



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{ord}_2(a) = \alpha_1, \text{ord}_7(a) = \alpha_2$$

$$\text{ord}_2(b) = \beta_1, \text{ord}_7(b) = \beta_2$$

$$\text{ord}_2(c) = \gamma_1, \text{ord}_7(c) = \gamma_2$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}^6$$

$$ab : 2^{14} 7^{10} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \end{cases}$$

$$bc : 2^{17} 7^{17} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \end{cases}$$

$$ac : 2^{30} 7^{37} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 30 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 37 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ord}_2(abc) &= \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \\ \text{ord}_7(abc) &= \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \end{aligned} \Rightarrow \text{требуется найти } \min \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \text{ и } \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \gamma_1 + \alpha_1 \geq 30 \end{cases} \Rightarrow 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 14 + 17 + 30 = 51$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 26$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \gamma_2 \geq 37 \\ \beta_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 + \gamma_2 + \beta_2 \geq 37$$

$$\begin{cases} abc : 2^{26} 7^{37} \\ abc : 7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc : 2^{26} 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{26} 7^{37}$$

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^{10}, b = 2^5, c = 2^{12} \cdot 7^{27}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дробь $\frac{x}{y}$ сократима на $k \Leftrightarrow \text{НОД}(x, y) = k$

$\frac{a}{b}$ несокр. $\Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

$$m \leq \text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2) = (a+b, a^2-6ab+b^2 - (a+b)^2) =$$

$$= (a+b, -8ab) \stackrel{\uparrow}{=} (a+b, 8) \leq 8$$

докажем, что $(a+b, ab) = 1$

Пусть $(a+b, ab) \geq p$ (p - простое)

$ab : p \Rightarrow a : p$ (без оч. дел.)

$a+b : p \Rightarrow b : p$ (т.к. $a : p$), $\Rightarrow (a, b) \geq p$, противоречие

$$m \leq 8 \Rightarrow \text{наиб. } m = 8$$

Пример: $a=1, b=7$ $\frac{1}{7}$ несокр.

$$\frac{7+1}{1^2-6 \cdot 1 \cdot 7+7^2} = \frac{8}{1+49-42} = \frac{8}{8} = 1 \quad \swarrow \text{сокр. на } 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = (2 - 7x) \cdot (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3})^2 - (\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$\underline{2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1} = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$\underline{-7x + 2} = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1) = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

~~Условие~~ $2x^2 + 2x + 1 > 0$ при $\forall x$, т.к. $D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0$

Если $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \leq 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 \leq 1$$

$$x(x+1) \leq 0$$

$$0 \leq x \leq -1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \leq 1 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 \leq 1$$

$$2x^2 - 5x + 2 \leq 0$$

$$(2x - 1)(x - 2) \leq 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}, \text{противоречие}$$

Значит $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1 \neq 0$

$$2 - 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \quad (x \text{ удовлетворяет условиям } \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases})$$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

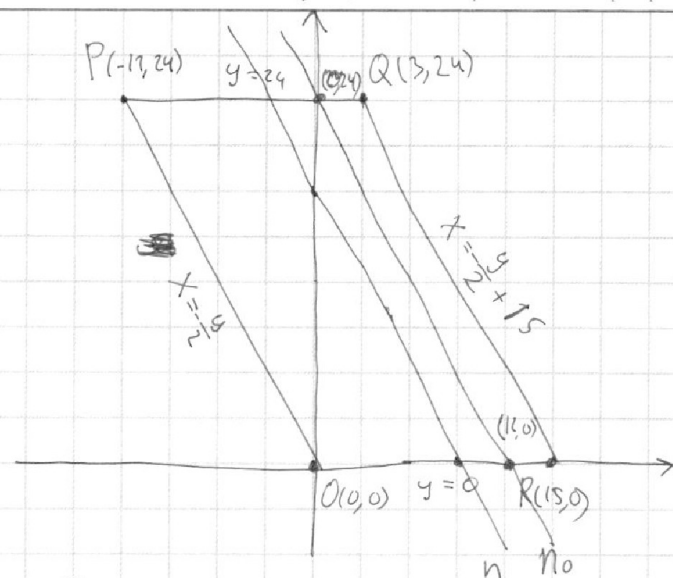
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Уравнение прямой
 $OP: x = -\frac{y}{2}$ (т. P и O подходят)
 $RQ: x = -\frac{y}{2} + 15$ (т. R и Q подходят)

