



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- ✓ ① [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- ✓ ② [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- ✓ ③ [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- ✓ ④ [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- ✓ ⑤ [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- ↑ 6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
- а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
- б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1  $ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$  ~~где~~ где  $k; m; n \in \mathbb{N}$   
 $bc = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$  из-за делимости  $ab$   $ac$  и  $bc$   
 $ac = n \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$  на соответствующие числа

$a; b; c \in \mathbb{N} \Rightarrow$  ~~все~~ степень вхождения любого  
простого множителя в  $abc$  больше чем в  $ac$

(то же самое с  $abc^2$  и  $ab$ ;  $a^2bc$  и  $bc$ )

тогда степень вхождения 5 в  ~~$abc^2$~~  хотя бы

30 т.к в  $ac$  она 30. тогда степень вхождения

5 в  $a^2b^2c^2$  хотя бы  $30+30=60$

также т.к  $a; b; c \in \mathbb{N}$  степень вхождения любого  
простого числа в  $a^2b^2c^2$  — чётна

отсюда

степень вхождения — в  $a^2b^2c^2$  хотя бы —

|   |                                |
|---|--------------------------------|
| 2 | $9+14+19 = 42$                 |
| 3 | $10+13+18 = 41 \Rightarrow 42$ |
| 5 | 60                             |

итого  ~~$abc$~~   $a^2b^2c^2 = p^2 \cdot 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60}$  где  $p \in \mathbb{N}$

т.е.  $abc = p \cdot 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$  и данные в задаче условия достигаются при

$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$

$b = 2^2 \cdot 3^3$

$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{13}$

значит минимум  $abc$  это  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Ответ: минимум  $abc$  это  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



у2. Индекс у прямой - треугольник у которого смотрим площадь  
 окружность касается ВС в D и имеет  
 точки E и F  $\Rightarrow \angle FEB = \angle FBC$

$AB \parallel EF \Rightarrow \angle FEB = \angle EBA$

значит  $\angle EBA = \angle FBC$

в прямоугольном треугольнике ABC

$\angle EAB = \angle CAB = \angle DCB = \angle FCB$

$\begin{matrix} \angle EBA = \angle FBC \\ \angle EAB = \angle FCB \end{matrix} \Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle BCF$

отсюда  $\frac{CF}{BC} = \frac{AE}{AB}$

CFD - прямая  
 CEА - прямая  
 FE || AD

$\triangle CEF \sim \triangle CAD$

$\frac{CF}{CE} = \frac{CD}{AC}$

$$\frac{CD \cdot CE}{AC \cdot BC} = \frac{AC - CE}{AB}$$

$$\frac{CD \cdot AB}{AC \cdot BC} = \frac{AC}{CE} - 1$$

в прямоугольном  $\triangle ABC$  с высотой CD

$\angle CAD = \angle DCB$

$\angle CDA = \angle ACB = 90^\circ$

$\triangle CAD \sim \triangle ABC$

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{CD \cdot AB}{AC \cdot BC} = 1$$

$$\frac{AC}{CE} = 2$$

$$\frac{CE}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CAD \Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{S_{\triangle CAD}}{4}$$

$\angle CAD = \angle DCB$

$\angle CDA = \angle CDB = 90^\circ$

$\triangle ACD \sim \triangle BCD$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2}$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{BD \cdot CD}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{AD}{BD} = 3$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}}{\frac{S_{\triangle ACD}}{4}} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{16}{3}$$

Ответ:  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н3. сделаем замену  $x = \frac{\pi}{2} - t$   $t = \frac{\pi}{2} - x$   $x = \frac{\pi}{2} - t$ .

$$5 \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \pi - t$$

$$5 \arcsin(\sin(t)) = \pi - t.$$

или  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  или  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  т.е. или  $x \leq \pi$

$$t = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin p \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} \geq x + \frac{\pi}{2} \geq -\frac{5\pi}{2}$$

$$2\pi \geq x \geq -3\pi$$

или  $\frac{3\pi}{2} \geq x \geq \frac{\pi}{2}$

$\cos x \leq 0$   $\arcsin x < 0$   $\arcsin x < 0$   
 $x + \frac{\pi}{2} > 0$

или  $\frac{3\pi}{2} \geq t \geq \frac{\pi}{2}$

$$\arcsin(\sin(t)) = \pi - t.$$

$$5\pi - 5t = \pi - t \quad t = \pi \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

или  $\frac{5\pi}{2} \geq t \geq \frac{3\pi}{2}$

$$\arcsin(\sin(t)) = t - 2\pi \quad 5t - 10\pi = \pi - t \quad t = \frac{11}{6}\pi \quad x = -\frac{4}{3}\pi$$

