



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

А значит $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

~~Пример~~ Пример: $a = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^{15}$
 $b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$
 $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$

как мы уже знаем для таких a, b, c выпол-
няется условие.

Ответ: $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Часть 1

Обозначим степени входящие в

а, б, с за L_1, L_2, L_3 соответственно, степени

входящие в за B_1, B_2, B_3 , а степени
входящие в за K_1, K_2, K_3 .

Тогда из условий следует, что

$$\begin{array}{lll} 1) L_1 + L_2 \geq 9 & 2) B_1 + B_2 \geq 10 & 3) K_1 + K_2 \geq 10 \\ L_2 + L_3 \geq 14 & B_2 + B_3 \geq 13 & K_2 + K_3 \geq 13 \\ L_3 + L_1 \geq 19 & B_3 + B_1 \geq 18 & K_1 + K_3 \geq 30 \end{array}$$

Здесь все переменные целые неотрицательные числа.

Рассмотрим первую систему. Сложим все неравенства. Получим, $2(L_1 + L_2 + L_3) \geq 9 + 14 + 19 = 42$
Значит $L_1 + L_2 + L_3 \geq 21$. Пример где выполняется равенство $L_1 = 7, L_2 = 2, L_3 = 12$ легко видеть, что и система выполняется.

Теперь рассмотрим вторую систему. Сложим все. Получим $2(B_1 + B_2 + B_3) \geq 41$ но т.к $2(B_1 + B_2 + B_3)$ - четное то, $2(B_1 + B_2 + B_3) \geq 42 \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_1 + B_2 + B_3 \geq 21 \quad \text{Пример } B_1 = 7, B_2 = 3$$

$B_3 = 11$, Так-же показываем, что система выполняется.

Теперь рассмотрим систему 3.

$$K_1 + K_2 + K_3 \geq K_1 + K_3 \geq 30$$

Пример

$K_2 = 0, K_1 = 15 = K_3$. Так-же система выполняется.

Итого получаем, что abc גדולее

$$\text{на } 2 \quad L_1 + L_2 + L_3 \quad B_1 + B_2 + B_3 \quad K_1 + K_2 + K_3 \quad \begin{matrix} 21 & 21 & 30 \\ \geq & 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$5\pi - 10x = \pi + 2x$$

$$4\pi = 12x \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Проверим, что $x = \frac{\pi}{3}$ подходит.

$$5 \arcsin(\cos x) = 5 \arcsin(\frac{1}{2}) = 5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



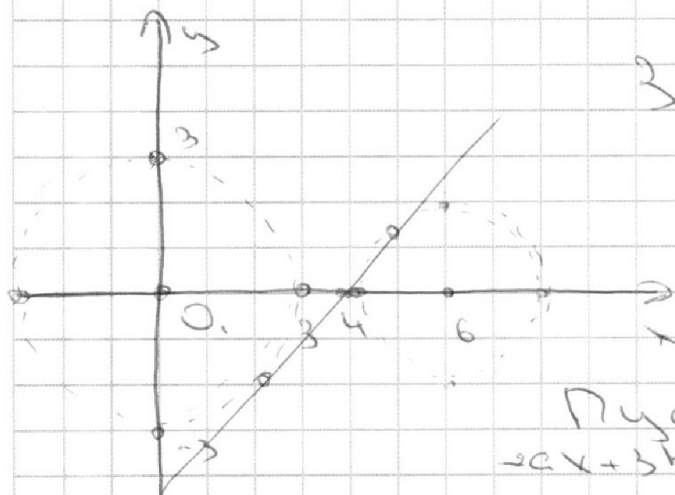
Задача 1

Рассмотрим случаи когда.

$$x^2 + y^2 - 9 = 0 \quad x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0. \text{ Заметим, что}$$

$$x^2 + y^2 - 3^2; (x-6)^2 + y^2 = 4. \text{ Это окружности.}$$

с центрами в точках $O_1(0,0)$ и $O_2(6,0)$
и радиусами 3 и 2.