Условие того, что пар.
 точек (x_0, y_0) лежит
 внутри параллелограмма,
 равносильно: n

$$\begin{cases} 0 \leq y_0 \leq 24 \\ -\frac{y_0}{2} \leq x_0 \leq -\frac{y_0}{2} + 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y_0 \leq 24 \\ 0 \leq 2x_0 + y_0 \leq 30 \end{cases}$$

Покажем, что кол-во решений
 системы $\begin{cases} 0 \leq y_0 \leq 24 \\ 2x_0 + y_0 = n \end{cases}$ ($n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq 30$)

равно 13. ~~Заметим, что при разном~~

n $2x_0 + y_0 = n$ - прямая, пар. PO и QR , т.е. при сдвиге (при
 замене n на другое)

кол-во решений не изм.

Рассмотрим $n=24$. Пересеч. $2x_0 + y_0 = 24$ с осями
 совпадают с пересеч. $2x_0 + y_0$ со сторонами параллелограмма,
 т.е. ~~когда $x_0, y_0 \geq 0$~~ т.е. $x_0, y_0 \geq 0$, при этом все такие
 значения x_0 и y_0 подходят.

~~следовательно $y_0 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 2x_0 \leq 24$, у x_0 13~~
 реш., т.е.г.

$$(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 12, \text{ следовательно любому } 0 \leq n_1 \leq 18 \text{ отвечает ст.вует } 12 \leq n_2 \leq 30.$$

Для фиксированного n_1 решений

$13 \cdot 13 = 169$ (каждо $(x_i, y_i; x_i, y_i)$ выбираются независимо)

Выбрав n_1 19 способами, получим ответ $19 \cdot 169 = 3221$

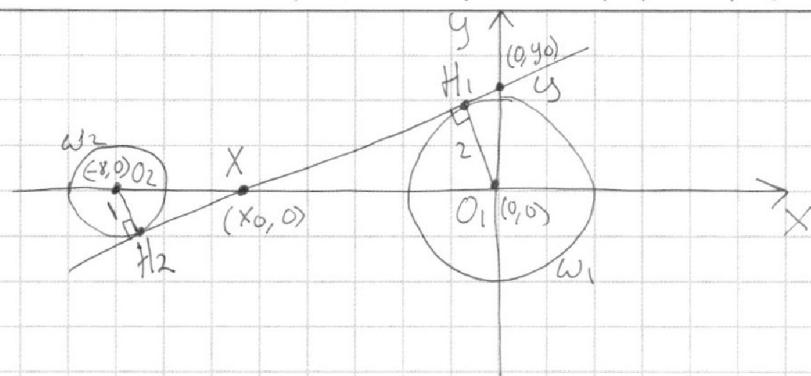
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(x+8)^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$ — окружности ω_1 и ω_2 радиусами 1 и 2.
Поскольку они не пересекаются. Решения ур-ний:

$x^2 + y^2 \leq 4$ — окружность ω_1 и её внутренность

$(x+8)^2 + y^2 \leq 1$ — окружность ω_2 и её внутренность

Т.к. окружности не пересекаются, решим

$(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$ будут окружности ω_1 и ω_2 , и их внутренности.

$ax - y + 10b = 0$ — прямая l с угл. коэф-том a при x .

Если она пересекает оси Oy и Ox в точках

$Y(0, y_0)$ и $X(x_0, 0)$, то $a = -\frac{y_0}{x_0}$.