или  $\frac{7\pi}{2} \geq t \geq \frac{5\pi}{2}$

$$\arcsin(\sin(t)) = 3\pi - t$$

$$15\pi - 5t = \pi - t \quad t = \frac{7}{2}\pi \quad x = -3\pi$$

или  $t > \frac{7\pi}{2} \quad x < -3\pi$

или  $-\frac{\pi}{2} \geq t \geq -\frac{3\pi}{2} \quad \arcsin(\sin(t)) = -\pi - t \quad -5\pi - 5t = \pi - t$

$$t = -\frac{6\pi}{4} = -1,5\pi$$

или  $t < -\frac{3\pi}{2} \quad x < -2\pi$

$$x = 2\pi$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{3} \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad x = -\frac{4\pi}{3} \quad x = -3\pi \quad x = 2\pi$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т.е. при

$$-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$$

можно найти в тесков, что будет 4 решения

$$\frac{10}{\sqrt{11}} > a > -\frac{10}{\sqrt{11}}$$

Ответ:  $\frac{10}{\sqrt{11}} > a > -\frac{10}{\sqrt{11}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x +$$

$$\log_x^4 3 + 6 \log_x 3 = 2,5 \log_x 3^5 - 8$$

$$\log_x^4 3 + 6 \log_x 3 = 2,5 \log_x 3 - 8$$

замени  $\log_x 3 = a$

$$a^{-4} + 3,5a + 8 = 0 \rightarrow \text{график!}$$

$$y = a^{-4}$$

$$y = -8 - 3,5a$$

корень один

$$\log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3^4 - 8$$

$$\log_{5y}^4 3 + 2 \log_{5y} 3 = 5,5 \log_{5y} 3 - 8$$

замени  $\log_{5y} 3 = b$

$$b^{-4} - 3,5b + 8 = 0 \text{ график:}$$

$$y = b^{-4}$$

$$y = 3,5b - 8$$

единств. корень

при этом если  $p$  - корень  $b^{-4} - 3,5b + 8 = 0$

то  $-p$  - корень  $a^4 + 3,5a + 8 = 0$

тогда

$$\log_{5y} 3 = -\log_x 3$$

$$\frac{\log_x 3}{\log_{5y} 3} = \log_{5y} x = -1$$

$$(5y)^{-1} = x \quad x \cdot y = \frac{1}{5y} \cdot y = \frac{1}{5} = 0,2$$

Ответ:  $xy = 0,2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

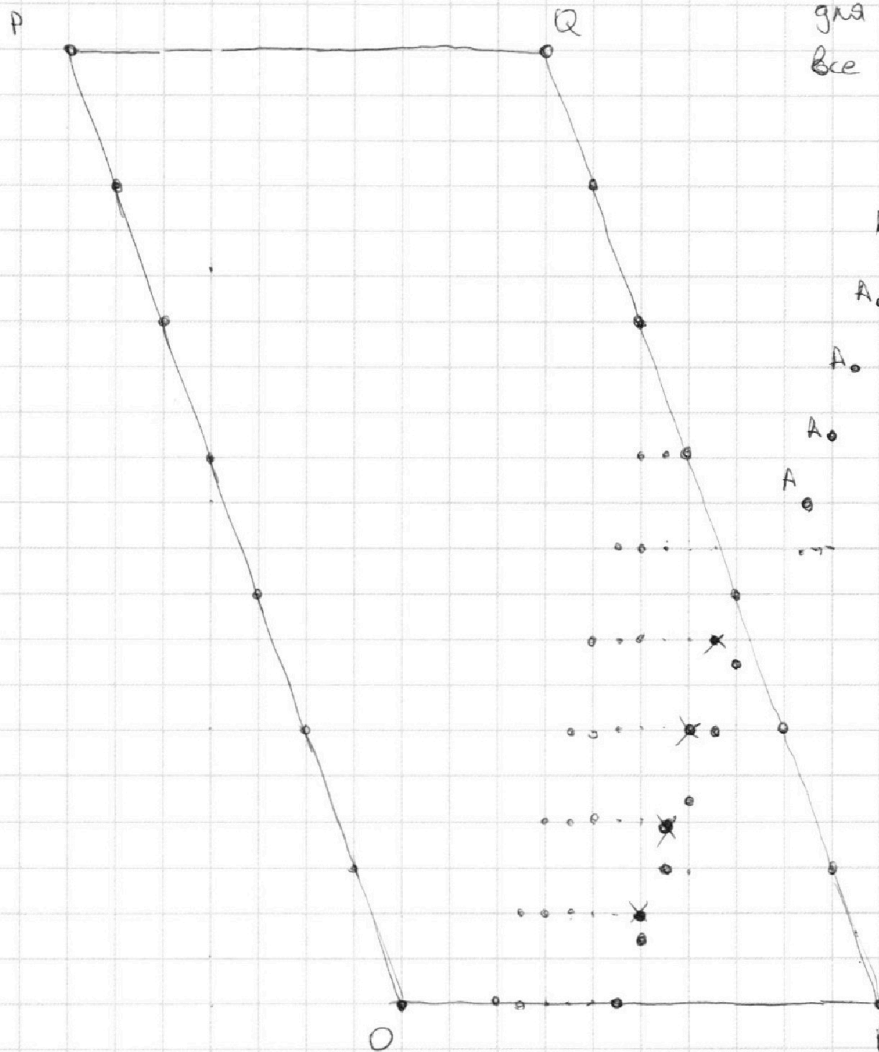
|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



для каждой <sup>то</sup> ~~точки~~ возможного положения В будем  
находить <sup>количество</sup> ~~все~~ возможных положений А и суммировать  
их  
поискать: (масштаб одна клетка это 2x2)



для точки В  
все возможные  
А: из-за  
натуральности  
координат  
и натуральности  
их разностей

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

$$\Delta x \in \mathbb{N}, \Delta y \in \mathbb{N}$$

наклон  
сторон параллело-  
грамма -3:1  
наклон  
положений  
А 3:1

из-за ГМТ А отн. В получим то для таких В  
А ГМТ А такое

для В в R с положением А.

