



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть x_1, x_2, x_3 - максимальные степени входящие делителя 2 в a, b, c соотв-но; y_1, y_2, y_3 - та же ст. вхожд. 7-а, б, в.

Тогда из $\begin{cases} ab : (2^{14} \cdot 7^{10}) \\ bc : (2^{17} \cdot 7^{12}) \\ ac : (2^{20} \cdot 7^{37}) \end{cases}$ понимаем, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 14 \text{ (1)} \\ x_2 + x_3 \geq 17 \text{ (2)} \\ x_1 + x_3 \geq 20 \text{ (3)} \end{cases} \quad \textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow \begin{array}{r} x_3 - x_1 \geq 3 \\ \textcircled{3} \\ \Downarrow \\ 2x_3 \geq 23; \\ x_3 \geq 11,5 \end{array}$$

k_3 ⑨ $\Rightarrow \text{mih}(x_1 + x_2) = 14$; $\text{mih } x_3 = 12 \Rightarrow \text{mih}(x_1 + x_2 + x_3) = 12 + 14 = 26$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 10 & \textcircled{1} \\ y_2 + y_3 \geq 17 & \textcircled{2} \\ y_1 + y_3 \geq 37 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow y_3 - y_1 \geq 7$

+
 $\textcircled{3}$
"
 $y_3 \geq 14$

$y_3 \geq 22$

$$\text{mik}(y_1, y_2) = 10; \text{mik}(y_3) = 22 \Rightarrow \text{mik}(y_1 + y_2 + y_3) = 10 + 22 = 32.$$

Итого мы нашли min степени вхождения для произведений делителей 2 и 7, чтобы минимизировать abc учитывая, что не счит. другие простые делители a, b, c, тогда $min(abc) = 2^{26} \cdot 7^{32}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{32}$.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черковик

1) $ab : (2^{19} \cdot 7^{10})$ Тогда $a : (2^{x_1} \cdot 7^{y_1}), b : (2^{x_2} \cdot 7^{y_2}), c : (2^{x_3} \cdot 7^{y_3})$,

2) $bc : (2^{17} \cdot 7^{12})$ где $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3) $ac : (2^{20} \cdot 7^{32})$ Тогда из 1) и 2) $\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 3 \\ y_3 - y_1 = 2 \end{cases}$

из 2) и 3) $\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_2 = 3 \\ y_3 - y_2 = 20 \end{cases}$ из 1) и 3) $\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 6 \\ y_3 - y_1 = 22 \end{cases}$

Следован основан на отмени степеней делителей различные букв лар. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $ab : 14 + 3k : 6$

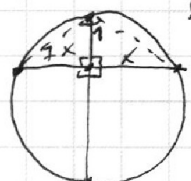
Система на "иски": $\begin{cases} x_3 - x_1 = 3 \Rightarrow x_3 = x_1 + 3 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ x_3 - x_2 = 6 - (\text{подставим } x_3) = (x_1 + 3) - x_2 = 6 \end{cases}$

Получим $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 3 - x_2 = 6 \end{cases}$ - равносильное $2 \cdot 7 + 3 \cdot 5$

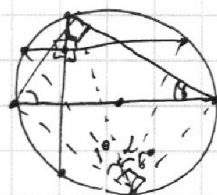
Система на "иски": $\begin{cases} y_3 - y_1 = 2 \Rightarrow y_3 = y_1 + 2 \\ y_1 - y_2 = 20 \\ y_3 - y_2 = 22 \Rightarrow y_1 + 2 - y_2 = 22 \end{cases}$ - равносильное

Видно: $x_1 + x_2 = 14, y_1 + y_2 = 10, x_2 + x_3 = 17, y_2 + y_3 = 17,$

$x_1 + x_3 = 20, y_1 + y_3 = 37$  $\frac{1}{2}xy \sin \alpha$

$x_1 = 14 - x_2, x_3 = 17 - x_2 \Rightarrow 14 - x_2 + 17 - x_2 = 20 \Rightarrow x_2 = 1$  $\sqrt{7x} = 1;$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 14 \\ x_2 + x_3 = 17 \\ x_1 + x_3 = 20 \end{cases}$ $x_3 - x_1 = 3 \Rightarrow x_3 \geq 3$ $x_3 + x_1 \geq 20 \Rightarrow x_3 \geq 11.5$



$S_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{49x^2 + 1}) (\frac{1}{\sqrt{2x^2 + 1}}) \sin \alpha$

$S_1 = 1 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \sin \alpha$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a^2 - 8ab + b^2 : \frac{(a+b)}{k}$, где $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, тогда
найдем минимальное k , чтобы выполнялась делимость.

$$\frac{(a+b)}{k} \cdot t = a^2 - 8ab + b^2;$$

$$\frac{(a+b)t}{k} = a^2 - 8ab + b^2;$$

$$\frac{(a+b)t}{k} = (a+b)^2 - 8ab$$

$$8ab = (a+b) \left(a+b - \frac{t}{k} \right) \text{ — ищем макс } \left(\frac{t}{k} \right)$$

$$(a+b) \nmid a, (a+b) \nmid b \Rightarrow (a+b - \frac{t}{k}) \nmid ab$$

Значит в виде $\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$, пусть $(a+b) \nmid m$,

тогда $(a+b)^2 \nmid m$, найдем может ли $ab \nmid m$,

или $(a+b)^2 - 8ab \nmid m$. Пусть m содел. в делитель a

и b , но такого не может быть, т.к. ab — взаимнопростые.

