



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из условия:

$$\begin{cases} ab = k_1 \cdot 2^8 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc = k_2 \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac = k_3 \cdot 2^{18} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{cases} \quad k_1, k_2, k_3 - \text{некоторые натуральные коэффциенты}$$

Перемножив уравнения получим:

$$a^2 b^2 c^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{3+14+18} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+30}$$

$$a^2 b^2 c^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$abc = \sqrt{k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{26} = \sqrt{15}$$

$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{k_1 k_2 k_3} = n\sqrt{15}$, где $n \in \mathbb{N}$
 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$

$$abc = n \cdot 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

Очевидно, что тем меньше n , тем меньше $abc \Rightarrow$

$\Rightarrow$ наименьший abc при $n=1 \Rightarrow abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5}{2}\pi - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = \frac{4}{2}\pi$$

$$6x = \frac{4}{2}\pi$$

$$x = \frac{2}{6}\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{6 ОДЗ.}$$

Проверка:

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$5 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + 2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} = 5 \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{ОДЗ: } -\frac{\pi}{2} \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{при любых } x \Rightarrow$$

$$-2 \leq \sin x \leq 2 \quad \text{нет.}$$

$$\text{ОДЗ: } -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{выполнено при любых } x.$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \quad \text{т.к. } \arcsin(1) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 36) = 0 \end{cases}$$

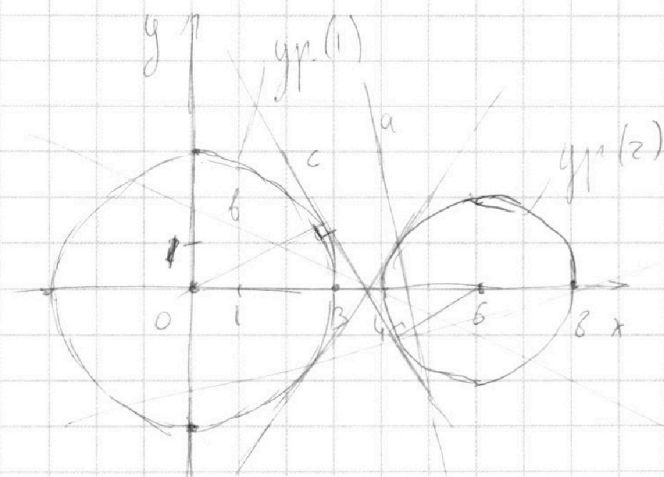
Второе уравнение эквивалентно совокупности:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \quad (1) \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \quad (2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Это уравнение окружностей.} \\ (1) \text{ вершина } (0; 0) \quad R=3 \\ (2) \text{ вершина } (6; 0) \quad R=2 \end{array}$$

Изобразим их на графике:



Чтобы система имела
4 решения, прямая
 $ax + 2y - 3b = 0$
должна пересекать обе
окружности при
некотором b .

Очевидно, что если модуль углового коэффициента
прямой больше ^{либо равен} модулю углового коэффициента
касательной (прямые a и c) к обеим окружностям, то
пересечь прямую с обеими окружностями невозможно
при модуле b . Если модуль меньше, то пересечение
возможно (прямая b).

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

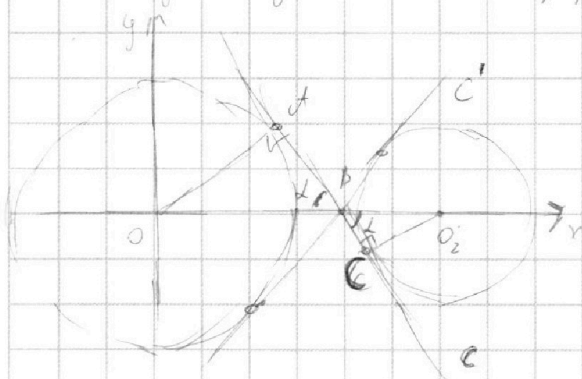
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(продолжение)

Найдем угловой коэффициент касательной c и c'



