МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Заметим, что ab^2c кратно $2^{51} \cdot 7^{27}$, при этом $ac : 2^{50} \cdot 7^{57}$,
а $a^2b^2c^2 = (abc)^2$ кратно $2^{54} \cdot 7^{64}$.
Пусть $ab = 2^{17} \cdot 7^{10} \cdot m$; $bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot k$; $ac = 2^{20} \cdot 7^{57} \cdot n$; $m, k, n \in \mathbb{N}$.
Тогда $ab^2c = 2^{51} \cdot 7^{27} \cdot mn$. При этом минимальное значение
$mn = 7^{10} \cdot 2$. Если $mn < 7^{10}$, $ac > ab^2c$, однако $b \in \mathbb{N}$. Если
$mn : 2$ то $b^2 : 2^{11}$ и $: 2^{12} \Rightarrow b$ - не натурально.
При $mn = 7^{10} \cdot 2$, $k = 1$ $(abc)^2 = 2^{54} \cdot 7^{64} \cdot mnk \cdot 2^{52} \cdot 7^{74}$.
Отсюда $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ - минимальное значение
Оно возможно при $a = 2^8 \cdot 7^{10}$; $b = 2^{12} \cdot 7^{27}$; $c = 2^6$.
Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2. Дробь $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ можно представить в виде $\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab}$ или $\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ ①

Если дробь ① сократима то сократима и обратная ей дробь $\frac{(a+b)^2-8ab}{a+b}$ ②, которую можно представить в виде $a+b-\frac{8ab}{a+b}$, при этом числитель и знаменатель дроби $\frac{8ab}{a+b}$ тоже можно сократить на m, иначе либо $a+b$ не кратно m, тогда числитель дроби ② нельзя сократить на m, либо $8ab$ не кратно m, тогда знаменатель не кратен m, либо оба не кратны m, тогда числитель дроби ① тоже не кратен m.

Рассмотрим наибольшее возможное значение m: $НОД(8ab; a+b)$.

Т.к. $\frac{a}{b}$ несократима, $НОД(a,b)=1$, значит, $НОД(a+b; a)=1$ и $НОД(a+b; b)=1 \Rightarrow НОД(a+b; ab)=1$. Таким образом, максимальное m достигается, если $a+b:8$, и оно равно 8.

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

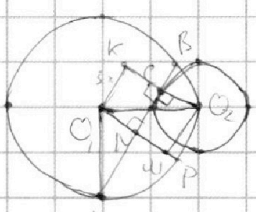
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. Проведём серединный перпендикуляр O_1N к AB (радиус O_1). $O_1N \parallel O_2C$, т.к. O_2C - касательная)

Продлим O_2C за т. C и проведём к O_2C перпендикуляр из т. O_1. Проведём $O_2M \perp O_1P$.



Пусть $BC = x$, тогда $AC = 7x$; $AB = 8x$; $AN = 4x \Rightarrow CN = AN - BC = 3x$.

O_1KCN - прямоугольник; $O_1K = 3x$;

O_2MNC - прямоугольник; $O_2C = MN = R(\omega) = 1$;

Из прямоугольного треугольника AO_1N $O_1N = \sqrt{AO_1^2 - AN^2}$.

$= \sqrt{R(\omega)^2 - (4x)^2} = \sqrt{25 - 16x^2}$; $O_2M = O_1K = 3x$, т.к. O_1KO_2P - прямоугольник ($\angle KCN = \angle O_1NC = 90°$ т.к. CO_2 - касательная; O_1P - сер. перпендикуляр к AB; $\angle O_1KC = 90° \Rightarrow \angle KO_1M = 90°$; $\angle O_1MO_2 = 90°$).

Из прямоуг. $\triangle O_1O_2M$: $O_1O_2 = 5$, $O_1M = \sqrt{25 - 16x} + 1$, $O_2M = 3x$;

$\left(\sqrt{25 - 16x^2} + 1\right)^2 + 9x^2 = 25$;

$25 - 16x^2 + 1 + 2\sqrt{25 - 16x^2} + 9x^2 - 25 = 0$

$2\sqrt{25 - 16x^2} = 7x^2 - 1$

$\sqrt{25 - 16x^2} = \frac{7x^2 - 1}{2}$

$25 - 16x^2 = \frac{49x^4 - 14x^2 + 1}{4}$;

$100 - 64x^2 = 49x^4 - 14x^2 + 1$;

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$; $x^2 = t$; $t \geq 0$

$D = 2500 + 4 \cdot 99 \cdot 49 = 2500 + 19404 = 21904$

$D = 625 + 99 \cdot 49 = 5476 = 74^2$

$t_{1,2} = \frac{-25 \pm 74}{49}$; $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1$;

$x = 1$, т.к. $x > 0$.