Пусть содел. или в a^4 , или в b^4 , и тогда $(a+b) \nmid m$ — против-ие.

Пусть какая-то часть делителя m содел. в a^4 , а какая-то в b^4 ,

но тогда $\nexists$ какой-нибудь делитель из делителей m в a^4 и b^4 ,

он или в одном, но не в другом $\Rightarrow (a+b) \nmid m$ — против-ие.

Значит m может быть только делителем 8, значит-8. Ответ: $m=8$.

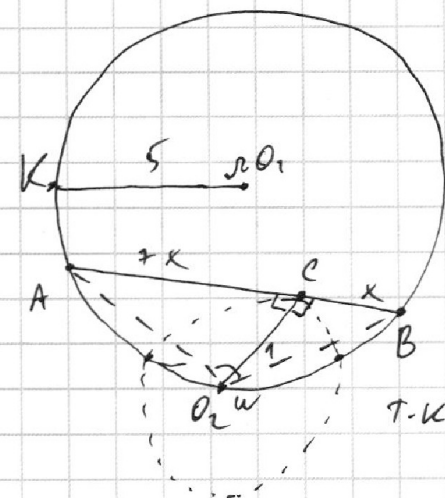
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: окр. ω и окр. ω' ,

$AC:CB=7$, $r(\omega)=7$, $r(\omega')=1$

Найти: $AB=??$

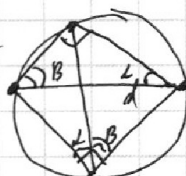
Решение: 1. Пусть $AC=7x$, $CB=x$,

т.к. окр. ω кас. $AB \Rightarrow O_2C \perp AB$.

2. По (1) об отношении хорды и диаметра в окр-ти:

$$d = \frac{AB}{\sin \alpha}$$

т.к. д-метр



d - диаметр, α, β - углы
($\alpha + \beta = 90^\circ$)

Произвольно разделим $\angle 90^\circ$ на α и β , соединив A и B и

угла окр. с α -ым диаметром снова получим $\triangle ABC$,

т.к. окр. на диаметр, его стороны (хорды) равны соотв.

$d \sin \alpha$ и $d \sin \beta$. Теперь используем, пусть $\angle AOB = \alpha \Rightarrow$

$$AB = 10 \sin \alpha$$

$$\triangle AOB: \begin{cases} S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot CO = \frac{1}{2} \cdot 10 \sin \alpha \cdot 1 \\ S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

$$5 \sin \alpha = \frac{1}{2} (\sqrt{49x^2+1})(\sqrt{x^2+1}) \sin \alpha;$$

$$10 = \sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)};$$

$$100 = (49x^2+1)(x^2+1) \quad \text{Пусть } x^2 = t, \text{ тогда}$$

$$100 = (49t+1)(t+1); \quad 49t^2 + 50t + 1 - 100 = 0;$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение - 3.

ОДЗ:

$$49t^2 + 50t - 99 = 0;$$

$$t > 0, 4 > 0$$

$$t_1 + t_2 = -\frac{50}{49}$$

$$t_1 \cdot t_2 = -\frac{99}{49}$$

$$\Rightarrow t_1 = 1$$

$$t_2 = -\frac{99}{49}$$

$$\Rightarrow X = \sqrt{t} = 1$$

$$AB = 8x \Rightarrow AB = 8.$$

$$\text{Ответ: } AB = 8.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4 - продолжение

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

1. проверим выполнимость $7x - 1 \geq 0$

$\sqrt{61} \approx 8$ (точно лежит между 7 и 8 т.к. $49 < 61 < 64$)

$$1) \frac{11 + 16}{41} \approx \frac{27}{41} \quad 7 \cdot \frac{27}{41} - 1 \geq 0 \text{ - верно}$$

$$2) \frac{11 - 16}{41} \approx \frac{-5}{41} \quad 7 \cdot \frac{-5}{41} - 1 > 0 \text{ - неверно.}$$

