



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{cases}$$

Пусть $x, y, z \in \mathbb{N}$. Тогда можно записать:

$$\begin{cases} ab = x \cdot 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc = y \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac = z \cdot 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{cases}$$

Перемножим три равенства: $(abc)^2 = xyz \cdot 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$

то $abc = \sqrt{xyz} \cdot 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26}$. Значит, $\sqrt{xyz} \in \mathbb{N}$,

т.е. xyz — полный квадрат. Тогда каждое из чисел x, y, z делится на 3.

② перемножим первые два и поделим на 3-е:

$$b^2 = \frac{xy}{z} \cdot 2^2 \cdot 3^9 \cdot 5^{-4} \quad \text{т.к. } b^2 \in \mathbb{N}, \text{ то } \frac{5^4 xy}{z} \in \mathbb{N}$$

Значит, $xy \div 5^{14}$.

$$\Rightarrow abc \geq 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26}$$

т.е. $xyz \geq 5^4 \cdot 3$. Приведем пример, когда это так:
($x=y=5^2, z=3$)

$$\begin{cases} ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13} \\ b = 2^2 \cdot 3^4 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{28} \end{cases}$$

и $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$$

① т.к. $\forall t \in [-1; 1]$ $\arccos(t) + \arcsin(t) = \frac{\pi}{2}$, то исходное уравнение равносильно следующему:

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 5\pi - 10\arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10\arcsin(\sin x) = 4\pi - 2x \Leftrightarrow -5\arcsin(\sin x) = 2\pi - x.$$

② т.к. $\arcsin(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $-5\arcsin(t) \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Тогда $(2\pi - x)$ также должен лежать на этом отрезке:

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2\pi - x \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{2} - 2\pi \leq -x \leq \frac{5\pi}{2} - 2\pi \Leftrightarrow -\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

③ Рассмотрим решение на рассмотрение нескольких случаев, в зависимости от которых будет разное значение $\arcsin(\sin x)$.

1) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\arcsin(\sin x) = x$ и получаем след. равенство:

$$-5x = 2\pi - x \Leftrightarrow 4x = -2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{— решение, т.к. } -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

2) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Тогда заметим, что $-\frac{3\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi - \frac{3\pi}{2} \leq \pi - x \leq \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}. \quad \text{Тогда значит, } \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) \Leftrightarrow$$

$$= \pi - x \quad \left(\text{Здесь мы воспользовались тем, что } \sin(x) = \sin(\pi - x) \text{ для}$$

любого $x \in \mathbb{R}\right)$. Получаем:

$$-5\pi + 5x = 2\pi - x \Leftrightarrow 6x = 7\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} \quad \text{— решение, т.к. } \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6} \leq \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3) $x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$, тогда $\frac{3\pi}{2} - 2\pi \leq x - 2\pi \leq \frac{5\pi}{2} - 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x - 2\pi \leq \frac{\pi}{2}$. А т.к.

$\sin(x - 2\pi) = \sin(x)$, то $\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x - 2\pi)) = x - 2\pi$. Получим:

$-5x + 10\pi = 2\pi - x \Leftrightarrow 8\pi = 4x \Leftrightarrow x = 2\pi$ — решение, ведь $\frac{3\pi}{2} =$

$1,5\pi \leq 2\pi \leq 2,5\pi = \frac{5\pi}{2}$.

4) $x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$. Опять заметим, что $\frac{5\pi}{2} - 6\pi \leq x - 3\pi \leq \frac{7\pi}{2} - 6\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq$

$x - 3\pi \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда $\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 3\pi - x \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда воспользуемся

свойствами синуса и арксинуса: $\arcsin(\sin(x - 3\pi)) = \arcsin(\sin(3\pi - x)) =$
 $= \arcsin(\sin(x))$. Значит, $\arcsin(\sin(x)) = 3\pi - x$ и мы получаем:

~~$5x - 15\pi = 3\pi - 2x \Leftrightarrow 7x = 18\pi \Leftrightarrow x = \frac{18\pi}{7}$~~

$5x - 15\pi = 2\pi - x \Leftrightarrow 6x = 17\pi \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{6}$. Т.к. $\frac{17\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$,

то, очевидно, $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$ — значит, решение

5) последний случай? $x \in [\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$. Тогда $-\frac{\pi}{2} \leq x - 4\pi \leq \frac{\pi}{2}$ и

$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x - 4\pi)) = x - 4\pi$. Получим:

или $-5x + 20\pi = 2\pi - x \Leftrightarrow 4x = 18\pi \Leftrightarrow x = \frac{9\pi}{2}$ — очевидно, решение.