Если l проходит внутри одной из окружностей, то решений ~~первого~~ бесконечно много, если не касается одной

из окружностей, то не более 1-го, т.к. со второй окружностью l не имеет 1 из 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



будет не более 1-го пересечения.

Значит ℓ - общая касательная к ω_1 и ω_2 .

Π_1 и Π_2 - точки касания.

$\triangle XO_1\Pi_1 \sim \triangle XO_2\Pi_2$ (т.к. X - пересечение ω_1 и ω_2 и касательной)

$$\frac{XO_1}{O_1\Pi_1} = \frac{XO_2}{O_2\Pi_2} \Rightarrow \frac{|XO|}{2} = \frac{|XO+8|}{9} \Rightarrow |XO| = 2|XO+8|$$

$$X^2 = 4(X^2 + 16X + 64)$$

$$3X^2 + 64X + 256 = 0$$

$$X_0 = \frac{-64 \pm \sqrt{64^2 - 4 \cdot 3 \cdot 256}}{6} = \frac{-32 \pm 16}{3} \Rightarrow \begin{cases} X_0 = -\frac{16}{3} \\ X_0 = -16 \end{cases}$$

Площадь $\triangle XO_1Y$ 2-мя способами:

$$XO_1 \cdot O_1Y = XY \cdot O_1\Pi_1$$

$$|XO| \cdot |YO| = \sqrt{X^2 + Y^2} \cdot 2 \Rightarrow X^2 Y^2 = 4(X^2 + Y^2) \Rightarrow$$

$$Y_0^2 = \frac{4X^2}{X^2 - 4}$$

$$a^2 = \frac{Y_0^2}{X_0^2} = \frac{4}{X_0^2 - 4} = \begin{cases} \frac{4}{16^2 - 4} = \frac{1}{60} \\ \frac{4}{\frac{16^2}{3} - 4} = \frac{3}{52} \end{cases}$$

При любом ^{таком a^2} существуют X_0 и Y_0 , т.е. существует прямая и существует b .

Значит $\begin{cases} a = \pm \sqrt{\frac{1}{60}} \\ a = \pm \sqrt{\frac{3}{52}} \end{cases}$

Михаил

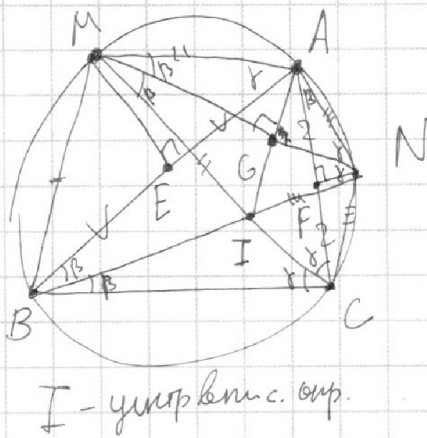
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



E, F, G - середины AB, AC, AI
 M - середина $AB \Rightarrow AM = BM = MI$,
 CM - бис-са $\angle ACB$ ($\angle BCM = \angle MCA = \gamma$)
 по лемме о трезубце. Аналогично
 $AN = NI = NC$, $\angle ABN = \angle CBN = \beta$.

G - середина AI , $AM = MI$ ($\Rightarrow \triangle AMI$ - равноб.) $\Rightarrow MG$ - высота и
 бис-са $\angle IMA$. $\angle IMA \stackrel{\text{(по высоте)}}{=} \angle ABC = 2\beta \Rightarrow \angle IMG = \angle AMG = \beta$.

F - середина AC , $\triangle ANC$ - равноб. ($AN = NC$) $\Rightarrow FN$ - высота
 и бис-са $\angle ANC$. $\angle NAC = \angle NBC = \beta$ по впис.

