



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Из условия следует, что $\exists k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$, такие что

$$\begin{cases} ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k_1 \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot k_2 \\ ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{22} \cdot k_3 \end{cases}$$

значит $(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$

значит $(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k_1 k_2 k_3$

т.е. $(abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$

т.к. $(abc)^2$ — точный квадрат, то 3 входит

в разложение $(abc)^2$ в четной степени $\Rightarrow$

$(abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$, откуда следует, что

$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$, однако т.к. $ac : 5^{22}$, то

$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$; $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$; $c = 2^{17} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$

Тогда $ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$; $bc = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{14}$; $ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$

Поэтому, что условие задачи выполняется.

В свою очередь $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

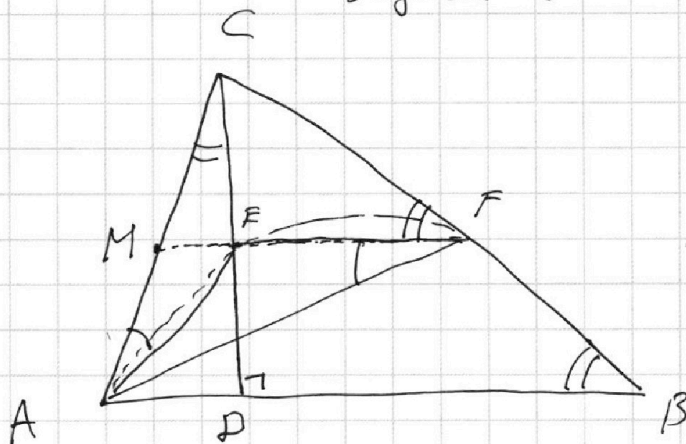
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Задача 2



1) Т.к. AC касается
окружности (AEF)

$$\angle CAE = \angle EFA$$

2) Т.к. $EF \parallel AB$, то

$\angle ACD = \angle CBD = \angle CFE$, первое равенство
следует из $\angle ACD + \angle BCD = 90^\circ = \angle BCD + \angle CBD$, отсюда
AC касается окружности (CEF)

3) Пусть теперь $M = EF \cap AC \Rightarrow$ из касаний
прямой AC и окружностей (CEF) и (AEF)

$$MC^2 = ME \cdot MF = MA^2 \Rightarrow MC = MA \Rightarrow M - \text{сер. AC}$$

т.к. $EF \parallel AB$, EF проходит через середину AC,

$$EF - \text{ср. линия } \triangle CAB \Rightarrow EF = \frac{1}{2} AB \Rightarrow$$

$$EF = \frac{BP}{2}$$

$$4) AD = AB - BP = 1,4 BP - BP = 0,4 BP \Rightarrow$$

$$CD^2 = AD \cdot BP = 0,4 BP^2 \Rightarrow CD = \sqrt{0,4} BP \Rightarrow$$

при этом $\triangle CAD$ и $\triangle CEF$ подобны по двум углам

$$(\angle CFE = \angle ACD (п.2); \angle CEF = 90^\circ = \angle ADC) \Rightarrow \frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CD}{EF}\right)^2 = \frac{0,4 BP^2}{0,25 BP^2} = \frac{8}{5}$$

Ответ: $\frac{8}{5}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (стр. 1)

$$10 \arccos(\sin x) + 10 \arcsin(\sin x) = 5\pi \Rightarrow$$

$$10 \arccos(\sin x) = 5\pi - 10 \arcsin(\sin x) \Rightarrow$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$2x - 4\pi = 10 \arcsin(\sin x) \quad (*)$$

Заметим, что $\arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$

$$10 \arcsin t \in [-5\pi, 5\pi] \Rightarrow$$

$$2x - 4\pi \geq -5\pi \quad \text{т.е.} \quad x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$2x - 4\pi \leq 5\pi \Rightarrow x \leq \frac{9\pi}{2}$$

Разберём 5 случаев.