будем сдвигать диагональ В  
влево и записывать кол-во  
А и В в полученных диагоналях.







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

| сдвиг по $x_i$ | в параллелограмме |    |       | $\Sigma =$ |
|----------------|-------------------|----|-------|------------|
|                | A                 | B  | A x B |            |
| 0              | 5                 | 1  | 5     | 6          |
| 1              | 78                | 1  | 87    | 13         |
| 2              | 76                | 2  | 14    | 27         |
| 3              | 8                 | 2  | 16    | 43         |
| 4              | 8                 | 3  | 24    | 67         |
| 5              | 9                 | 3  | 27    | 94         |
| 6              | 9                 | 4  | 36    | 130        |
| 7              | 10                | 4  | 40    | 170        |
| 8              | 10                | 5  | 50    | 220        |
| 9              | 11                | 5  | 55    | 275        |
| 10             | 10                | 6  | 60    | 335        |
| 11             | 11                | 6  | 66    | 401        |
| 12             | 10                | 7  | 70    | 471        |
| 13             | 11                | 7  | 77    | 548        |
| 14             | 10                | 8  | 80    | 628        |
| 15             | 11                | 8  | 88    | 716        |
| 16             | 10                | 9  | 90    | 806        |
| 17             | 11                | 9  | 99    | 905        |
| 18             | 10                | 10 | 100   | 1005       |
| 19             | 10                | 10 | 100   | 1105       |
| 20             | 9                 | 11 | 99    | 1204       |
| 21             | 9                 | 10 | 88 90 | 1294       |
| 22             | 8                 | 11 | 88    | 1382       |
| 23             | 8                 | 10 | 80    | 1462       |
| 24             | 7                 | 11 | 77    | 1539       |
| .              | 7                 | 10 | 70    | 1609       |
| 1              | 6                 | 11 | 66    | 1675       |
| 1              | 6                 | 10 | 60    | 1735       |
|                | 5                 | 11 | 55    | 1790       |
|                | 5                 | 10 | 50    | 1840       |
|                | 4                 | 10 | 40    | 1880       |
|                | 4                 | 9  | 36    | 1916       |
|                | 3                 | 9  | 27    | 1943       |
|                | 3                 | 8  | 24    | 1983       |
|                | 2                 | 8  | 16    |            |
|                | 2                 | 7  | 14    |            |
|                | 2                 | 7  | 14    |            |
|                | 1                 | 7  | 7     |            |
|                | 1                 | 6  | 6     | 2010       |



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

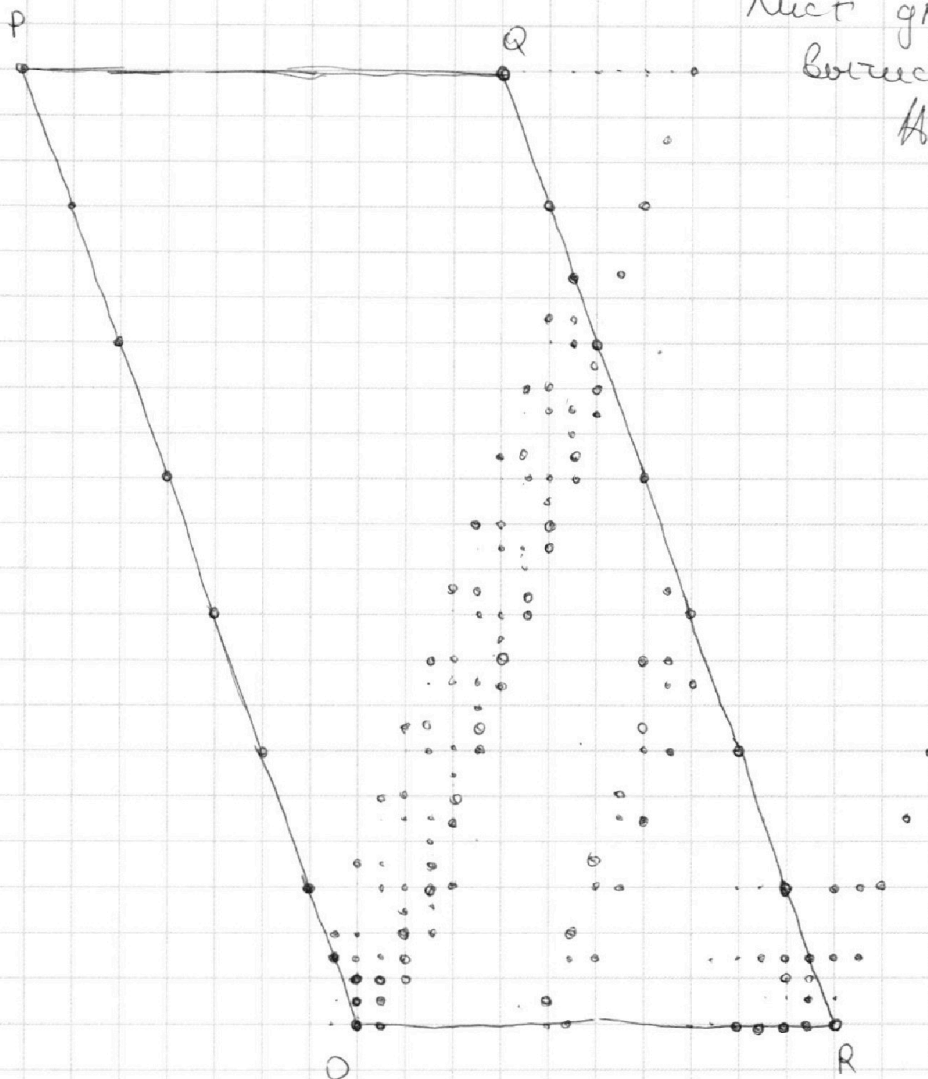
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Лист для  
вычисления  
A и B