Угол $\triangle ANF$ и $\triangle AMG$ - прямоугольные с углом β
 при вершине, т.е. $AG = AM \sin \beta$, $FN = AF \tan \beta$, $AN = \frac{NF}{\sin \beta}$.

Аналогично $AG = AN \sin \gamma$, $ME = AE \tan \gamma$, $AM = \frac{EM}{\sin \gamma}$.

Также ME и NF - высоты $\triangle MB$ и $\triangle NC$ соотв., $\Rightarrow ME = 4,5$, $NF = 2$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{\frac{ME}{\tan \gamma}}{\frac{NF}{\tan \beta}} = \frac{\tan \beta}{\tan \gamma} \cdot \frac{4,5}{2}$$

По т. синусов $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ABC} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}$

$$\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta} = \frac{\tan \beta}{\tan \gamma} \cdot 2,25 \Rightarrow 2,25 = \frac{\tan \gamma \cdot \sin 2\gamma}{\tan \beta \cdot \sin 2\beta} = \frac{\frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \cdot 2 \sin \gamma \cos \gamma}{\frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot 2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta}$$

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = 1,5$$

Или $u_3 \in$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AG = AN \sin \gamma = \frac{NF}{\sin \beta} \sin \gamma = NF \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{10}{2 \cdot 1,5} = 3$$

Отв. 3

$$AI = 2AG = 6$$

Отв. 6

Лист 2 из 2

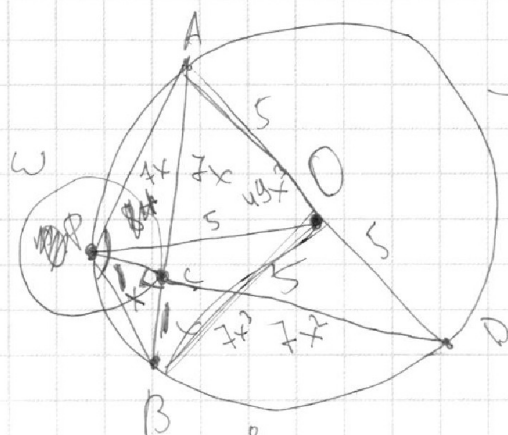
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\sin 2 = \frac{4}{5}x$$

$$\cos 2 = \frac{3}{5} \times$$

$$x^2 + 1 + 49x^2 + 1 - 2 \cdot \frac{3}{5}x \cdot \sqrt{?} \sqrt{?} = 64x^2$$

[Signature] 2.5.9

$$349x^6 + 450x^4 + 9x^2 =$$

$$= 1225x^4 - 350x^2 + 25$$

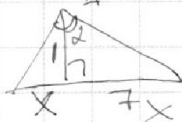
$$541x^6 - 775x^4 + 341x^2 - 25 = 0$$

$$g_{x^2}(4g_{x^2}+1)(x^2+1) =$$

$$49x^4 + 50x^2 + 1$$

$$Bp^2 = x \cdot 8 \cdot x$$

$$\cos L = \frac{3}{5} \times$$



$$8x = \sqrt{\sqrt[4]{\frac{4}{5}x}}$$

$$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 3 \\ \hline 105 \\ 105 \\ \hline 105 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 1050 \\ \hline 1225 \end{array}$$

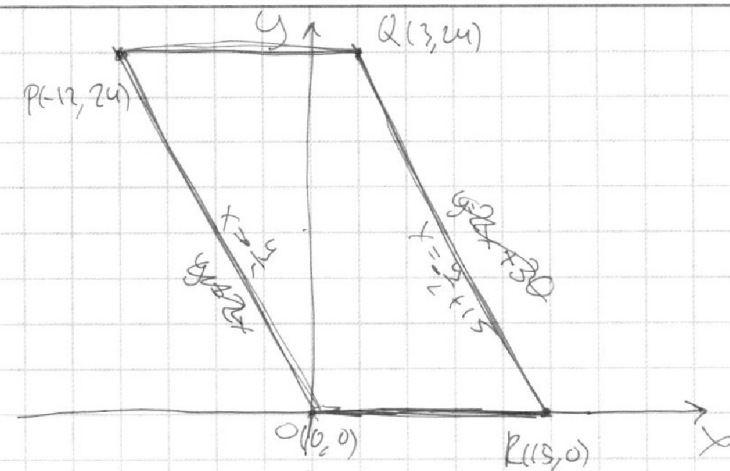
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$0 \leq y \leq 24$$