1) $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; тогда $\arcsin(\sin x) = x \Rightarrow$

(*) переписывается в виде

$$10x = 2x - 4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}, \text{ такой } x \text{ попадает}$$

на требуемый отрезок $\Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$ - корень

2) $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$; тогда $\arcsin(\sin x) = \pi - x$, подставив в (*)

$$2x - 4\pi = 10\pi - 10x$$

$$12x = 14\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \text{ такой } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow$$

$\frac{7\pi}{6}$ - корень.

3) $x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$; $\arcsin(\sin x) = -x + 2\pi$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3. Продолжение (стр. 2)

Подставив это в (*)

$$10x - 2\pi = 2x - 4\pi$$

$$x = 2\pi; 2\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow 2\pi - \text{корень}$$

$$4) x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = 3\pi - 10x$$

$$\arcsin(\sin x) = 3\pi - x, \text{ подставив в (*)}$$

$$3\pi - 10x = 2x - 4\pi$$

$$8x = \frac{17\pi}{6}; \frac{17\pi}{6} \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$\frac{17\pi}{6}$ - корень.

$$5) x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x - 4\pi \Rightarrow$$

подставив в (*)

$$10x - 4\pi = 2x - 4\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$\frac{9\pi}{2}$ - корень

Выше было доказано, что $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow$

рассмотрение данных 5-ти случаев достаточно.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Задача 4 (стр 1)
Продвинутого.

Рассмотрим каждое из групп
систем

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 10y + 77) = 0. \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

Значит графиком этого уравн (1)
являются 2 окружности с
центрами $(0; 0)$ $(0; -9)$ и радиусами
5 и 2 соответственно. (ω_1 и ω_2)

$$5x + 6ay - 6 = 0 \quad (2)$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}.$$

Значит графиком 2-го уравн
является прямая.

Тогда с помощью "а" мы
можем изменить её угловой коэф.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5. (стр 1.)

Иметь. $a = \log_{11} x$ $b = \log_{(0,5y)} \Rightarrow$

$$6 \log_x 11 = \frac{6}{a} \quad ; \quad \log_{(0,5y)} 11 = \frac{1}{b}$$

$$\log_{x^3} \frac{1}{121} = \frac{\log_x \frac{1}{121}}{3} = \frac{\log_x 11^{-2}}{3} = -\frac{2 \log_x 11}{3} = -\frac{2a}{3}$$

$$\log_{(0,125y^3)} (11^{-13}) = \frac{\log_{(0,5y)} (11^{-13})}{3} = -\frac{13}{3} b$$

Подставляем это всё в данные равенства
получаем.

$$\begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 = 0 & | \cdot 3a \\ b + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} + 5 = 0 & | \cdot 3b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 18 + 2 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 13 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a = 16 \\ 3b^5 + 15b = -16 \end{cases}$$

Т.к. производная $(3x^5 + 15x)' = 15x^4 + 15 > 0$ каждое
свое значение она принимает
ровно 1 раз.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (стр 2.)

Теперь заметим, что.

$$\text{если } 3a^5 + 15a = 16, \text{ то.}$$

$$3(-a)^5 + 15(-a) = -16 \Rightarrow$$

$$\text{т.к. } f(x) = 3x^5 + 15x$$

принимает каждое значение ровно

$$\text{по 1-ому разу } a = -b \Rightarrow$$

$$\log_{11} x + \log_{11}(0,5y) = a + b = 0 \Rightarrow$$

$$\log_{11}(0,5xy) = 0 \Rightarrow$$

$$0,5xy = 11^0 = 1 \Rightarrow xy = 2$$

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7 (ср 1)

1) Посмотрим на плоскость (ASM).

Назовём её α . Известно, что α сечёт SZ по окружности, назовём эту окр ω , тогда т.к.

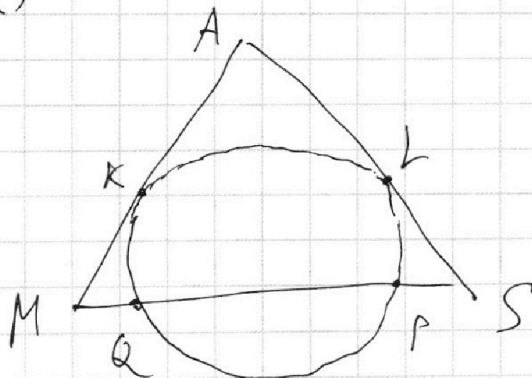
SZ касается AS и AM в точках L и K , то

и ω касается AS и AM в точках L и K .