Заметим, что при
фиксированном a ,
и изменении b

~~прямая не меняется~~

эта прямая

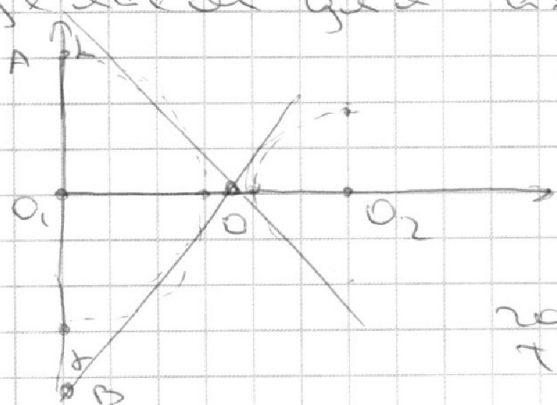
$$ax + 2y - 3b = 0$$

не изменяется.

Пусть мы зафиксируем a .
 $-ax + 3b = 2y$. Тогда

Пусть $a < 0$. Проведем общую внутреннюю
касательную с положительным коэффициентом наклона.

Тогда ~~прямая~~. Понятно, что прямая с коэф-
фициентом наклона больше чем у этой касательной
не пересекает одну из окружностей не
более чем в одной точке. Аналогично
сделаем для $a > 0$. Получим картинку



O - точка пересечения
касательных
лежит на линии
центров т.к. является
одним из центров
подобия этих окружностей.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Часть 2.

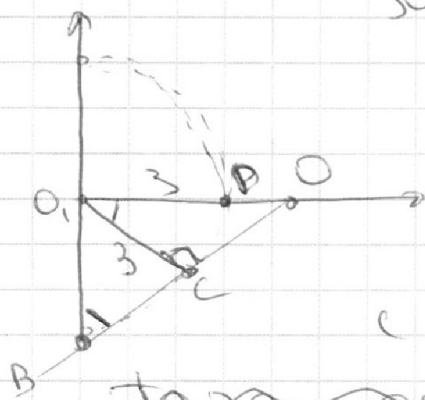
Пусть тогда A и B точки пересечения
общих касательных к $\odot$ с осью ординат.

$\angle ABO = \angle BAO = \alpha$. Тогда мы получаем прямые
с углом наклона α $(0; 1)$ и $(-1; 0)$.

Найдем это α . Точка O делит

$O_1 O_2$ по B в отношении $\frac{3}{2}$ т.е. центр по-
мощности.

Значит $O(\frac{6 \cdot 3}{5}; 0)$



Пусть D — пересечение
 $O_1 O_2$ и окружности с
центром O_1 , т.е.
 $D = (3; 0)$, а C — точка
касания этой окружности
с общей касательной

$$\text{тогда } OD \cdot OO_1 = OC^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{18}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5}$$

$$\frac{CO}{OO_1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - 3^2}}{\frac{18}{5}} = \sqrt{1 - 9 \cdot \frac{18^2}{5^2}} = \sqrt{1 - \frac{9 \cdot 5^2}{18^2}} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{5^2}{2 \cdot 18}} = \sqrt{\frac{36 - 25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \quad \text{Заметим, что}$$

$$\text{это } \tan(\angle COO_1) = \tan(\angle O_1BO) = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\text{Т.е. мы получаем, что } \frac{a}{2} \in \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{\sqrt{11}}{3}, \frac{\sqrt{11}}{3}\right) \quad \text{Ответ: } \left(-\frac{\sqrt{11}}{3}, \frac{\sqrt{11}}{3}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Часть 3

Нам нужно чтобы прямая пересекала
эти две окружности в 4 точках т.к.
прямая - это пер. решение 1-ого уравнения
2-окружности второго.

Ответ: $(-\frac{\sqrt{4}}{3}, \frac{\sqrt{4}}{3})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = \log_3 x$ часть 1

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8 =$$

$$\frac{1}{2} \log_3 3^5 - 8 = \frac{5}{2} \log_3 3 - 8$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2} - 8 \quad \text{Умножим на } 2a$$

$$2a \cdot | 2a^5 + 12 = 5 - 16a. \text{ получим}$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0. \quad \text{Заметим, что}$$

все ненулевые степени нечетные значит
корень ~~из~~ $a^5 + 16a + 7$ монотонна.

~~Всего~~ Значит корень ровно один пусть это
 x . Рассмотрим теперь второе условие

Пусть $b = \log_3(5y)$

$$\log_{5y}^4(3^4) - 8 = \frac{4}{2} \log_{5y} 3 - 8. \text{ т.е.}$$

делаю замену получим.