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

для В на 1 выше и соответ. А.

| В   | А   |
|-----|-----|
| 1   | 6   |
| 1   | 7   |
| 2   | --- |
| 2   | --- |
| ... | 10  |
|     | 10  |
|     | 10  |
|     | --- |
|     | 9   |
|     | 9   |
|     | 9   |
|     | 9   |
|     | 10  |
|     | 10  |

170

6  
7  
14  
16  
24  
28  
36  
40

5  
5  
6  
6  
7  
7  
8  
8  
9  
9  
10  
10

| для В | на 2 выше |
|-------|-----------|
| В     | А         |
| 1     | 96        |
| 1     | 7         |
| 2     | ---       |
| 2     | ---       |
| ...   | 9         |
|       | 10        |
|       | 10        |
|       | ---       |
|       | 10        |
|       | ---       |
|       | 9         |
|       | ---       |

$$340 + 100 + 120 + \dots + 200$$

$$2(440 + 260 + 340 + 200) + 2010$$

$$2(700 + 540) \cdot 2 + 2010$$

$$1240 \cdot 2 + 2010$$

$$4490$$

Ответ: 4490

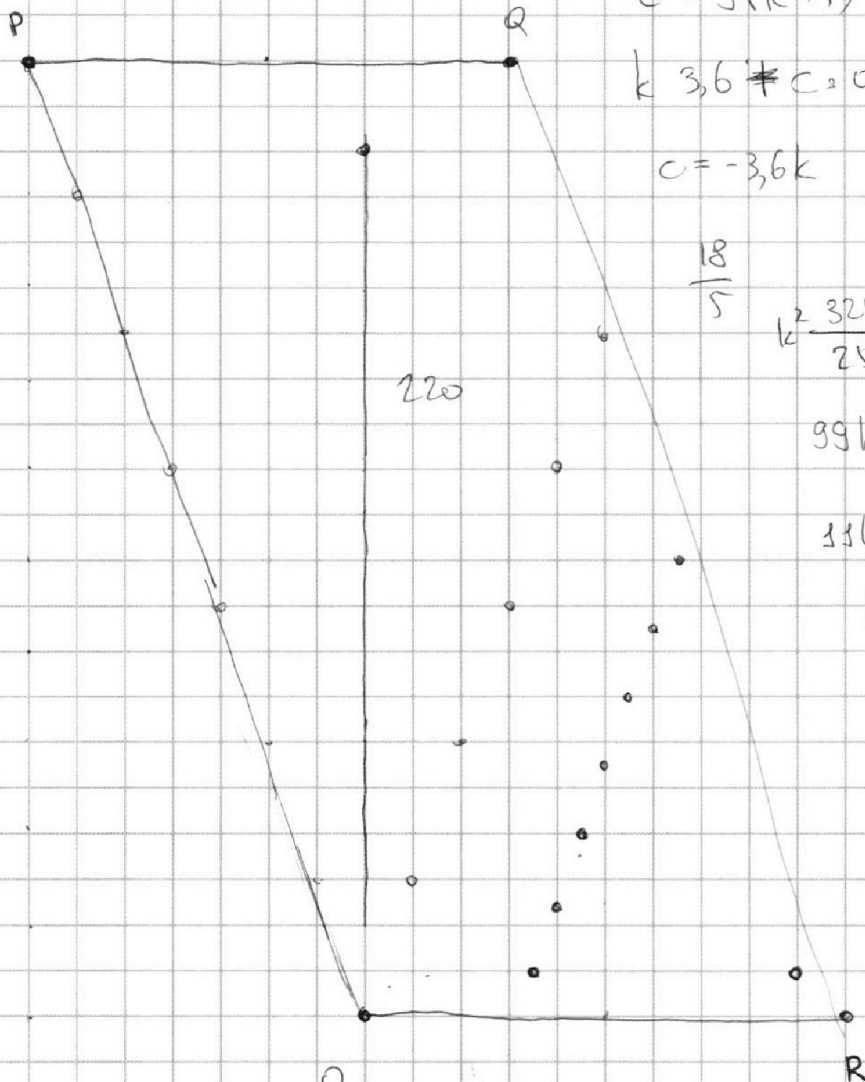
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$c^2 = 9(k^2 + 1)$$