$16x^2 \leq 25$;

$x^2 \leq \frac{25}{16}$

$0 < x \leq \frac{5}{4}$

$AB = 8x = 8$. Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

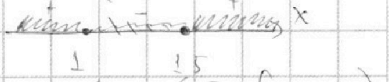
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4. $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

ОДЗ:
$2x^2+2x+1>0 \quad \forall x$
$2x^2-5x+3=0$
$D=25-24=1$
$x_1=\frac{5+1}{4}=1{,}5; \quad x_2=1$



$x \in (-\infty; 1] \cup [1{,}5; +\infty)$

$2x^2-5x+3+2x^2+2x+1-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=49x^2-25x+4$

$4x^2-3x+4-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=49x^2-25x+4$

$25x-45x^2=2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}$

$4\cdot(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)=25x^2(5-9x)^2$

$4\cdot(4x^4-10x^3+6x^2+4x^3-10x^2+6x+2x^2-5x+3)=25x^2(81x^2-90x+25)$

$4\cdot(4x^4-6x^3-2x^2+x+3)=25x^2(81x^2-90x+25)$

$2025x^4-2250x^3+625x^2=16x^4-24x^3-8x^2+4x+12$

$2009x^4-2226x^3+633x^2-4x-12=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. $\begin{cases} 100b^2-160ab+64a^2-256=0 \\ a^2-256b^2+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (10b-8a)^2-(16)^2=0 \\ a^2-256b^2+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (16-8a)(16b-8a)=0 \\ a^2-256b^2+1=0 \end{cases}$ 1. $\begin{cases} 16=8a \\ a^2-256b^2+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{5}{8}b \\ \frac{25}{64}b^2-256b^2+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} a=\frac{5}{8}b \\ 25-\frac{63}{64}b^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{5}{8}b \\ b=\frac{+8}{5\sqrt{63}}=\frac{+8}{15\sqrt{7}} \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{5}{8}b=\frac{5}{8}\cdot\frac{+8}{15\sqrt{7}}=\frac{+1\sqrt{7}}{21} \\ b=\frac{+8}{15\sqrt{7}} \end{cases}$

2. $\begin{cases} a=\frac{15}{8}b \\ \frac{225}{64}b^2-256b^2+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{15}{8}b \\ 25\left(1-\frac{9}{64}\right)b^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{15}{8}b \\ 25\cdot\frac{55}{64}b^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{15}{8}b \\ b=\pm\frac{8}{5\sqrt{55}} \end{cases}$

$a=\frac{15}{8}b=\frac{15}{8}\cdot\pm\frac{8}{5\sqrt{55}}=\pm\frac{3}{\sqrt{55}}=\pm\frac{3\sqrt{55}}{275}$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{21}; -\frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{3\sqrt{55}}{275}; -\frac{3\sqrt{55}}{275}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. $\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=ax+10b \\ (x^2+16x+64+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$ ①

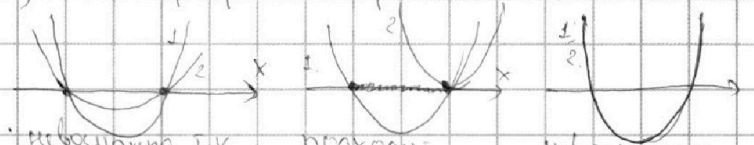
Подставим значение y в неравенство ①:

$(x^2+16x+64+(ax+10b)^2-1)(x^2+(ax+10b)^2-4)\le 0$

$(x^2+16x+64+a^2x^2+20axb+100b^2+1)(x^2+a^2x^2+20axb+100b^2-4)\le 0$

$(x^2(a^2+1)+4x(5ab+4)+100b^2+63)(x^2(a^2+1)+20axb+100b^2-4)\le 0$

Получится 2 квадратных трёхчлена должны иметь в сумме только 2 корня (если корней больше, то значений x при котором произведение равно 0 больше, если при этом какие-то совпадают, то графики трёхчленов имеют один из видов:



Два значения x, а значит и 2 реш. ния системы возможно лишь тогда, когда оба квадратных трёхчлена имеют по 1 корню т.е. $D_1=D_2=0$, где D_1 и D_2 - дискриминанты кв. трёхчленов:

$D_1=16(5ab+4)^2-4(a^2+1)(100b^2+63)=0$ $\quad D_2=400a^2b^2-4\cdot(a^2+1)(100b^2-4)=0$ $\quad |:16$

