МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\nu_p(X)$ — это максимальное $t \in \mathbb{Z}$, что $X \,\vdots\, p^t$.

$\nu_7(abc) = \nu_7(a) + \nu_7(b) + \nu_7(c)$. по условию $\nu_7(ac) = \nu_7(a) + \nu_7(c) \geq 39$

значит $\nu_7(abc) \geq \nu_7(ac) \geq 39$.

$\nu_2(ab) \geq 15$; $\nu_2(bc) \geq 17$; $\nu_2(ac) \geq 23$ по условию.

$\nu_2(abc) = \nu_2(a) + \nu_2(b) + \nu_2(c) = \dfrac{\nu_2(ab) + \nu_2(ac) + \nu_2(bc)}{2} \geq \dfrac{15+17+23}{2} \geq \dfrac{55}{2} = 27{,}5$

т. к. $\nu_2(abc) \in \mathbb{Z}$, то $\nu_2(abc) \geq 28$.

$\begin{cases} \nu_7(abc) \geq 39 \\ \nu_2(abc) \geq 28 \end{cases} \Rightarrow abc \geq 2^{28} 7^{39}$. пример когда $abc = 2^{28} 7^{39}$:

$\begin{cases} a = 2^{11} 7^{11} \\ b = 2^{5} 7^{0} \\ c = 2^{12} 7^{28} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть p — простое число $\neq 3$ и $\begin{cases} a+b \equiv_p 0 \\ a^2-7ab+b^2 \equiv_p 0 \end{cases}$

$a^2-7ab+b^2=(a+b)^2-9ab.$

$a+b\equiv_p 0$; $(a+b)^2-9ab \equiv_p -9ab \equiv_p 0 \Rightarrow$ т.к. $p\neq 3$, то $\left[\begin{array}{l} a\equiv_p 0 \\ b\equiv_p 0 \end{array}\right.$, т.к. $a+b\equiv_p 0$,

то $a \vdots p$ и $b \vdots p$, тогда $\frac{a}{b}$ сократима, чего не может быть,

значит m не кратно простым кроме 3, значит $m=3^k$

пусть $k\geq 3$, тогда $a+b \vdots 3^3$, $(a+b)^2 \vdots 3^6$, что бы $(a+b)^2-9ab \vdots 3^3$,

надо что бы $-9ab \vdots 3^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \vdots 3 \\ b \vdots 3 \end{array}\right.$, т.к. $a+b \vdots 3$, то $\begin{cases} a \vdots 3 \\ b \vdots 3 \end{cases}$, значит $\frac{a}{b}$ сокр,

значит $k\leq 2$, и $m\leq 3^2=9$.

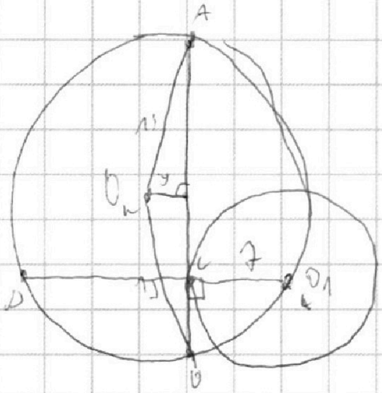
Пример на $m=9$: $a=4$; $b=5$.

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{16-140+25} = \frac{9}{-99} = \frac{1}{-11}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O_1 – центр ω; O_2 – цент Ω

$D = O_1C \cap \Omega \setminus O_1$.

Пусть $AB = 24 \cdot x$.

Пусть y – расстояние от O_2 до AB, по т. Пифагора

$y^2 = 13^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 13^2 - (12x)^2$

$CD = 2 \cdot y + 7$ т. к. $O_1D \perp AB$.

Т. к. AO_1BD впис, то $17x \cdot 7x = 7 \cdot (2y + 7) \Leftrightarrow 17x^2 = 2\sqrt{13^2 - 12x^2} + 7$.

Если $x = 1$, то $17 = 2 \cdot \sqrt{13^2 - 12^2} + 7 = 2 \cdot \sqrt{5^2} + 7 = 10 + 7$.