$$k \neq 3,6 \neq c \neq 0$$

$$c = -3,6k$$

$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

$$\frac{18}{5}$$

$$k^2 \frac{324}{25} = \frac{225}{25} k^2 + \frac{225}{25}$$

$$99k^2 = 225$$

$$11k^2 = 25$$

$$k = \frac{5}{\sqrt{11}} \quad c = -\frac{18}{\sqrt{11}}$$

$$x^2 - 12x + 36 - 4 +$$

$$\frac{25x^2 - 180x + 324}{11} = 0$$

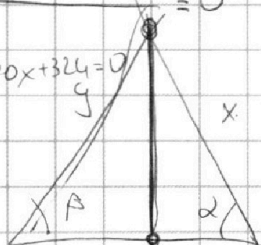
$$x \cdot \sin \alpha = y \cdot \sin \beta$$

$$11x^2 - 132x + 396 - 44 + 25x^2 - 180x + 324 = 0$$

$$36x^2 - 312x + 676 = 0$$

$$9x^2 - 78x + 169 = 0$$

$$78^2 - 4 \cdot 9 \cdot 169$$







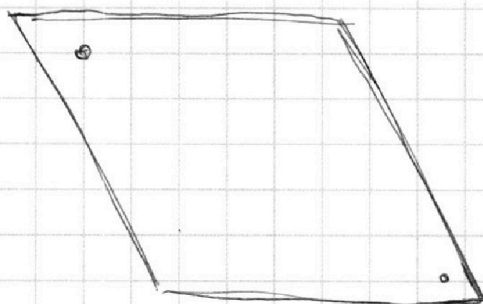
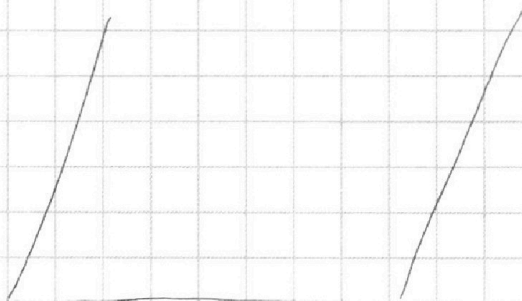
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

• A



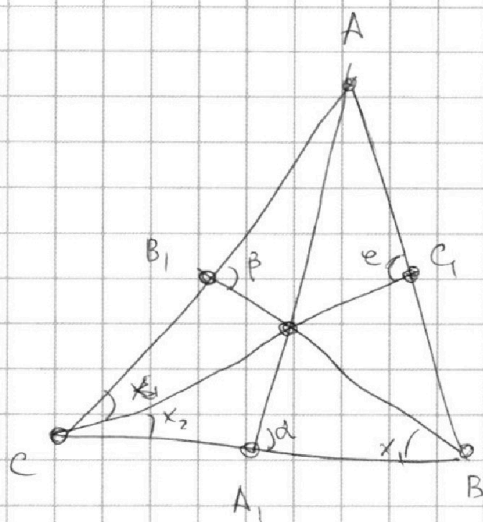
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = CC_1 \cdot \sin \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot AB =$$
$$= AA_1 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot BC = BB_1 \cdot \sin \beta \cdot \frac{1}{2} \cdot AC$$

$$\frac{AC}{\sin \epsilon} = \frac{AB}{2 \sin \alpha}$$

$\sin$

$$S_0 = CC_1 \cdot AC \cdot \sin \alpha =$$
$$= CC_1 \cdot BC \cdot \sin x_2 =$$

...

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \epsilon \cdot AB \cdot BC \cdot AC$$

$$\frac{BC}{\sin \epsilon} = \frac{AB}{2 \sin x_2}$$

$$\frac{BC}{\sin \beta} = \frac{AC}{2 \sin x_1}$$

$$S^2 = \frac{CC_1 \cdot BB_1}{4} \cdot BC \cdot \sin x_2 \cdot BC \cdot \sin x_1$$

$$\frac{1}{3} \frac{AA_1}{\sin x_1} = \frac{2}{3} \frac{BB_1}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 BB_1 \cdot \sin x_1}{AA_1} = \frac{2 CC_1 \cdot \sin x_2}{AA_1}$$