Проведем радиусы в точку касания.
Тогда $\triangle OAB \sim \triangle BCO_2$ по углам:
1) вертикальные $\angle$
2) прямые $\angle OAB$ и $\angle O_2CB$

$$\text{Тогда } \begin{cases} OB = AO = \sqrt{9} = 3 \\ O_2B = O_2C = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

$$OB + BO_2 = OO_2 = 6$$

$$\begin{cases} 2OB = 3O_2B \\ OB + O_2B = 6 \end{cases} \Rightarrow OB + \frac{2}{3}OB = 6$$

$$\frac{5}{3}OB = 6$$

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \frac{OA}{OB} =$$

$$= \frac{3}{\frac{18}{5}} = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{угловой коэф. } c = k = \tan \alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}}$$

В силу симметрии относительно OO_2 (оси Ox) угловой коэф. c' : $k' = \tan \beta = \frac{5}{\sqrt{11}}$

Преобразуем уравнение $ax + 2y - 3z = 0$

$$2y = 3z - ax \Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}z$$

из сказанного выше

$$|-\frac{a}{2}| < \frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow -\frac{5}{\sqrt{11}} < \frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right).$$

$$-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_3 5y = \log_3 25y^2 (3'') - 8 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$
 $y > 0, 5y \neq 1$
 $y \neq \frac{1}{5}$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \frac{1}{2} \log_3 3^5 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_3 5y = \frac{1}{2} \log_3 3^5 - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_3 x - \frac{5}{2} \log_3 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_3 5y - \frac{5}{2} \log_3 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_3 x + 8 = 0 \\ \log_3^4 (5y) + \frac{7}{2} \log_3 5y + 8 = 0 \end{cases} \quad \text{вычитаем из первого второе:}$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 (5y) + \frac{7}{2} (\log_3 x - \log_3 5y) = 0$$

$$(\log_3 x + \log_3 (5y)) (\log_3 x - \log_3 (5y)) (\log_3^2 x + \log_3^2 (5y)) + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 5y} \right) = 0$$

$$(\log_3 x + \log_3 (5y)) ((\log_3 x - \log_3 (5y)) (\log_3^2 x + \log_3^2 (5y)) + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x - \log_3 5y}) = 0$$

$$\log_3 (5xy) = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

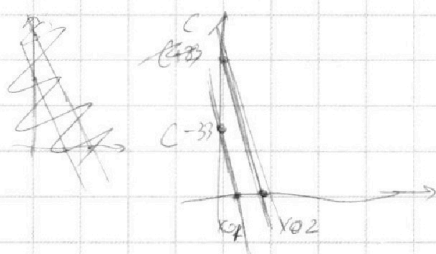
$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \quad (1)$$

$3x_2 + y_2 = 3x_1 + y_1 + 33 \rightarrow$ т.е. этому условию (1) удовлетворяют любые две точки лежащие на параллельх беге:

$$3x_1 + y_1 + C + 33 = 0 \Rightarrow y_1 = -3x_1 - C - 33$$

$$3x_2 + y_2 + C = 0 \Rightarrow y_2 = -3x_2 - C$$

~~и могут быть~~ и могут быть различными при различных значениях свободного члена C .



как видно из рисунка

$$\begin{aligned} x_{01} &= \frac{C-33}{3} = \frac{C}{3} - 11 \\ x_{02} &= \frac{C}{3} \end{aligned} \Rightarrow x_{02} - x_{01} = 11 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ параллель, на которых лежат

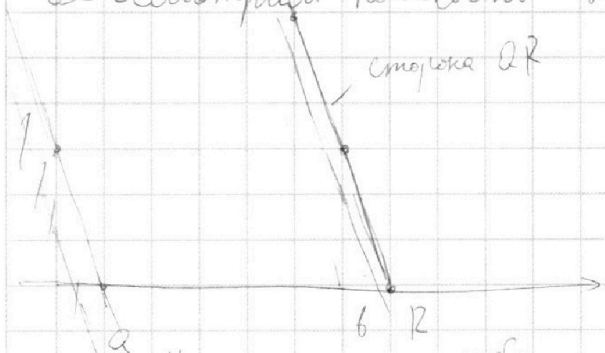
точки, удовлетворяющие условию (1) можно получить параллельным переносом одной из них на 11 вдоль оси Ox .