~~$$y = 2x$$~~

~~$$y = 2x + 30$$~~

$$-\frac{y}{2} \leq x \leq -\frac{y}{2} + 15$$

$$-y \leq 2x \leq y + 30$$

$$0 \leq 2x + y \leq 30$$

$$2x + y = 12$$

$$0 \leq n \leq 30$$

~~$$2x + y = 30$$~~

$$2x + y = 11$$

$$2x + y = 24$$

$$x, y > 0 \quad x = 13 \text{ зная}$$

$$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12$$

13

$$2x + y =$$

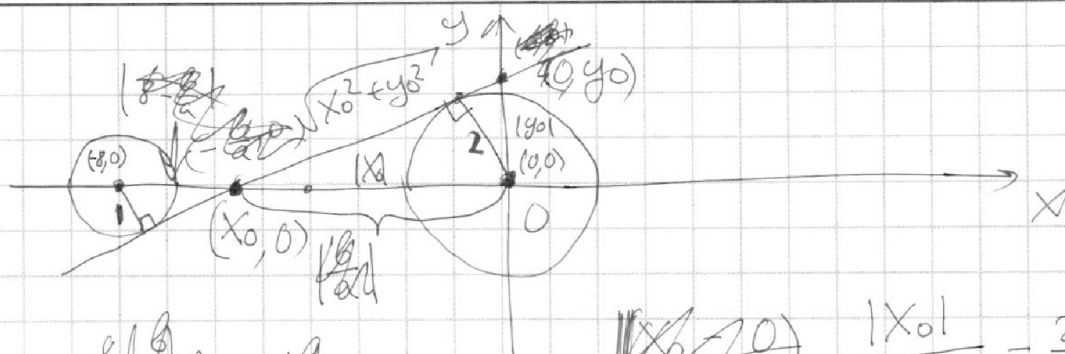
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$8 - \frac{8}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\begin{aligned} \frac{|x_0|}{|x_0+8|} &= \frac{2}{1} \\ |x_0| &= 2|x_0+8| \\ x_0^3 &= 4x_0^2 + 32x_0 + 256 \\ x_0^3 - 4x_0^2 - 32x_0 - 256 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot 2}{2} = \frac{y_0 x_0}{2}$$

$$4(x_0^2 + y_0^2) = x_0^2 y_0^2 \quad - \frac{y_0}{x_0}$$

$$y_0^2(x_0^2 - 4) = 4x_0^2$$

$g^2 \in \langle g \rangle$

$$y_0^2 = \frac{4x_0^2}{x_0^2 - 4}$$

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 = \frac{\frac{4x_0^2}{x_0^2 - 4}}{\frac{x_0^2}{x_0^2 - 4}} = \frac{4}{4x_0^2 - 4} =$$

$$= \frac{-32 \pm 16}{3} = \begin{cases} \frac{-16}{3} \\ -16 \end{cases}$$

$$ax + b = y$$

$\frac{1}{64-u}$
 $\frac{1}{64-u} = \frac{1}{64} + \frac{1}{512}$
 $\frac{1}{64-u} = \frac{1}{64} + \frac{1}{512}$