$$\frac{CC_1}{\sin x_1} = \frac{BB_1}{\sin x_2}$$

$$BB_1 \cdot \sin x_1 =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

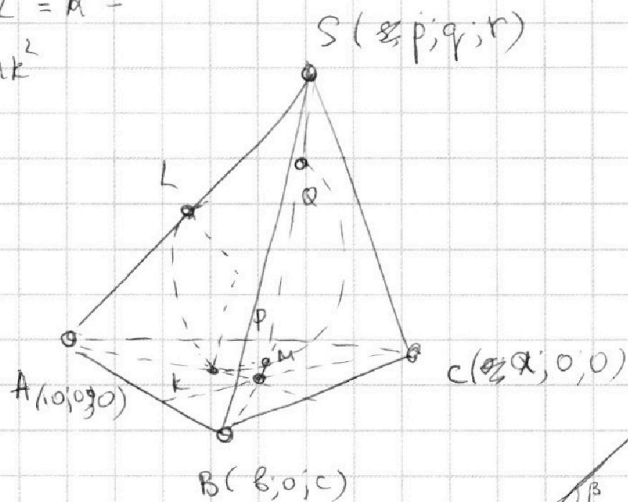
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

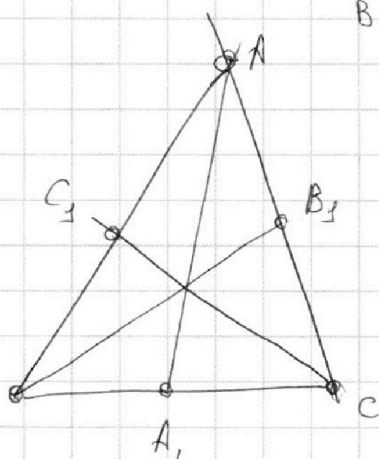
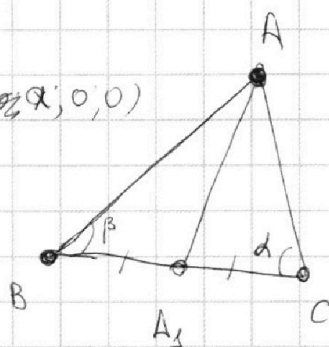
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

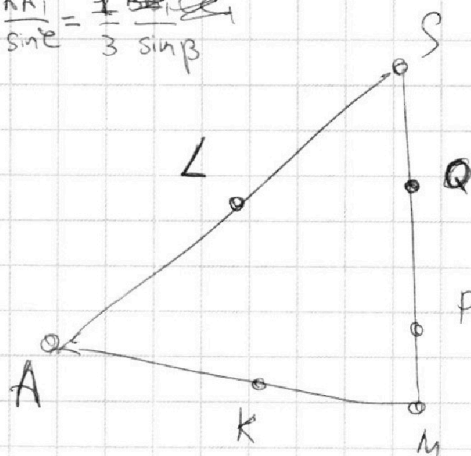
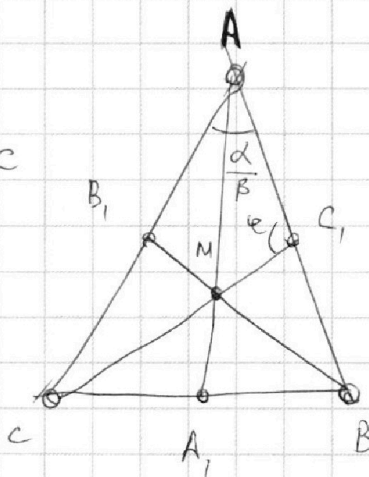
$$SO^2 - SL^2 = R^2 \\ = OM^2 - MK^2 \\ MK = SL$$



$$\frac{AA_1}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \delta}$$



$$\frac{2}{3} \frac{AA_1}{\sin \alpha} = \frac{1}{3} \frac{BB_1}{\sin \beta}$$



$$\frac{1}{2} \frac{AB}{2} \cdot \frac{CC_1}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{AB \cdot CC_1}{4} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{CC_1}{\sin \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8.

$$\frac{x + \frac{\pi}{10}}{5}$$

$$\frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{4\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$-\frac{5\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$k = \frac{5}{\sqrt{11}} \quad c = -\frac{18}{\sqrt{11}}$$

$$\frac{5\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2} + x \geq -\frac{5\pi}{2}$$

$$2\pi \geq x \geq -3\pi$$

$$\left(\frac{25}{11} + 1\right)g = \frac{(18)^2}{11}$$

$$\frac{5\pi}{3}$$

$$36 \cdot g = 18 \cdot 18$$

$$x = \frac{\pi}{2} - t$$

$$-3\pi$$

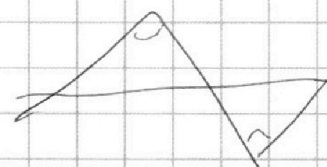
$$5 \arcsin\left(\cos \frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{\pi}{2} - t + \frac{\pi}{2}$$

$$16 - 36k^2$$

$$5t = \pi - t$$

$$6t = \pi$$

$$\arcsin(\sin t)$$



$$\begin{cases} cx + 2y - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a}{2}x - 1,5b \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$3,6 \quad 2,4$$