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{4}{2b} - 8 \quad \text{Умножим на } 2b$$

$2b \cdot$

$$2b^5 + 4 = 4 - 16b$$

$$2b^5 + 16b - 7 = 0.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Часть 2.

Аналогично $2b^5 + 16b - 7$ монотонна

А значит имеет ровно один корень

Докажем, что это $-x$. Действительно

мы знаем, что $2x^5 + 16x + 7 = 0$. Тогда

$$2(-x)^5 + 16(-x) - 7 = 0. \text{ Значит}$$

$$0 = x + (-x) = \log_3 x + \log_3 5y =$$

$$\log_3 5xy = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Часть 2

Через хотя бы одну целую точку x_0, y_0 то $3x_0 + 8y_0 = A \Rightarrow A \in \mathbb{Z}$. Но тогда

рассмотрим l_2 и l_1 ~~вместе~~

~~Пример, что на l_1 нет целых точек, а на l_2 есть. Тогда~~
~~не целых точек совсем и не PO .~~

Посчитаем, сколько целых точек

на прямой $3x + 8y = A$ в нашей

картинке. ~~Она~~ Среди них

$(0; A)$. Тогда ~~есть~~ $(k; A - 3k)$ вообще $k \in \mathbb{Z}$.

Все целые точки на этой прямой. Но

$A - 3k \in \mathbb{Z}$. ~~То есть~~ ~~каждый~~ ~~каждый~~

точка на этой прямой это комплексное число

от 0 до 42 с остатком как у A по модулю

3. Ровно 14 если $A \not\equiv 0_3$ и 15 если $A \equiv 0_3$.

Но т.к. $A \equiv A - 33_3$ то на $3x + 8y = A - 33$ лежит

столько же целых точек внутри как и у

$$3x + 8y = A.$$

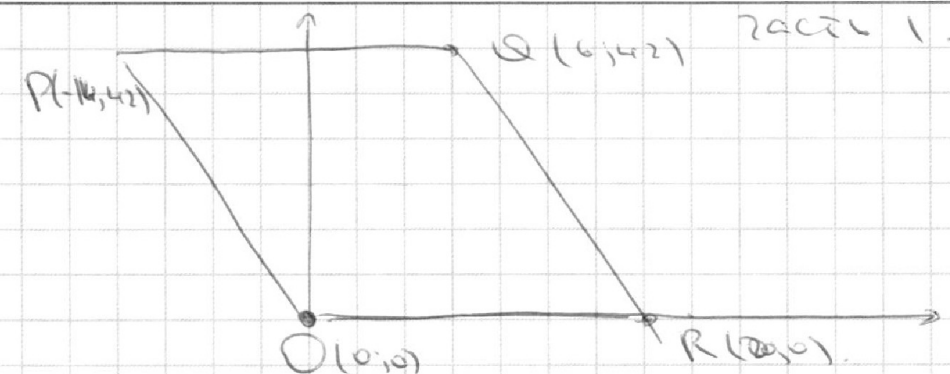
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть у нас есть прямые L_2 и L_1 .

$$3x_2 + y_2 = A \quad \text{и} \quad 3x_1 + y_1 = A - 33. \quad \text{Тогда}$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33. \quad \text{Т.е. одну точку}$$

мы выбираем на прямой $3x + y = A$, а другую
на $3x + y = A - 33$. ~~Найдем такие A, что обе прямые будут~~
Найдем такие A, что обе прямые будут
пересекать параболу. Заметим
прямая PO - это $3x + y = 0$. Значит
 L_2 и L_1 - PO и QR. А значит PO и QR
и являются этими красными хордами.
или. Пусть $QR = 3x + y = A \Rightarrow A = 60$

$$\begin{aligned} \text{Т.е.} \quad A \in [0; 60] \quad \text{и} \quad A - 33 \in [0; 60] &\Rightarrow A \in [0; 60] \quad \text{и} \quad A \in [33; 93] = A \in [33; 60] \end{aligned}$$

Так-же если $3x + y = A$ проходит



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Часть 3. ~~Р~~ Посчитаем теперь пары