Если $x < 1$, то $17x^2 < 17 = 2 \cdot \sqrt{13^2 - 12^2} + 7 < 2\sqrt{13^2 - 12x^2} + 7 -$

$\Rightarrow x \geq 1$.

Если $x > 1$, то $17x^2 > 17 = 2 \cdot \sqrt{13^2 - 12^2} + 7 > 2\sqrt{13^2 - 12x^2} + 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \leq 1$.

Значит $x = 1$, и $AB = 24$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

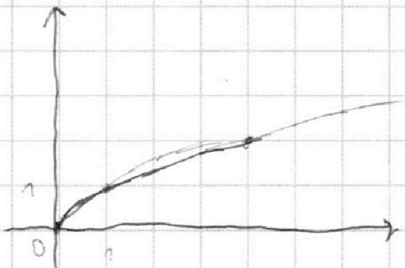
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$Q = 3x^2+3x+1$; $P = 1-9x$

$P = \sqrt{Q+P} - \sqrt{Q}$



$f(x) = \sqrt{x}$, $(Q+P)-(Q) = f(Q+P) - f(Q) =$

$\Rightarrow Q, P$ – координаты по O_x точек пересечения $y=\sqrt{x}$ и прямой с угловым коэффициентом 1. Тогда $\begin{cases} Q \in [0;1] \\ QP \in [0;1] \end{cases}$

~~1) $P \in [0;1] \Rightarrow 1-3x \in [0;1] \Rightarrow x \in [0;\frac{1}{3}]$~~

1) $Q \in [0;1]$, $\forall Q > 0$ т.к. $Q = 3x^2+3x+1$. $3x^2+3x+1 \le 1 \Rightarrow 3x(x+1) \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [-1;0]$

~~$\Rightarrow x \in [0;\frac{1}{3}] \cap [-1;0] = \{0\}$. проверка при $x=0$:~~

~~$\sqrt{3\cdot 0^2 - 6\cdot 0^2 + 2}$~~

2) $P+Q \in [0;1]$: $P+Q = 3x^2-6x+2 = (\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2-1 = (\sqrt{3}x-\sqrt{3}-1)\cdot$

$\cdot(\sqrt{3}x-\sqrt{3}+1)$. $P+Q+1 = 3x^2-6x+3 = (\sqrt{3}x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$\Rightarrow x \in \left[\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}; \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]$

< -1

$\Rightarrow x \in \left[\frac{-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}; \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

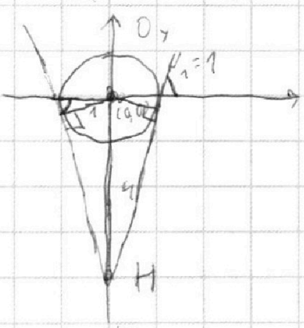
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

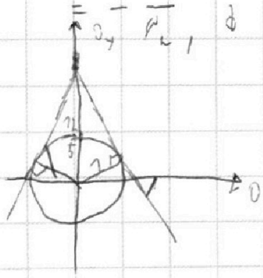
продолжение пункта 3, а):

Т.к. окружности разного радиуса, то такая точка существует. $O_1=(0,0)$; $O_2=(0,12)$; $r_1=1$; $r_2=4$.

Гомотетия при которой $\omega(O_1,r_1)\to\omega(O_2,r_2)$ имеет положительный коэффициент $\frac{r_2}{r_1}$ и центр в точке H на прямой O_1O_2, что $\frac{O_1H}{O_2H}=\frac{r_1}{r_2} \Rightarrow H=(0,-4)$. ~~угол между касательной и~~ ~~$O_1O_2=\pm\arcsin$~~ тогда угол между касательной и осью O_x $=\pm\frac{\pi}{2}\pm\arcsin\frac{1}{4}$ и угловой коэффициент прямой $=\pm tg\left(\frac{\pi}{2}\pm\arcsin\frac{1}{4}\right)$ или $=\pm\frac{4}{1\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}}=\pm\sqrt{15}$