$$\frac{324}{25} - g = \frac{324 - 225}{25}$$

$$\frac{818}{5}$$

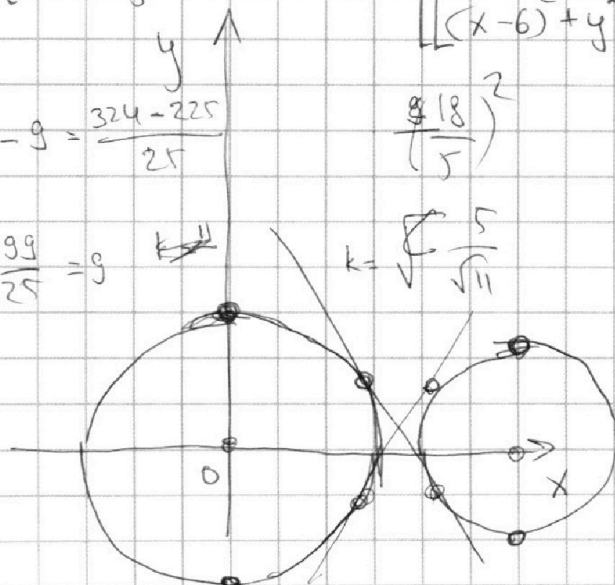
$$\frac{99}{25} = g$$

$$k = \sqrt{\frac{5}{11}}$$

$$c = -3,6k$$

$$+3,6k^2 = 9k^2 + g$$

$$g^2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



11)  $ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$   
 $bc = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$   
 $ac = n \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$$ab^2c \geq ac$$

$$684$$

$$\begin{array}{r} 396 \\ + 324 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$a^2b^2c^2 = k^2m^2n^2 \cdot 2^{42} \cdot 3^{60} \cdot 5^{60}$$

$$3x \cdot x$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$y = \frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{18}{\sqrt{11}}$$

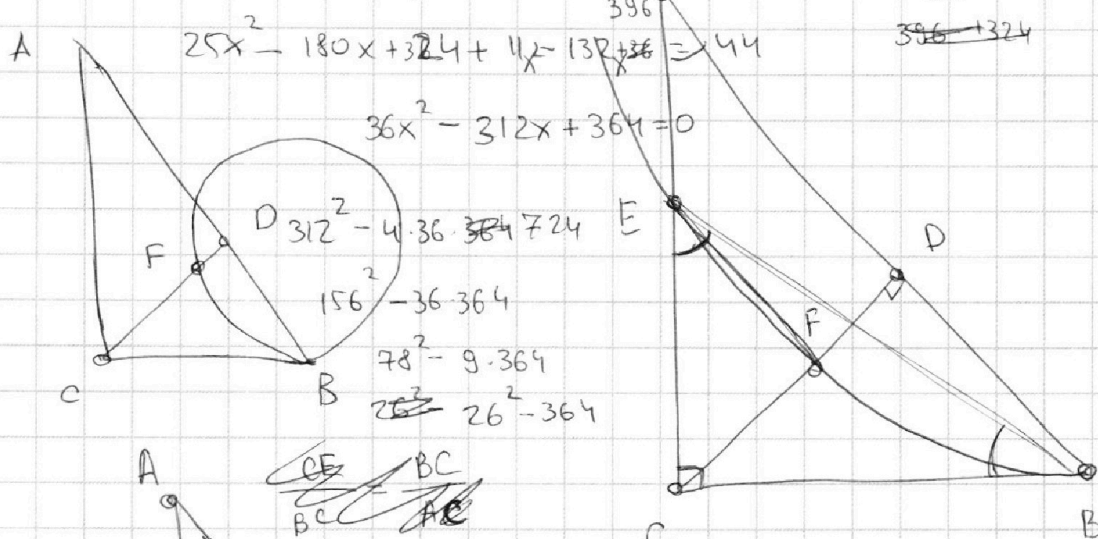
$$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{13}$$

$$\frac{(5x-18)^2}{11} + (x-6)^2 = 11$$

12)



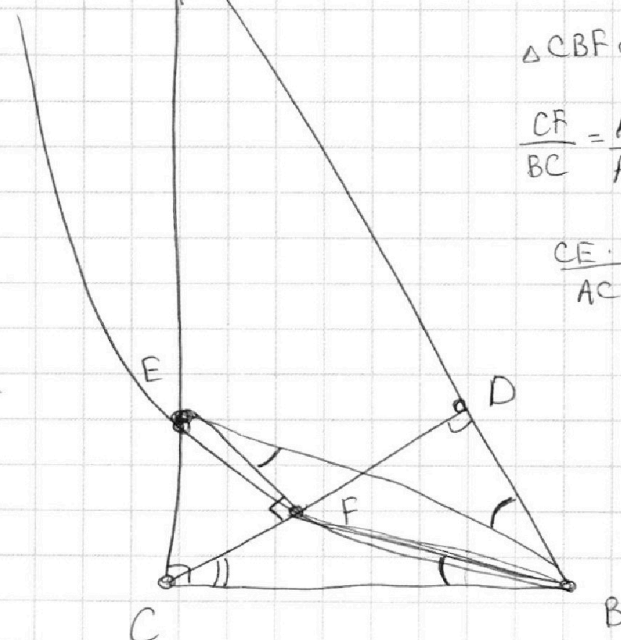
$$\begin{array}{r} 3 \\ 26 \\ \times 26 \\ \hline 86 \\ 26 \\ \hline \end{array}$$