$\begin{cases} 4(5ab+4)^2-(a^2+1)(100b^2+63)=0 \\ 25a^2b^2-(a^2+1)(25b^2-1)=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4(25a^2b^2+40ab+16)-(a^2+1)(100b^2+63)=0 \\ 25a^2b^2-25a^2b^2-25b^2+a^2+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 100a^2b^2+160ab+64-100a^2b^2-100b^2-63a^2+63=0 \\ a^2-25b^2+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 100b^2-160ab+63a^2-1=0 \\ a^2-25b^2+1=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 75b^2-160ab+64a^2=0 \\ a^2-25b^2+1=0 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

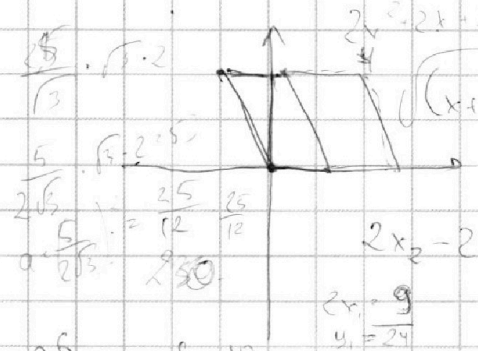
МФТИ

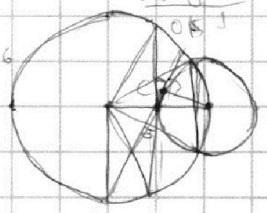
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

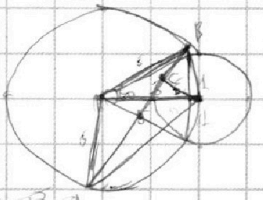
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

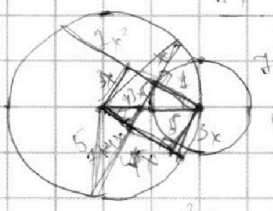
МФТИ

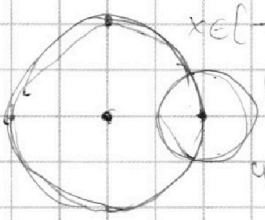
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

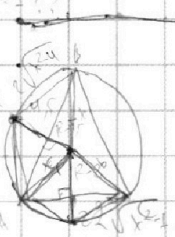












На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot m$; $ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot n$; $bc = 2^{17} \cdot 7^{12} \cdot mk$; $a = \frac{2^{14} \cdot 7^{10} \cdot m}{a}$

$(abc)^2 = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 2^{17} \cdot 7^{12} \cdot mnk = 2^{54} \cdot 2^{17} \cdot 7^{27} \cdot 7^{37} \cdot mnk$

$\cdot 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk$

$(abc)^2 = 2^{51} \cdot 7^{64}$; abc

$(abc)^2 = 2^{52} \cdot 7^{64}$; $abc \cdot 2^{26} \cdot 7^{32}$

$2^{14} \cdot 7^{10}$ $a = 2^{14-x} \cdot 7^{10-x}$; $c = 2^{17-x} \cdot 7^{12-x}$

$abc = 2$ $HOД(a;b) = 1$ 6

$a+b$ 2

ab — n $\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2}$

$a+b$ 16 $(a+b)^2 - 4ab : a+b$ — (что?) сократима

$a+b = \frac{4ab}{a+b}$

$\frac{16}{256 - 4ab}$

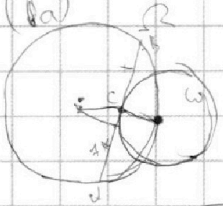
$(a+b)^2 - 4ab$

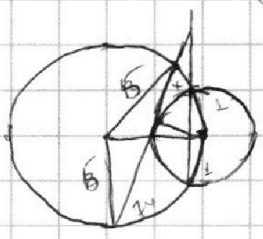
$4ab$ $a+b$ $a+b : ab$

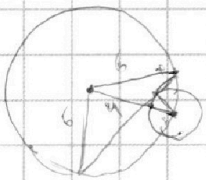
$\frac{a+b}{ab}$ некий nC на к-ий можно сократить

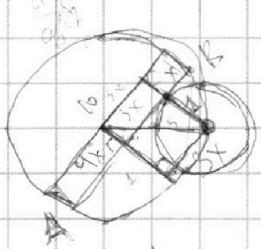
$(10b)^2 - 2 \cdot 10b \cdot 4ab + (4a)^2$

$100b^2 - 160ab + 64a^2$









$y = ax + 10b$

$((k+3)^2$

$x^2 + 16x + 64 - 1$

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 4ab}$

$4ab : (a+b)$

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 4ab}$

$\frac{16}{16 - 4ab}$

$a+b : 4ab$

$a+b \neq a$ — таким образом $a+b$ ...

$a+b \neq b$

$\frac{16}{256 - 4ab}$

$(a+b)^2 - 4ab$

$a+b$ $a+b : ab$

$\frac{a+b}{ab}$ некий nC на к-ий можно сократить

$a = 2^x \cdot 7^y$

$b =$

$c =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!