б) внутренняя касательная, тогда коэф. гомотетии $\omega(O_1,r_1)\to\omega(O_2,r_2)$ $=-\frac{r_2}{r_1}$, а центр в точке $H\in O_1O_2$, что $\frac{O_1H}{O_2H}=\frac{r_1}{r_2} \Rightarrow H=\left(0,\frac{12}{5}\right)$



Тогда угл. коэф. прямой $=\pm\frac{\frac{12}{5}}{1\cdot\frac{\frac{12}{5}}{\sqrt{(\frac{12}{5})^2-1}}}=$

$=\pm\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2-1}=\pm\frac{\sqrt{12^2-5^2}}{5}=\pm\frac{\sqrt{119}}{5}$

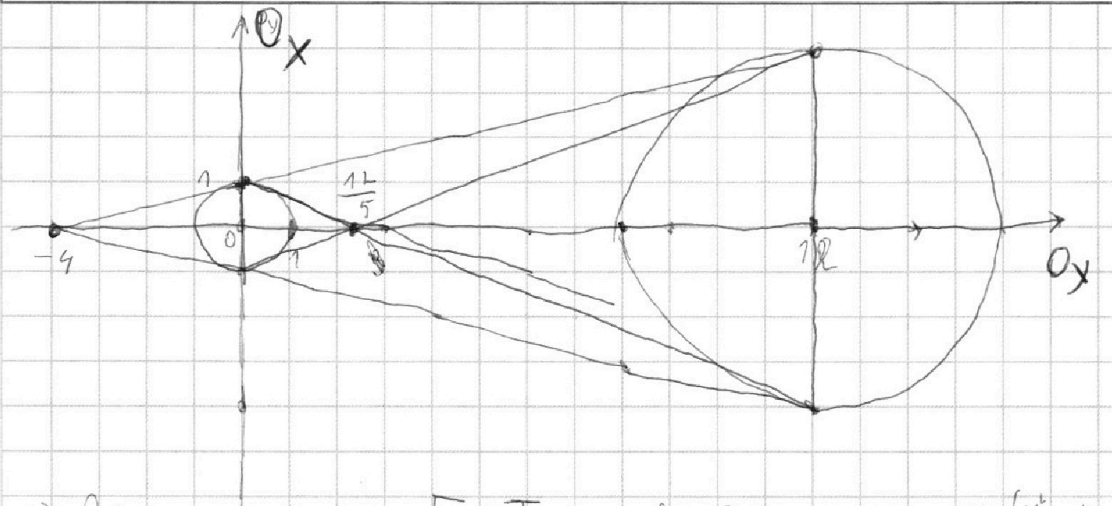
Итого угловой коэф. прямой $\alpha\in\left\{\pm\sqrt{15},\pm\frac{\sqrt{119}}{5}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha\in\left\{\pm\sqrt{15},\pm\frac{\sqrt{119}}{5}\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Рассмотрим ГМТ ~~...~~ (x, y), что нер-во $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)$ ≤ 0 выполняется:

a) $(x^2+y^2-1)\leq 0 \iff x^2+y^2\leq 1$ — это уравнение круга $\omega((0,0), 1)$.

b) $(x^2+(y-12)^2-16)\leq 0$ ~~...~~ — это уравнение круга $\omega((0,12), 4)$.

Отметим их на рисунке выше (верт. ось — Ox, горизонтальная — Oy). Заметим, что нер-во выполняется для каждой точки внутри или на границе обоих кругов.

2) $ax+y-8b=0 \iff y=-ax+8b$ — это уравнение прямой.

3) Для выполнения условия необходимо, чтобы пересечение прямой и кругов было в 2 точках, значит прямая должна касаться обоих кругов. Теперь найдем все касательные:

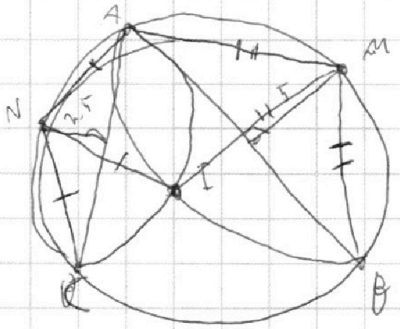
a) Внешние касательные: они проходят через центр гомотетии, которая переводит одну окружность в другую с положительным коэффициентом.