2. проверим $x + \sqrt{61} \geq 0$:

$$2 - 7x + \sqrt{49x^2 + 2x + 1} \geq 0, \text{ где } x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\begin{cases} 49x^2 + 2x + 1 \geq (7x - 2)^2 \\ 7x - 2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow 47x^2 - 30x + 3 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 47 \cdot 3}}{2 \cdot 47} = \frac{30 \pm \sqrt{336}}{94}$$

$$\sqrt{336} \text{ - лежит между } 18 \text{ и } 19 \Rightarrow x_1 \approx \frac{30 + 18}{94} = \frac{48}{94}$$

$$x_2 \approx \frac{30 - 18}{94} = \frac{12}{94}$$

$$x \in \left(\frac{12}{94}; \frac{48}{94} \right)$$

Поэтому, что $\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} > \frac{30 - \sqrt{336}}{94}$, осталось проверить

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{30 + \sqrt{336}}{94} \quad \text{но } \frac{25}{41} > \frac{49}{94} \quad \left(\frac{50}{41} > \frac{98}{94} \right)$$

$$\left(\frac{25}{41}; \frac{27}{41} \right) \quad \left(\frac{45}{94}; \frac{49}{94} \right)$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \text{ не подходит}$$

Ответ: $\frac{2}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x;$$

~~$$\text{Заметим } (2x^2 - 5x + 3) + (2 - 7x) = (2x^2 + 2x + 1).$$~~

$$\text{Заметим, что } 2x^2 - 5x + 3 = (2x^2 + 2x + 1) + (2 - 7x)$$

$$\text{Пусть } 2x^2 + 2x + 1 = b; \quad 2 - 7x = c, \text{ тогда}$$

$$\sqrt{b+c} - \sqrt{b} = c;$$

$$\sqrt{b+c} = c + \sqrt{b};$$

$$\begin{cases} \sqrt{b+c} = c^2 + 2c\sqrt{b} + b; \Rightarrow c = c^2 + 2c\sqrt{b}; \\ c + \sqrt{b} \geq 0 \end{cases}$$

$$c^2 - c + 2c\sqrt{b} = 0;$$

$$c(c - 1 + 2\sqrt{b}) = 0;$$

$$1. \quad c = 0 \quad (c + \sqrt{b} - \text{выражение})$$

$$2. \quad c - 1 + 2\sqrt{b} \geq 0;$$

$$c = 1 - 2\sqrt{b}$$

$$1. \quad c = 0 \Rightarrow 2 - 7x = 0;$$

$$2 = 7x;$$

$$x = \frac{2}{7}$$

Нужно убедиться, что $b \geq 0$, т.к. $\sqrt{b+c}$, и $c = 0 \geq \sqrt{b}$.

$$\text{для } 2x^2 + 2x + 1, \begin{cases} D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0 \Rightarrow b > 0 \text{ для } x \in \mathbb{R}. \\ a > 0 (2 > 0) \end{cases}$$

$$2. \quad c = 1 - 2\sqrt{b} \Rightarrow (2 - 7x) = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1};$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x - 1;$$

$$\begin{cases} 4(2x^2 + 2x + 1) = 49x^2 - 14x + 1 \Rightarrow 41x^2 - 22x - 3 = 0; \\ 7x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 3}}{2 \cdot 41};$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

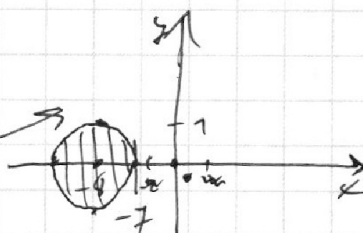
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Из 2-го условия, что 1-ая или 2-ая скобка ≤ 0 (только 1).