Можно записать ответ:

Ответ: $x \in \{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

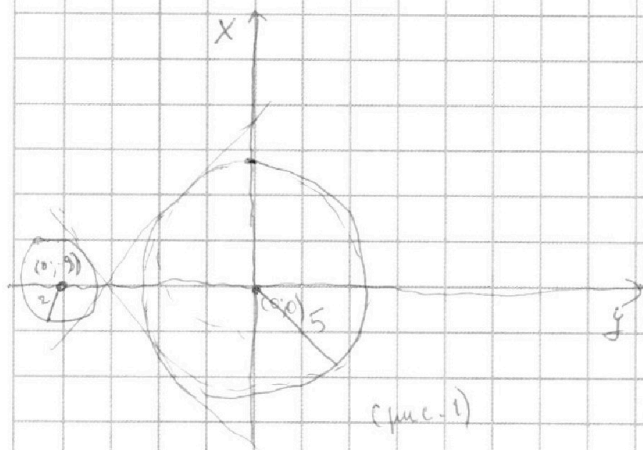


$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \quad L=5$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 - 4 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$L=5 \quad \begin{cases} x = -\frac{6}{5}ay + \frac{6}{5} & (1) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & (2) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 & (3) \end{cases} \end{cases} \quad L=4$$

Введем новые координаты Ox



Первое уравнение задает прямую вида $kx + by + d = 0$, где $k = -\frac{6a}{5}$, $d = \frac{6}{5}$.

Второе и третье задают две окружности: с центром в $(0; 0)$ и радиусом 5, и с центром в $(0; -9)$ и радиусом 2. (рис. 1)

Рассмотрим несколько случаев.

1) $a = 0$. Тогда при $b = 0$ получаем прямую $x = 0$; очевидно, что она пересекает окружности в 4-х точках, т.е. система имеет 4 решения. $a = 0$ подходит.

2) $a \neq 0$, тогда $k \neq 0$. Понятно, что если k и b таковы, что касательная к большей окружности прямая касается или не пересекает меньшую окружность, то решение максимум 2: ведь чтобы иметь 3 пересечения со второй и с меньшей окр-стью, прямая должна находиться еще ниже. Но т.к. k не меняется, то прямая будет иметь ниже большей окр-сти.

Найдем k , при которых касательная касается обеих окр-стей:

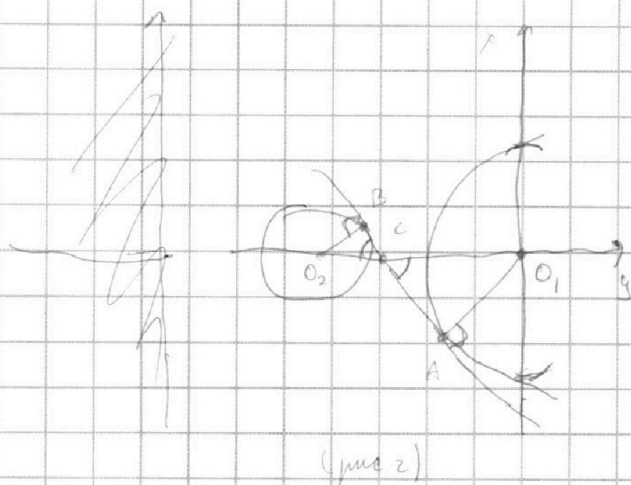
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



т.к. $\angle O_2BC = \angle O_1AC$ и $\angle O_2CB = \angle O_1CA$, то

$\angle O_2BC = \angle O_1CA$, то

$\triangle O_2BC \sim \triangle O_1AC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{O_2C}{AC} = \frac{O_1B}{OA} = \frac{2}{5}$$

А т.к. $O_2C + CO_1 = O_1O_2 = 3$, то

$$O_2C = 2 \cdot \frac{3}{7} \quad \text{и} \quad O_1C = 5 \cdot \frac{3}{7}$$

Тогда $\tan k = \tan \angle O_1CB = -\tan \angle O_2CB = -\tan \angle O_2CB =$

$$= -\frac{O_2B}{BC} \quad BC \text{ найдем по Т. Пифагора: } BC^2 = O_2C^2 - O_2B^2 = 4 + 4 \cdot \frac{81}{49} =$$

$$= 4 \left(\frac{81+49}{49} \right) = \frac{4}{49} \cdot 32 \quad \text{и} \quad BC = \frac{2}{7} \sqrt{32}$$

$$\text{Тогда } k = -\frac{2}{\frac{2}{7} \sqrt{32}} = -\frac{7}{\sqrt{32}}$$

Решим, что при $k < -\frac{7}{\sqrt{32}}$ ситуация будет ещё хуже: т.е. касания с большей окр. стало меньше не будет иметь одного каска с меньшей. Зато $k > -\frac{7}{\sqrt{32}}$ покажет, все ~~линии~~ касания будут пересекать меньшую окр. и касаться большой - просто будет её "пронзать", увеличив a , и будет 4 пересечения.

$$k > -\frac{7}{\sqrt{32}} \Leftrightarrow \frac{a}{5} < \frac{7}{\sqrt{32}} \quad \text{т.е.} \quad a < \frac{35}{6.4\sqrt{2}} = \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

3) $a < 0$. Очевидно, что ситуация аналогична, ответом будет

$$a > -\frac{35}{24\sqrt{2}}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11}^3 \frac{1}{12} - 5$. Предположим ненулевое выражение