Заметим также, что две точек O и P :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{42 - 0}{-14 - 0} = -3 \Rightarrow \text{угловой коэффициент стороны } OP \text{ и } QR$$

равен -3 . ~~как видно~~ Легко заметить, что PQ и OR параллельны Ox .

Рассмотрим плоскость вокруг точки R .



Точки, удовл. усл. (1) для QR лежат на прямой $a \parallel QR$ и сдвинутой на 11 единиц влево вдоль Ox .

На QR лежат 15 точек с целыми координатами, не а (в пределах PQ и RO) точек. Поскольку усл. (1) выполн.

Низко для любых точек QR и a , то всего пар $15 \cdot 15 = 225$.
(см. следующий лист)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Еще (продолжение)
Если мы построим пару взаимных перпендикулярных прямых QR и a на единицу влево вдоль Ox , где не очевидно какое ~~много~~ пар точек тоже 225.

Повторив такую операцию 9 раз, получим, что прямая в которую перенесена прямая a совпадет с прямой $OP \Rightarrow$ при дальнейшем переносе точки не будут лежать внутри $OPQR \Rightarrow$ все пар прямых такого вида 10 $\Rightarrow$ на них лежит $225 \cdot 10 = 2250$ пар точек.

Но, если мы сдвинем QR и a на $\frac{1}{3}$ влево вдоль оси x , то получим прямые так же перпендикулярные друг другу с целыми координатами, причем лежащих внутри $PQRO$ будет по 14 на каждой прямой, т.е. $14 \cdot 4 = 136$ пар.

Из рассуждений, аналогичных рассуждениям для a и QR , получим, что таких пар ~~прямых~~ прямых 9 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ пар точек $9 \cdot 136 = 1764$.

$$\begin{array}{r} \times 136 \\ 9 \\ \hline 1764 \end{array}$$

Если мы к это семейство прямых сдвинем на $\frac{1}{3}$ влево вдоль оси Ox , то получим полностью аналогичные ему, содержащие еще 1764 пар точек.

Сдвинув их еще на $\frac{1}{3}$ получим, что они перейдут в прямые, сдвинутые относительно QR на целое число, т.е. уже рассмотренное семейство.

Мы двинули прямые на $\frac{1}{3}$ вдоль Ox , т.к. это эквивалентно их сдвигу вдоль Oy на 1, т.е. если сдвинуть прямую содержащую ~~целую~~ точки с целыми координатами, то и на полученной прямой такие точки найдутся.

Итоговое кол-во пар точек: $2250 + 1764 + 1764 = 5778$

$$\begin{array}{r} 2250 \\ + 1764 \\ + 1764 \\ \hline 5778 \end{array}$$

Ответ: 5778.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3 \log_3^5 x + 2 \log_3 x + \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_3^4 5y + 2 \log_3 5y = \frac{11}{2} \log_3 5y - 8$$

$$\log_3^4 5y + \frac{7}{2} \log_3 5y + 8 = 0$$

$$\log_3^5 5y + 8 \log_3 5y - \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_3 x + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x + \frac{7}{2} = 0$$

~~log~~

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y + \frac{7}{2} (\log_3 x + \log_3 5y) = 0$$

$$(\log_3^2 x - \log_3^2 5y)(\log_3^2 x + \log_3^2 5y) + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 5y} \right) = 0$$

$$(\log_3 x + \log_3 5y) (\log_3^4 x - \log_3^4 5y) (\log_3^2 x + \log_3^2 5y) + \frac{7}{2 \log_3 x \cdot \log_3 5y} = 0$$

$$\log_3^5 xy = 0$$

$$\log_3^5 x + \log_3^5 5y + 8 \log_3^5 xy = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

