 21) + 12 + 196 - 56$$

1	0
---	---

~~$$72 - 5 - 6 + 3$$
$$50 - 25 + 3 =$$~~

$$y = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2 - 7x$$

CG



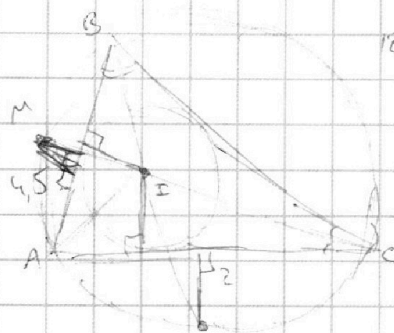
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$180 - 2\beta \vee 180 - (2 + x) = 180 - \frac{180 - 2\beta}{2} = 90 + \beta$$

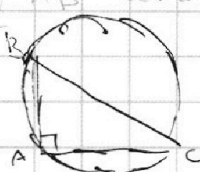
$$\frac{AI}{\sin x} = \frac{AC}{\sin(2 - 2\beta)}$$

$$\frac{AI}{\sin x} = \frac{AC}{\sin(90 + \beta)}$$

$$\frac{AI}{AC} = \frac{4}{AC} = \tan \beta$$

$$\frac{9}{AB} = \tan x$$

$$\frac{4}{AC} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$



$$\frac{BC}{\sin 90^\circ} = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin AOB} = 10$$

$$2x_1 - 2x_2 + y_2 - y_1 = 12$$

$$OR: y=0$$

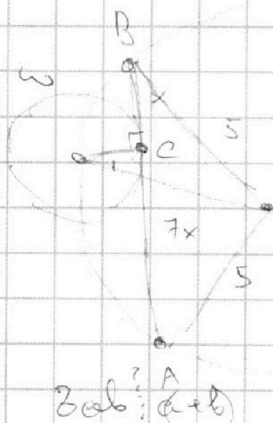
$$PQ: y=24$$

$$OP: y=-2x$$

$$QR: y=-2x+30$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \in [0; 24] \\ y \in [-2x; -2x+30] \end{cases}$$

$$y = 24 \Rightarrow 12$$



$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2 + b^2} \text{ можно сравнить } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 - b^2 + b^2}{a + b} \text{ можно сравнить}$$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b} = \frac{8ab}{a + b} = \frac{(a + b)^2}{a + b} - \frac{8ab}{a + b}$$

$$\frac{1}{x} = \tan x = \frac{\sin \cos}{\cos \cos}$$

$$8ab = k(a + b)$$

$$8ab = a + b \Rightarrow kb : kb : a \Rightarrow k : a \Rightarrow ak : b \Rightarrow k : b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{\min} = ab$$

$$8ab \geq ab(a + b)$$

$$a + b \leq 8$$

$$\sin \angle AOB = \sin \cos \cos \angle AOC + \sin \angle AOC \cos \cos = 8 \times \cos \cos \cos \angle AOC$$

$$10 \cdot 2 \cdot 10$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

man

$$ab: 2^{14} 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} 7^{17}$$

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 20 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \end{cases}$$

$$2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 34 + 17 = 51$$

$$2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 52$$

$$x_{1,2} = \frac{51 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} =$$

$$2. \frac{ab}{a^2 - bab + b^2}$$

$$ax - y + 10b = 0 - \text{прямая}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Rightarrow$$

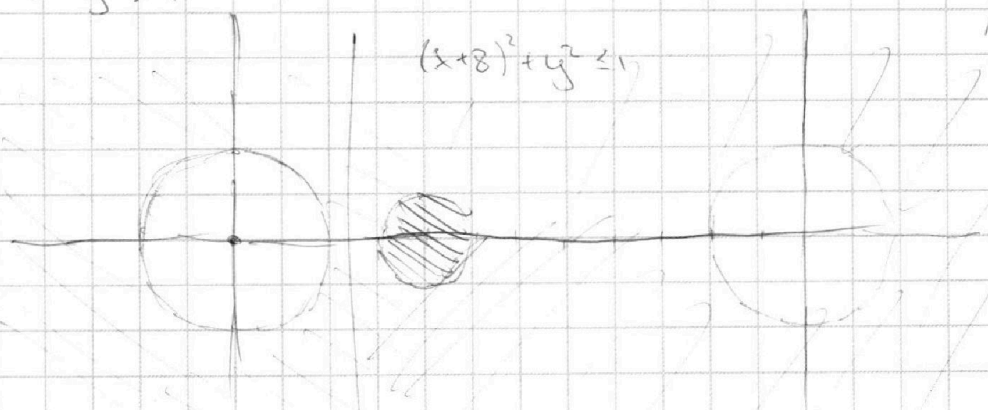
$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{5 \pm 1}{4} = 4 \text{ и } \frac{3}{2}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 4}$$

$$x^2 + y^2 \geq 4$$

либо все прямые
находятся
снаружи
либо все
находятся внутри



либо
находятся
снаружи
либо внутри

$$y = ax + 10b$$

Решение гла, если прямая касается
одних окружностей.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{3}{2}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x) + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 + 49x^2 - 28x + 2x^2 + 2x + 1 - 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 49x^2 - 28x + 4$$

$$(2 - 7x)^2 = 49x^2 - 28x + 4$$

$$4(49x^2 - 28x)(2x^2 + 2x + 1) = 7^4 x^4 + 21^2 x^2 + 4 - 2 \cdot 21 \cdot 49x^3 + 2 \cdot 2 \cdot 49x^2 - 4 \cdot 21x$$