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{b}{-\frac{b}{a}} = -a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2-5x+3} = | - \sqrt{x^2-5x+3} |$$

$$2x^2-5x+3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{x^2-5x+3}$$

$$-7x+1 = 2\sqrt{x^2-5x+3}$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$2x^2-5x+3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 -$$

$$2x^2-5x+3 \leq 1$$

$$2x^2-5x+2 \leq 0$$

$$(2x-1)(x-2) \leq 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

$$x^2+y^2-4 \leq 0$$

$$(x+8)^2+y^2-1 \leq 0$$

$$y = ax + b$$

$$bx = k^2$$

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$

$$ax+b=y$$

$$x^2+y^2=k^2$$

$$b^2-R^2 = y_1^2$$

$$(x_1-b)^2$$

$$b^2+y_1^2-k^2$$

$$x^2+y^2=4$$

$$x^2+y^2=1$$

$$(x_1, y_1)$$

$$ax+b$$

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$



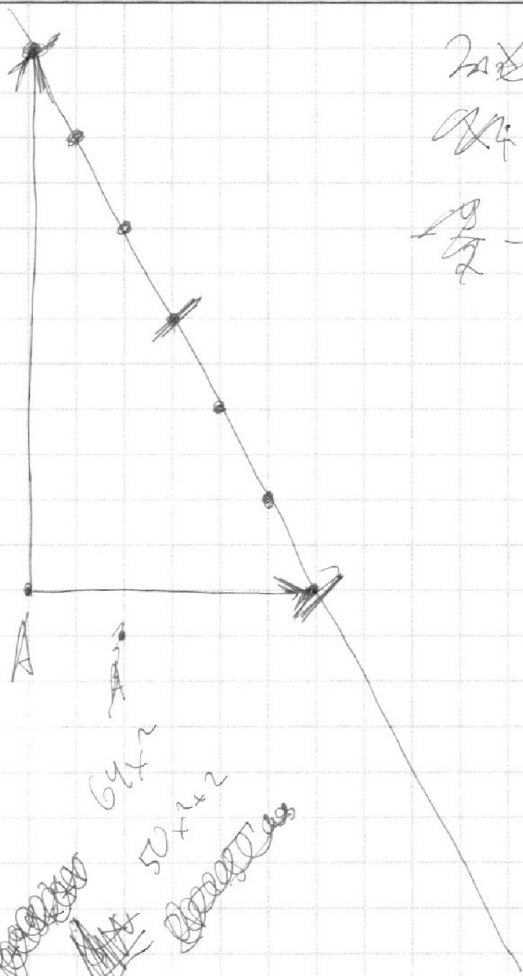
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_1 + y_1 = 12$$