$$\log_a a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

~~log~~

$$\log_3^4 x + \log_3^3 x \log_3 5y + \log_3^2 x \log_3^2 5y +$$

$$a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4 + 8 = 0$$

$$(a-1)(a^2+b^2) + \frac{7}{2ab} = 0$$

$$a^3 + ab^2 + ba^2 - b^3 + \frac{7}{2ab} = 0$$

$$2a^4 b + 2a^3 b^2 + 2a^2 b^3 - 2ab^4 + 7 = 0$$



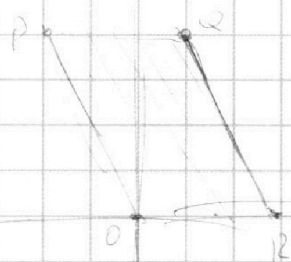
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 + y_2 = 3x_1 + y_1 + 33$$

$$3x_2 + y_2 + C = 0 \quad y_2 = -C - 3x_2$$

$$y_2 - y_1 = 3(1 + x_1 - x_2) \quad 3x_1 + y_2 + C + 33 = 0 \quad y_1 = -(-3x_1 - 33)$$

$$14 \cdot 14 \cdot 9 + 13 \cdot 13 \cdot 8 + 13 \cdot 13 \cdot 8$$

$$\begin{aligned} ab &: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc &: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac &: 2^{13} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{aligned}$$

~~ab \cdot bc~~

$$\begin{aligned} ab \cdot bc &= ac \cdot b^2 = 2^{23} \cdot 3^{23} \cdot 5^{23} \\ b^2 &= 2^4 \cdot 3^5 \end{aligned}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$\begin{aligned} abc &: 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27} \\ abc &= 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27} \end{aligned}$$

$$2a^4b + 2a^2b^3 - 2a^2b$$

$$(a-b)(a^2+b^2)$$

$$a^3 + ab^2 - a^2b - b^3 + \frac{7}{2ab} = 0$$

$$2a^4b + 2a^2b^3 - 2a^3b^2 - 2ab^4 + 7 = 0$$

$$2a^4b + 2a^2b^3 - 2a^3b^2 - 2ab^4 + 7 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ 2 = \frac{|6A+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases} \quad \begin{matrix} A=0 \\ B=2 \\ C=-36 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a^2+1 \\ 36/2 \\ (60-36)^2 = \frac{3}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 3a^2+12=9b^2 \\ 2a^2+8=6a^2-36ab+9b^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 6a-3b \\ (6a-3b)^2 = 36a^2+12 \\ (6a-3b)^2 = 2a^2+8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 18b^2 = (36a^2-36ab+9b^2) \\ 108a^2-108ab+9b^2=0 \\ 12a^2-12ab+b^2=0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 7a^2-36ab+4=0 \\ b = \frac{7a^2+4}{36a} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 324 \\ +285 \\ 609 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 18 \\ \times 8 \\ 144 \\ 1728 \\ 144 \\ 1672 \\ 45 \\ 167 \end{matrix} \quad \begin{matrix} b^2-12a \cdot b+4a^2=0 \\ D=144a^2-48a^2=96a^2 \\ \sqrt{D}=a\sqrt{96} \\ b=6a \pm a\sqrt{24} \\ b=a(6 \pm \sqrt{24}) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3a^2+12=9b^2 \\ 3a^2+12=9(49a^4+56a^2+16) \\ 3a^2+12=436a^2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 36 \\ \times 48 \\ 1288 \\ 144 \\ 1728 \\ 144 \\ 1672 \\ 45 \\ 167 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3b=18a+3\sqrt{24}a \\ a^2(18+8\sqrt{24})^2=a^2+12 \\ a^2(324+108\sqrt{24}+288-3\sqrt{24}) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 107a^4+1672a^2-16=0 \\ a^2 = \frac{12}{107} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1672-16=1672-2 \cdot 16 \cdot 2+1 \\ a_1, a_2, a_3, a_4=8 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a^5+8a+\frac{7}{2}=0 \\ b^5+8b-\frac{7}{2}=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a^4+\frac{7}{2}a+8=0 \\ b^4-\frac{7}{2}b+8=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a_1+a_2+a_3+a_4=8 \\ a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4=7 \\ \frac{8}{a_1}+\frac{8}{a_2}+\frac{8}{a_3}+\frac{8}{a_4}=\frac{7}{2} \\ \frac{2}{b_1}+\frac{2}{b_2}+\frac{2}{b_3}+\frac{2}{b_4}=\frac{7}{2} \end{matrix}$$