точек. 1) $A \equiv 0$ $A \in [33, 60]$. Таких

A 10. A для каждой A у нас 2

прямые по 15 точек на каждой т.е

$$10 \cdot 15^2$$

2) $A \not\equiv 0$ $A \in [33, 60]$ Таких

A соответственно 18 для каждой 2-прямые

по 14 точек т.е всего пар

$$14^2 \cdot 18.$$

Итого получаем

$$10 \cdot 15^2 + 14^2 \cdot 18 = 2250 + 196 \cdot 18 =$$

$$2250 + 200 \cdot 18 - 4 \cdot 18 = 2250 + 3600 - 72 =$$

$$5850 - 72 = 5778.$$

Ответ: 5778.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_{x^2} 243 = \frac{1}{2} \log_x 243 = \frac{1}{2} \log_x 3^5 =$$

$$\frac{5}{2} \log_x 3$$

$$\log_3 x = \text{---}$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8$$

$$2t^5 + 12 = 5 - 16t$$

$$2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$\log_3 5y = \text{---}$$

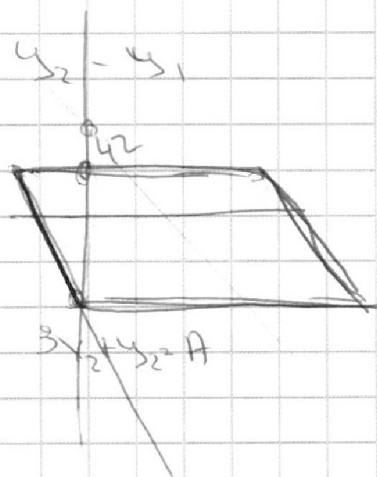
$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{4}{2b} - 8$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{4}{2b} - 8$$

$$2b^5 + 4 = 11 - 16b$$

$$2b^5 + 16b - 11 = 0$$

$$10b^4 + 16 = 0$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

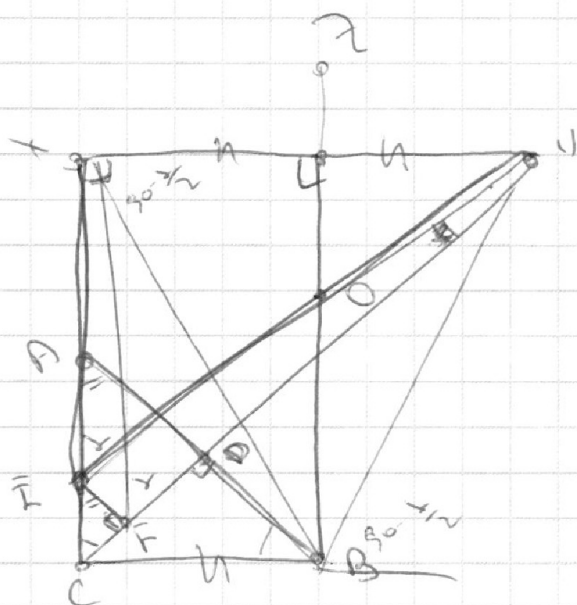
$$\left(\frac{CE}{AB}\right)^2$$

$$CE \cdot EX = CF \cdot CY$$

$$\frac{EF}{AD} = \frac{XY}{AD}$$

$$\frac{EF}{XY} \cdot \frac{XY}{AD} = \frac{EF}{XY} \cdot \frac{CY}{CA}$$

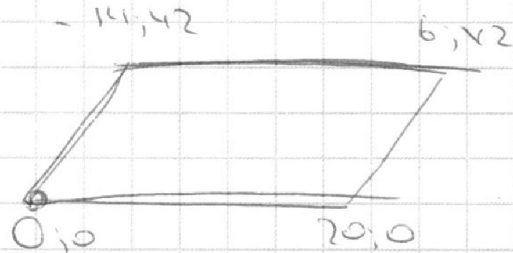
$$\frac{EF}{CA}$$



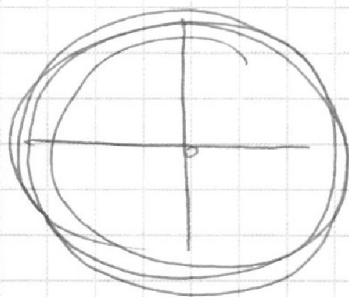
$$\frac{BC}{XC} \cdot \frac{BC}{CE} = \tan(30 - \frac{\alpha}{2})$$