$$1) (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0;$$

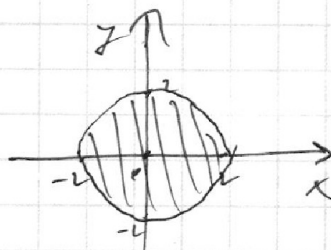
$$(x+8)^2 + y^2 \leq 1^2;$$



$$2) x^2 + y^2 - 4 \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 4;$$

$$x^2 + y^2 \leq 2^2$$



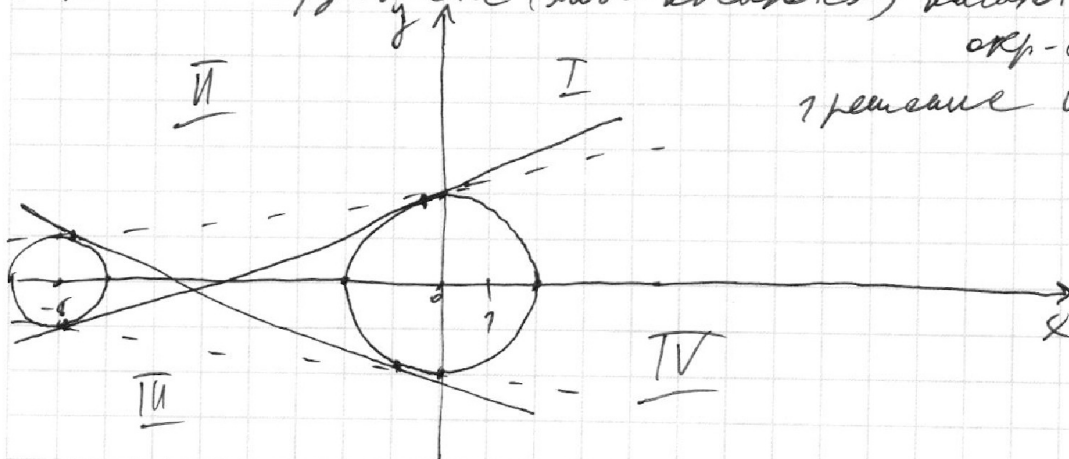
Заметим окр.-ти не соприкасаются, не л-ся.

Ох;у лежит либо ^{на} 1-ой окр.-ти, либо ^{на} 2-ой (или ~~на~~ ~~внутри~~ ~~радиуса~~)

Из 1-ого условия: $ax - y + 10b = 0$; $ax + 10b = y$ — прямая не горизонтальна

Значит условия удовлетворяют все прямые $y = ax + 10b$, которые

~~А так все окружности (либо касаются)~~ касаются обеих окр.-стей, и имеют решение или ∞ .





1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что от a зависит $\angle$ наклона прямой.

а) Найдем a , когда прямая касается окр. $r=1$

б) IV полукр., а окр. $r=2$ во II полукр. и оставшиеся 3 пары точек 1-й и 2-й.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+1)^2 + y^2 = 1 \\ ax + 10b = y \end{cases} \Rightarrow 16x + 64 = 0$$

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 4 \\ ax_1 + 10b = y_1 \\ (x_2+1)^2 + y_2^2 = 1 \\ ax_2 + 10b = y_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & ax_1^2 + 10y_1^2 = 4 \\ & \Rightarrow ax_1^2 + 10b = \sqrt{4 - x_1^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ax_2^2 + 10b = \sqrt{1 - (x_2+1)^2} \end{aligned}$$

$$1. \quad ax_1^2 - \sqrt{4 - x_1^2} + 10b = 0;$$

$$2. \quad ax_2^2 + \sqrt{1 - (x_2+1)^2} + 10b = 0;$$

Существует всего 4 значения a удовлетворяющие условию.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$2x^2 + 4x + 1$$

9000

$$336 \overline{) 3}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(x-\frac{3}{2})$$

$$2x^2 + 2x + 1 =$$

$$x_1 + x_2 = -1$$

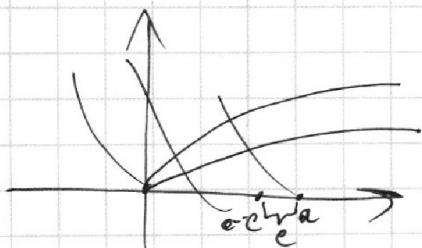
$$x_1, x_2 = \frac{1}{2}$$

$$(2-2x)^2$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\sqrt{b+c} - \sqrt{b} = c$$

$$\begin{array}{r} 1411 \\ 25 \\ \hline 41 \end{array}$$



$$90 + 87$$

$$\sqrt{b+c} - \sqrt{b} = c;$$

$$(b+c) + b - 2\sqrt{(b+c)b} = c^2;$$

$$2b+c-c^2 = 2\sqrt{(b+c)b};$$

$$b+c = (c+\sqrt{b})^2;$$

$$b+c = c^2 + 2c\sqrt{b} + b;$$

$$c = c^2 + 2c\sqrt{b};$$

$$c^2 - c + 2c\sqrt{b} = 0;$$

$$c(c-1+2\sqrt{b}) = 0;$$

$$c-1+2\sqrt{b} = 0;$$

$$c = 1-2\sqrt{b}$$

$$2-2x = 1-2\sqrt{2x^2+4x+1};$$

$$2-2x =$$

$$2x-1 = 2\sqrt{2x^2+4x+1}...$$

22

$$\begin{array}{r} 488 \\ 244 \\ \hline 122 \\ 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 122 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ 492 \\ \hline 976 \\ 976 \\ \hline 488 \end{array}$$

$$22 + 4 \cdot 47 \cdot 3 = 61 \cdot 2^4$$

$$\begin{array}{r} 1691 \\ 492 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 19 \\ \hline 377 \\ 19 \\ \hline 301 \end{array} \quad \begin{array}{r} 27 \\ 41 \end{array}$$

$$\left(\frac{25}{41}, \frac{27}{41}\right)$$

$$\left(\frac{48}{94}, \frac{49}{94}\right)$$