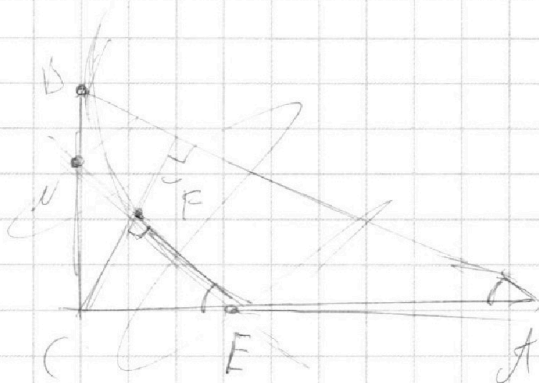
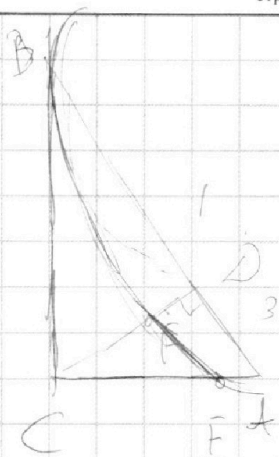
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \frac{\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5}{6}\pi = \frac{2}{6} + \frac{3}{6}\pi$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x^3 3 = \log_x^2 243 - 8 \\ \log_3^4 (3y) + 2 \log_{3y}^3 3 = \log_{3y}^2 (3^{14}) - 8 \end{cases}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x^3 3 = \frac{5}{2} \log_x^3 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x^3 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^2 x \cdot \log_x^2 3 + \frac{7}{2} \log_x^3 3 + 8 = 0$$

$$\begin{cases} x > 0 & x \neq 1 \\ 3y > 0 & y \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_3^3 x} + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3^2 x + \frac{7}{2} = 0$$

$$15 + 8t + \frac{7}{2} = 0$$

$$2t^5 + 16t + 7 = 0$$

[Handwritten signature]

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log b \cdot \log a = \log a \log b$$

$$\log_a b = \log_a a^{\log b} = \log b$$

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_a \log_2 2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{\log_2 a}$$

$$ax + by - 3b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 - 12x + y^2 = -32$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$1 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$A^2 + B^2 = C^2$$

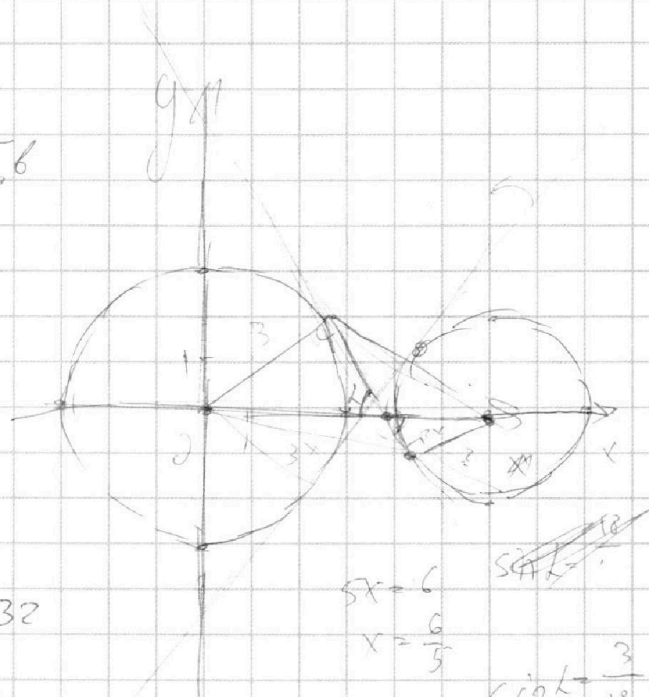
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$OE\left(-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}}\right)$$



$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