$$\frac{BC}{CE} = \tan$$

$$= 11,42$$



$$\frac{11}{2} = x$$

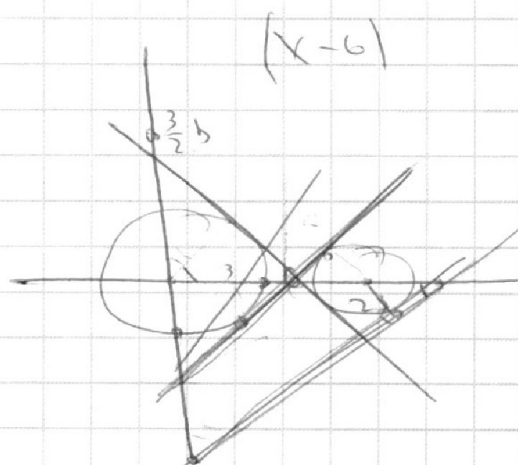


$$b = 2b_0$$

$$a = 2a_0$$

$$a_0 x + y - 3b_0 = 0$$

$$-a_0 x + 3b_0 = y$$





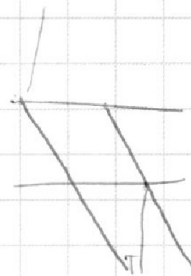
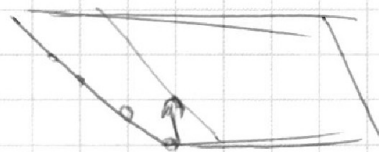
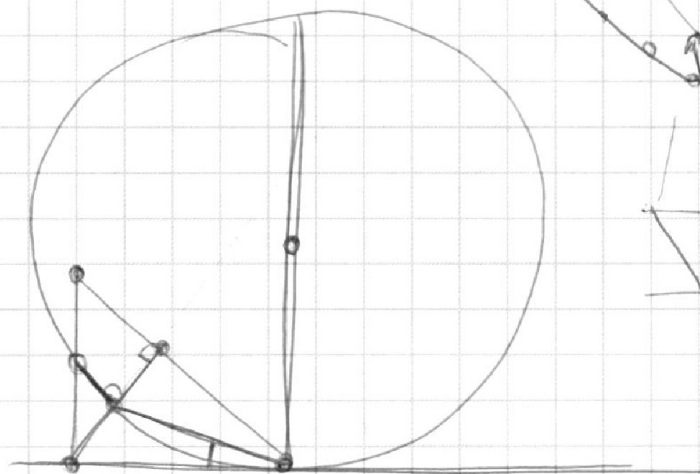
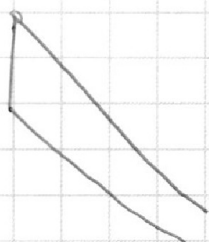
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

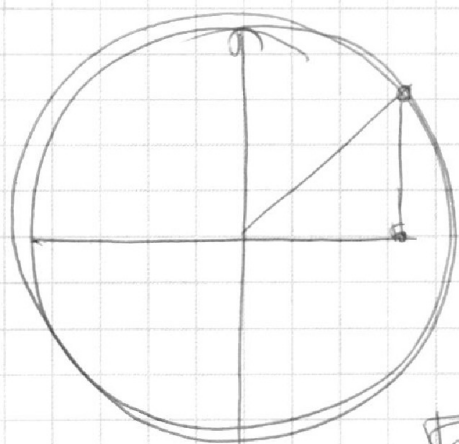
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

60

$$\sin \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\pi - 30 = 60 + 30$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2 l_1 l_2 l_3