$$0 \leq y_1 \leq 24$$

$$-\frac{y}{2} - \frac{y}{2} \leq x_1 \leq -\frac{y}{2} + 15$$

$$0 \leq x_1 \leq 15$$

$$-y_1 \leq 2x_1 \leq -y_1 + 30$$

$$-y_2 \leq 2x_2 \leq -y_2 + 30$$

$$0 \leq 2x_1 + y_1 \leq 30$$

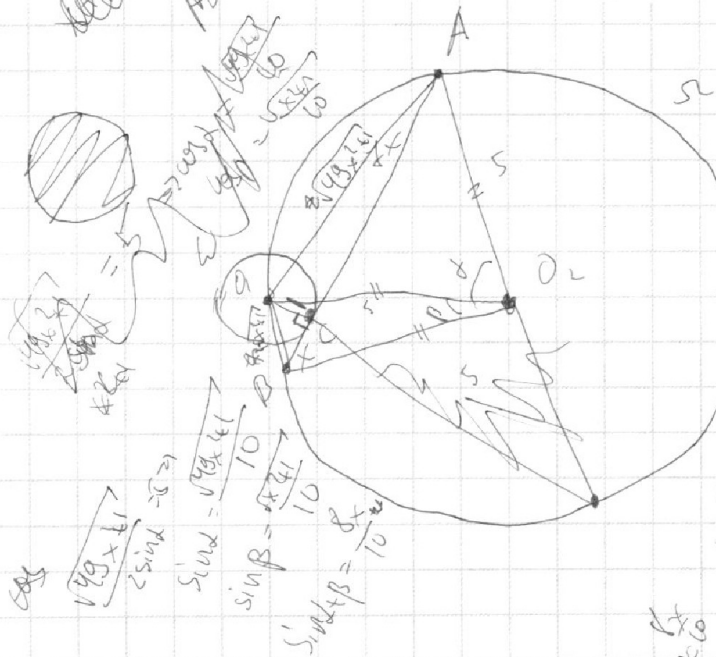
$$0 \leq 2x_2 + y_2 \leq 30$$

$$(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 12$$

$$2x_1 + y_1 = 10, 2, 3$$

$$2x_2 + y_2 = 2, 3, 4, 15$$

$$2x_1 + y_1 = \frac{1}{2}n, \quad 0 \leq n \leq 15$$



$$\cos \alpha = \frac{49 \times 41}{100} = \frac{49 \times 41}{100}$$

$$\sin \alpha = \frac{49 \times 41}{100}$$

$$\sin \alpha = \frac{49 \times 41}{100}$$

$$\sin \alpha = \frac{49 \times 41}{100}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

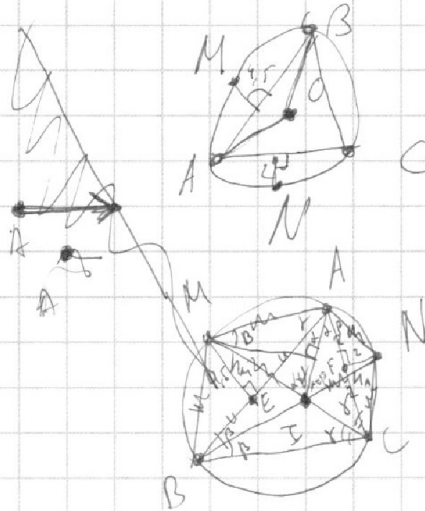
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\begin{cases} ax+by+igb=0 \\ (x+8)^2+y^2=50 \\ x^2+y^2 \leq 4 \\ (x+8)^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= y-E \\ (x+8)^2+y^2 &= 1-E \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \angle \alpha + \gamma &= 90^\circ \\ AM &= \frac{AB}{2} \sin \gamma \\ AN &= \frac{AB}{2} \sin \beta \end{aligned}$$

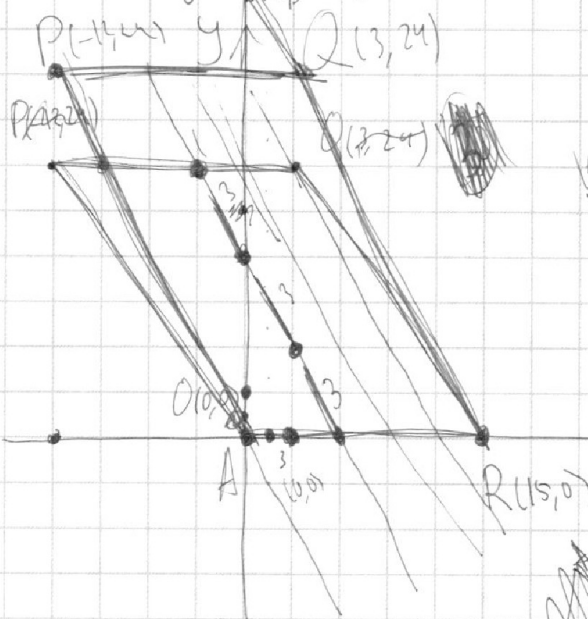
$$\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin 2\beta} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}$$