справа: $\log_{11}^3 \frac{1}{12} - 5 = \log_{11}^3 (11^{-3}) - 5 = -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5$. Запишем
исходное уравнение, перенеся всё ненулевое (всё, кроме -5):

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x + \frac{2}{3} \log_{11} x = -5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \log_{11} x = -5$$

② Аналогично предположим и умножим на условие с переменной y , сделав замену $z = 0,5y$ (тогда $z^3 = 0,6^3$, $y^3 = 0,125 \cdot y^3$):

$$\log_{11}^4(z) + \log_{11} z = \log_{11}^3(11^{-3}) - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4(z) + \log_{11} z + \frac{13}{3} \log_{11} z = -5$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4(z) + \frac{16}{3} \log_{11} z = -5$$

③ Теперь заметим, что если первое уравнение имеет корень x_0 , то второе уравнение имеет корень $\frac{1}{x_0}$. Действительно:

Во-первых $x_0 > 0$ и $x_0 \neq 1$. Значит и $\frac{1}{x_0} > 0$, $\frac{1}{x_0} \neq 1$ - второе выражение тоже имеет смысл. Подставим $z = \frac{1}{x_0}$:

$$\log_{11}^4\left(\frac{1}{x_0}\right) + \frac{16}{3} \log_{11}\left(\frac{1}{x_0}\right) = -5 \Leftrightarrow (-\log_{11}(x_0))^4 - \frac{16}{3} \log_{11}(x_0) = -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4 x_0 - \frac{16}{3} \log_{11}(x_0) = -5 \quad - \text{ что верно, ввиду предположения, что } x_0 - \text{ корень первого уравнения.}$$

Итак, что x_0 - корень первого уравнения.

Аналогично, если второе уравнение имеет корень z_0 , $(z_0 > 0, z_0 \neq 1)$, то первое имеет корень $\frac{1}{z_0}$ ($\frac{1}{z_0} > 0, \frac{1}{z_0} \neq 1$):

$$\log_{11}^4 \frac{1}{z_0} - \frac{16}{3} \log_{11}\left(\frac{1}{z_0}\right) = -5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 z_0 + \frac{16}{3} \log_{11}(z_0) = -5 -$$

что тоже верно по предположению.

Из этого всего мы заключаем, что x_0 - корень первого тогда и только тогда, когда $\frac{1}{x_0}$ - корень второго.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ Осталось заметить, что первое уравнение имеет единствен-
ный действительный корень. Действительно это так: пусть

$x = \cos \theta$, $\theta \neq 0$. Тогда первое уравнение принимает вид

$$\frac{1}{2\theta} + \frac{16}{3}\theta = -5 \Rightarrow \frac{1}{2\theta} = -\frac{16}{3}\theta - 5.$$

рассмотрим $f(\theta) = \frac{1}{2\theta}$ и $g(\theta) = -\frac{16}{3}\theta - 5$. Попробуем, что

при $\theta > 0$ $f(\theta) > 0$ и $g(\theta) < 0$ — решений $f(\theta) = g(\theta)$ нет.

Но при $\theta < 0$ $f(\theta)$ — монотонно возрастающая функция
($f'(\theta) = -4 \cdot \frac{1}{\theta^2} > 0$ для всех $\theta < 0$), а $g(\theta)$ — монотонно убыв-
щая ($g'(\theta) = -\frac{16}{3}$). Значит, если и есть пересечение, то оно
единственное.

Для доказательства существования этого пересечения, введём

$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$. Заметим, что $h(\theta) \rightarrow -\infty$ при $\theta \rightarrow (-\infty)$
(т.к. при $\theta \rightarrow -\infty$ $f(\theta) \rightarrow 0$ и $g(\theta) \rightarrow -\infty$), а при

Заметим, что $h(-3) = \frac{1}{-6} - 16 + 5 = -11 + \frac{1}{3} < 0$ — что меньше

0, т.к. $\frac{1}{3} < 1 < 11$. Зато при $h(-\frac{1}{2}) = 16 - \frac{2}{3} + 5 = 21 - \frac{2}{3} = \frac{25}{3} > 0$.

$f(\theta)$ и $g(\theta)$ непрерывны на интервале $(-3; -\frac{1}{2})$ — значит, и непре-
рывна $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$. Тогда по теореме о промежуточных

значениях: $h(-3) < 0$, $h(-\frac{1}{2}) > 0 \Rightarrow \exists t \in (-3; -\frac{1}{2}) : h(t) = 0$

$\Leftrightarrow f(t) = g(t)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) И так, единственность решения (а оно ~~существование~~ ^{уравнения}) доказана. Так как x_0 - корень первого $\frac{1}{2}x$ - корень второго, то x и второе единственность корень.

Пусть x_0 действительное корень первого. Тогда второе уравнение имеет корень $t = \frac{1}{x_0} \Rightarrow \frac{1}{2}t = \frac{1}{x_0} \Rightarrow y = \frac{2}{x_0}$

в) Таким образом xy принимаем единственное значение
 $xy = x_0 \cdot \frac{2}{x_0} = 2$

Ответ: $xy = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