$$l_1 + l_2 \geq 9$$

3 B_1 B_2 B_3

$$l_2 + l_3 \geq 14$$

5 V_1 V_2 V_3

$$l_1 + l_3 \geq 18$$

$$2(l_1 + l_2 + l_3) \geq 9 + 14 + 18 = 28 + 14 = 42$$

$$l_1 + l_2 + l_3 \geq 21 \quad l_3 = 12 \quad l_2 = 2 \quad l_1 = 7$$

$$B_1 + B_2 \geq 10$$

$$2(B_1 + B_2 + B_3) \geq 41, 42, \dots$$

$$B_2 + B_3 \geq 13/14$$

$$B_3 + B_1 \geq 18$$

$$V_1 + V_2 \geq 10$$

$$V_2 + V_3 \geq 13$$

$$V_3 + V_1 \geq 30$$

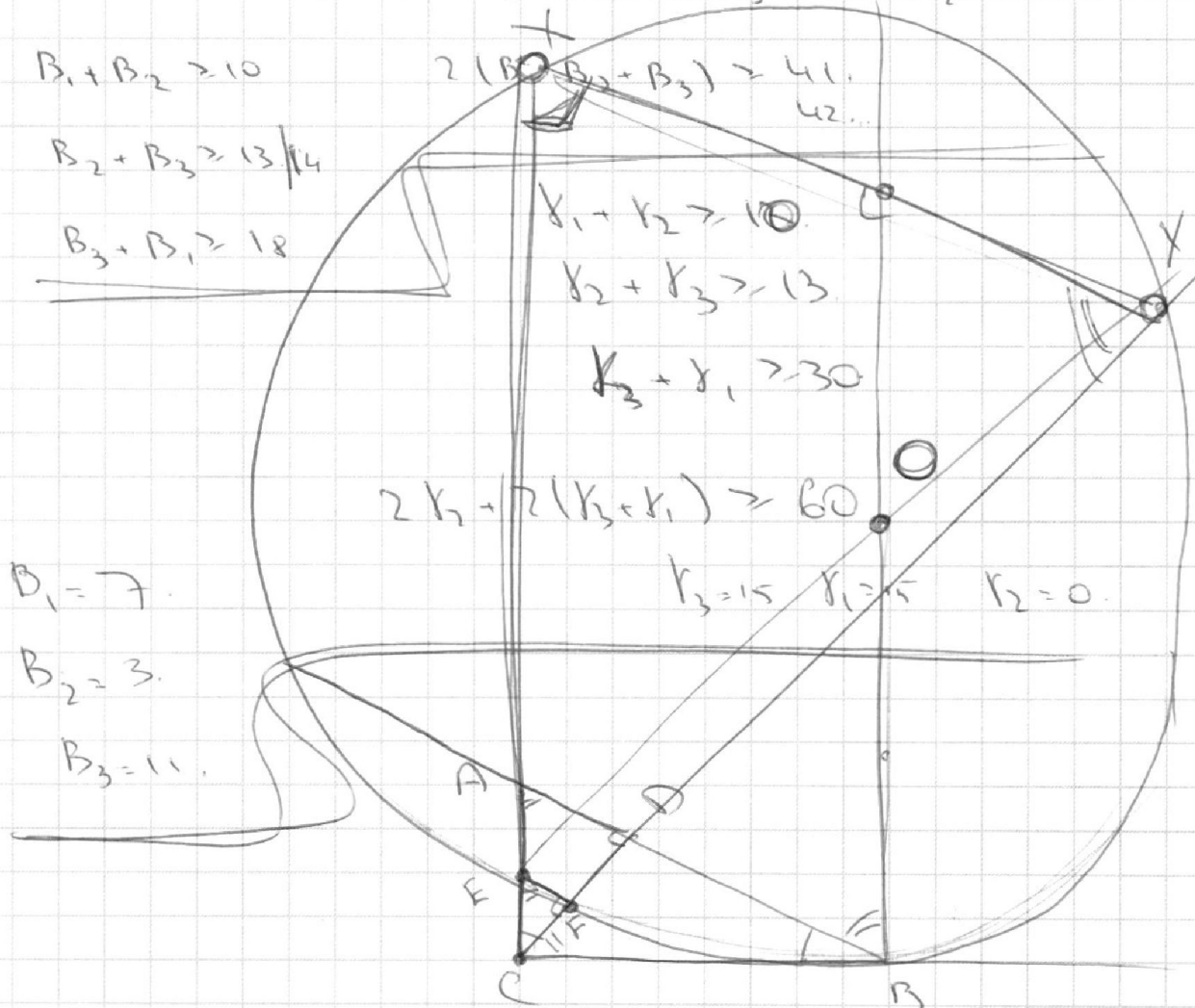
$$2V_2 + 2(V_3 + V_1) \geq 60$$

$$V_3 = 15 \quad V_1 = 15 \quad V_2 = 0$$

$$B_1 = 7$$

$$B_2 = 3$$

$$B_3 = 11$$



$$\frac{AC}{AC} = \frac{CD}{BD}$$

$$BC^2 = AB \cdot BD$$

$$AC^2 = AB \cdot AD$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC^2}{BC^2} \quad (k) = \sqrt{3}$$