$$\begin{aligned} EM &= AE \tan \gamma \\ NF &= AF \tan \beta \end{aligned}$$

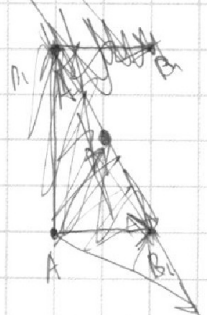
$$\frac{AI}{2} = AM \sin \beta = \frac{EM}{\sin \gamma} \sin \beta = EM \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{4.5}{1.5} = 3$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} &= \sqrt{\frac{4.5}{2}} = \sqrt{2.25} = 1.5 = \frac{\sin 2\gamma \tan \gamma}{\sin 2\beta \tan \beta} \\ &= \frac{2 \sin \gamma \cos \gamma \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}}{2 \sin \beta \cos \beta \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta} \end{aligned}$$

$$\frac{AI}{2} = AN \sin \gamma = \frac{NF}{\sin \beta} \sin \gamma = 2 \cdot 1.5 = 3 \Rightarrow AI = 6$$



$$\begin{aligned} 20x + 10y &= 12 \\ 20x + 10y &= 12 \\ 20x + 10y &= 12 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$ab: 2^{14} 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} 7^{37}$$

~~ac~~

$$abc: 2^{34} 7^{54}$$

$$abc: 2^{34} 7^{54}$$

$$\begin{aligned} \text{ord}_2(a) &= \alpha_1 \\ \text{ord}_2(b) &= \beta_1 \\ \text{ord}_2(c) &= \gamma_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &\geq 14 \\ \beta_1 + \gamma_1 &\geq 17 \\ \gamma_1 + \alpha_1 &\geq 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) &\geq 51 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &\geq 26 \\ \gamma_1 &= 12 \\ \alpha_1 &= 9 \\ \beta_1 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &\geq 10 \\ \beta_1 + \gamma_1 &\geq 17 \\ \gamma_1 + \alpha_1 &\geq 37 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &\geq 237 \\ \beta_2 &= 0 \\ \gamma_2 &= 27 \\ \alpha_2 &= 10 \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b}(a, b) = 1$$

~~max~~

~~max~~

$$(a+b, a^2 - 6ab + b^2) =$$

$$= (a+b, 8ab) = (a+b, 8)$$

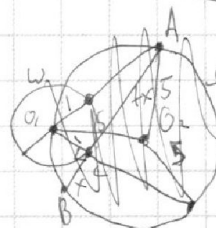
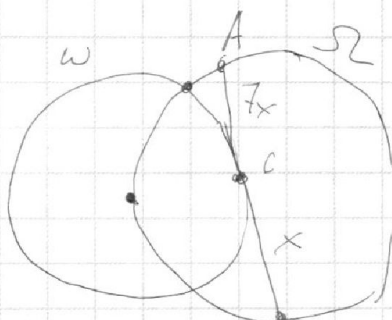
$$(a+b, ab) = 1 \quad \max_{a,b} 8 = 8 \quad m=8$$

$$a=5, b=7$$

$$a=5, b=7$$

$$\frac{8}{1-6 \cdot 5 \cdot 7 + 7^2} = \frac{8}{1-42+49} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{25}{5} &= 5 \\ \frac{25}{5} &= 5 \\ \frac{25}{5} &= 5 \end{aligned}$$



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 - 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$(\sqrt{1 - 5x} + \sqrt{1 + 5x}) = (2 - 7x)(\sqrt{1 + 5x})$$

$$2\sqrt{1 - 5x} + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 7x)(\sqrt{1 + 5x}) - 7x + 2$$

$$x=3.5$$

$$2x^2 - 2x + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 + 1) + y_2 - y_1 = 12$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus \end{matrix}$$

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= 12 - 20x \\ 2x^2 + 4x + y &= 12 \\ \Delta x^2 + \Delta y &= 12 \\ \Delta x^2 + 4\Delta x + 12 &= 12 \\ \Delta x^2 + 4\Delta x &= 0 \\ \Delta x(\Delta x + 4) &= 0 \end{aligned}$$