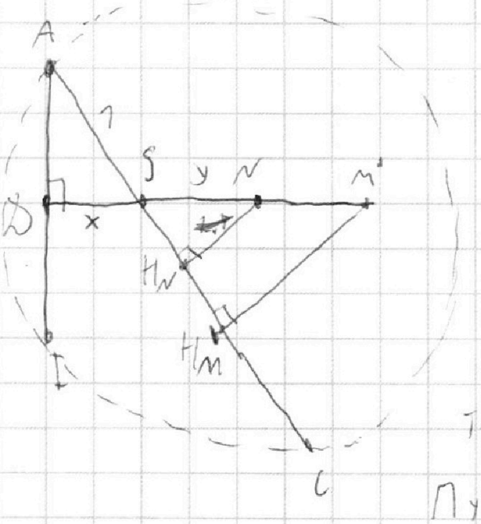
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





по Т. о трезубце $\begin{cases} AN = NI = CN \\ AM = MI = BM. \end{cases}$

Сделаем симметрию отн. AI. $M \to M'$

Т.к. у ~~окруж~~ $\omega(N, NA) \cap \omega(M, MA) = \{A, I\}$, то $\{M, N\} \subset$ сер. пер. AI.

D – сер. AI. $S = AC \cap DN$, H_N – осн. перп. из N на AC, H_M – осн. перп. из M на AB. $H_M \to H_M'$ после сим. Т.к. AI – бис. $\angle BAC$ то $AB \to AC$.

Пусть изначально $DS = x \cdot AS$, тогда найдем такие y, что $SN = y \cdot AS$ и не противоречит условию.

$\begin{cases} \Delta SNH_N \sim \Delta SM'H_M' \\ \frac{M'H_M'}{NH_N} = \frac{5}{2.5} = 2 \end{cases}$ и $\Rightarrow SM' = 2 \cdot y \cdot AS$. $\begin{cases} \angle ADS = 90° = \angle SH_NN \\ \angle DSA = \angle NSH_N \end{cases} \Rightarrow \Delta ADS \sim \Delta NH_NS$

значит $SH_N = H_NH_M' = x \cdot y \cdot AS$. $AH_N = H_NC \Rightarrow H_M'C = AS$.

Т.к. ANCM – впис, и $AC \cap NM = S$, то $AS \cdot SC = MS \cdot NS =$
$= AS \cdot (2 \cdot x \cdot y \cdot AS + AS) = (y \cdot AS) \cdot (2 \cdot (x + y) \cdot AS \quad \Big| : AS^2$

$2xy + 1 = y \cdot 2(x+y) = 2xy + 2y^2 \quad \Big| -2xy \quad 1 = 2y^2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\Delta ADS \sim \Delta NH_NS \Rightarrow AD = NH_N \cdot \frac{1}{y} = 2.5 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2.5 \cdot \sqrt{2} = \frac{AI}{2} \Rightarrow AI = 5\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