8

$$\begin{array}{r} 156 \\ 52 \\ \hline 776 \end{array}$$

$$\frac{AD}{DB}$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{BC}$$



$$\triangle CBF \sim \triangle AEB$$

$$\frac{CF}{BC} = \frac{AE}{AB} \quad \frac{CF}{CE} = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{CE \cdot CD}{AC \cdot BC} = \frac{AE}{AB}$$

$$\left( \frac{AC}{CE} - 1 \right) = \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BC}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{AC}{CE} = 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3^4 x + 6 \log_3 x - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_3 5y = \log_3^4 (5y) + 2 \log_3 5y - 8$$

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_3 3}$$

$$\log_3 3 = t$$

$$t^{-4} + 6t = 2,5t - 8$$

$$t^{-4} + 3,5t + 8 = 0$$

$$+3,5$$

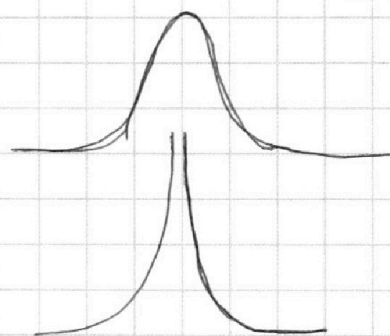
$$-4 \cdot t^{-5}$$

$$\log_3 5y = -\log_3 3$$

$$\frac{1}{\log_3 5y} = -\frac{1}{\log_3 3}$$

$$\log_3 5y = -1$$

$$(5y)^{-1} = 3$$



$$\log_3 81$$

$$9$$

$$2$$

$$\sqrt[3]{2}$$

$$k \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} k$$

$$k^{-3} + 3,5k = k^{-3} + 7k = -8$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot k^{-4} + 3,5k = 0$$

$$+\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot k^{-4} + \frac{7}{2} \cdot k + 8 = 0$$

$$k^{-4} - 7k + 8 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$36x^2 - 312x + 684 = 0$$

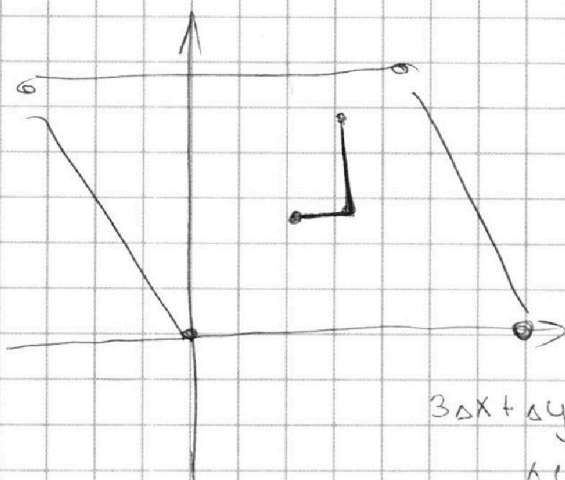
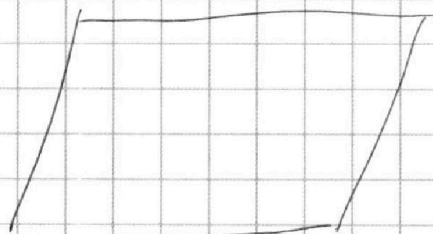
$$512^2 = 36 \cdot 4 \cdot 684$$

$$156^2 = 36 \cdot 684$$

$$\begin{array}{r} 156 \overline{) 6} \\ 6 \cdot 20 + \end{array}$$

$$6 \cdot 20 +$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \end{array}$$



$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

$$\Delta y \div 3$$

$$\Delta y = 3k$$

$$k + \Delta x = 11$$

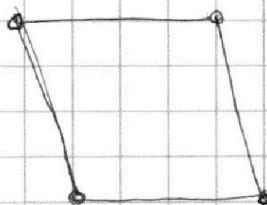
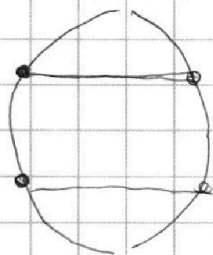
AB

$$y_2 = kx + b$$

$$(k+3)\Delta x = 33$$

$$\pi - (t - 2\pi)$$

$$t - 2\pi$$



$$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\pi - t$$

$$5\pi - 5t = \pi - t$$

$$\boxed{\pi = t}$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq t \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$t - 2\pi$$

$$5(\cancel{2\pi - t}) = \pi - t$$

$$6t = 9\pi$$

$$t = \frac{3\pi}{2}$$

$$\boxed{t = \frac{3\pi}{2}}$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq t \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{6}$$

$$\frac{t}{\pi - t}$$

$$t - 2\pi$$

$$5\pi - t$$

$$\frac{121}{2}$$

$$-\pi - t$$