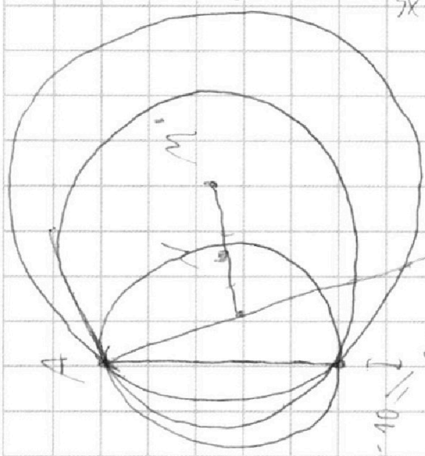
МФТИ

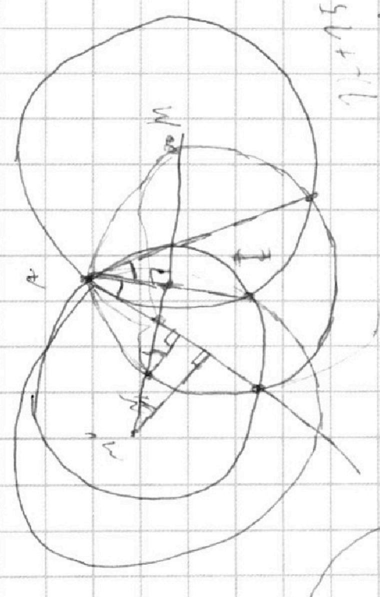
4 + 4 + 4 + + + 5 + 6

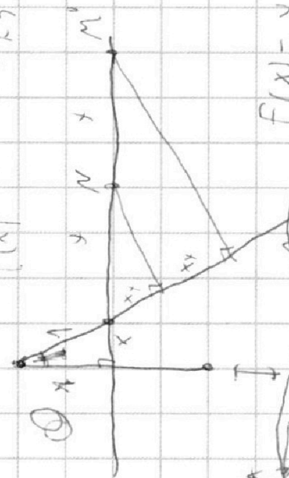
$3x^2+3x+1 \leqslant 1 \Rightarrow$

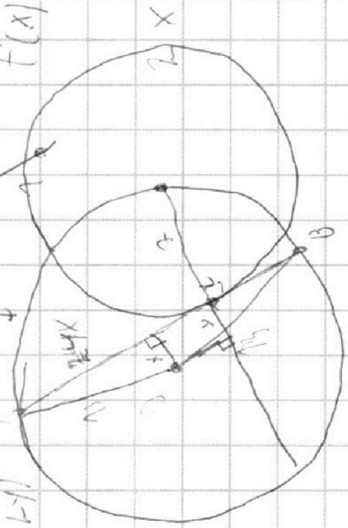
$3x^2+3x = 3x(x+1) \leqslant 0$

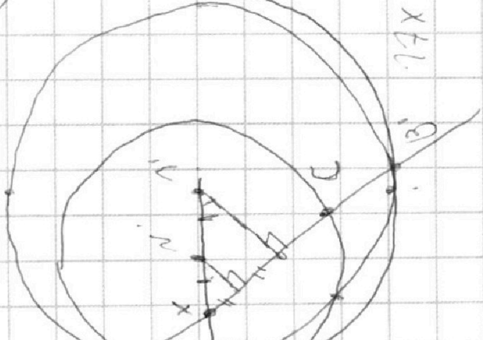
$x \in [-1;0]$

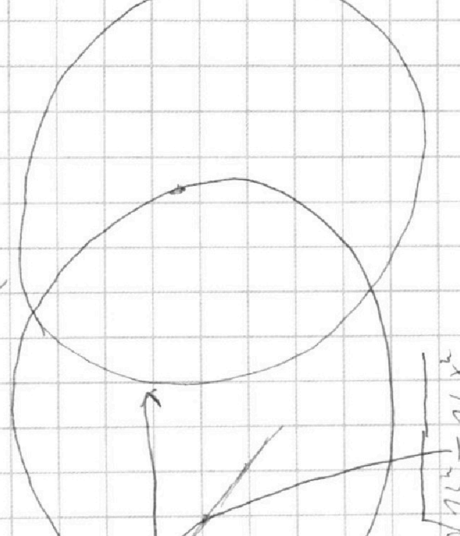


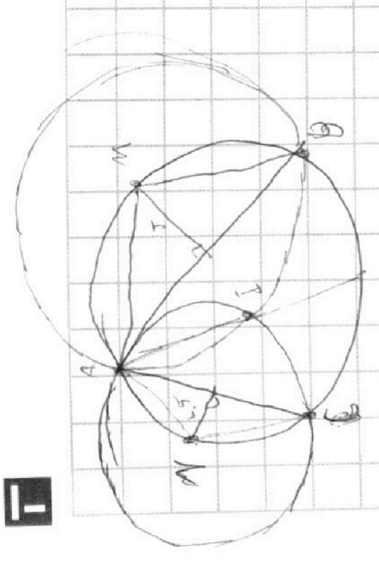












$P = 1-9x$

$Q = 3x^2+3x+1$

$P = \sqrt{Q+P} - \sqrt{Q}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!