а также пересекает SM в тех же точках

P и Q , то и SZ . Боо $PE SQ$.

2)



Тогда

$$SQ = SP + PQ = MQ + PQ = MP \Rightarrow$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP = MK^2 \Rightarrow$$

$$SL = MK; AK = AL \Rightarrow$$

$$AM = AS = 20$$

M -точка пересечения медиан $\Delta BAC \Rightarrow$

$$AA_1 = AM \cdot \frac{3}{2} = 30.$$

3) По условию S_{AB_1C} . Пусть тогда AH -его
высота (Боо и лежит с той-же стороны от

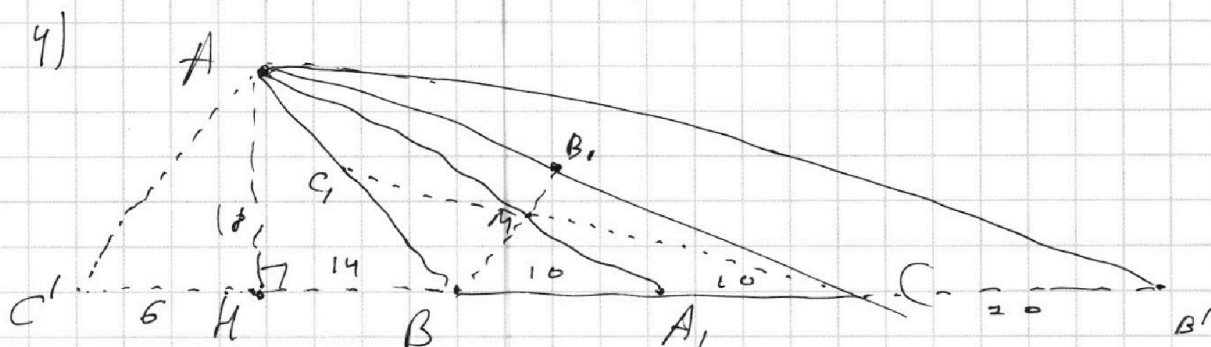
A_1 , что и B , далее из решения будет понятно, что

H и A_1 не совпадают, т.к. $AA_1 \neq AH$)

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7. Продолжение. (стр 2)



$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot 180}{20} = 18 \Rightarrow$$

$$AA_1^2 = AA^2 - AH^2 = 30^2 - 18^2 = 24^2 \quad (\text{т. Пифагора для } \triangle AA_1H) \Rightarrow$$

$$AA_1 = 24 \Rightarrow HB = 14$$

5) Отразим т. В относительно C, получив B'

$$\text{Тогда } CM \parallel AB' \quad (\text{т.к. } \frac{A_1M}{A_1A} = \frac{1}{3} = \frac{A_1C}{A_1B'})$$

$$HB' = HB + 2BC = 14 + 40 = 54 = 3 \cdot 18 \Rightarrow \text{по т. Пифагора (в } \triangle AHB') \Rightarrow$$

$$AB'^2 = AH^2 + HB'^2 = 18^2 + 9 \cdot 18^2 = 10 \cdot 18^2 \Rightarrow (AB')^2 = 18^2 \cdot 10 \Rightarrow$$

$$CM \cdot CC_1 = CM \cdot \frac{3}{2} = \frac{AB'}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{AB'}{2} = 9\sqrt{10}$$

6) Отразим C отн. B, получив C', тогда

аналогично (р. 5) $AC' \parallel BM$, B - середина $CC' \Rightarrow$

BB₁ - ср. линия в $\triangle ACC'$; можно получить, что $CC' = 6 \Rightarrow$

$$(AC')^2 = 6^2 + 9 \cdot 6^2 = 10 \cdot 6^2 \Rightarrow AC' = \sqrt{10} \cdot 6 \Rightarrow BB_1 = 3\sqrt{10} \Rightarrow$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} \cdot 30 = 9 \cdot 9 \cdot 100 = 8100$$

Ответ: 8100 (пункт а)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

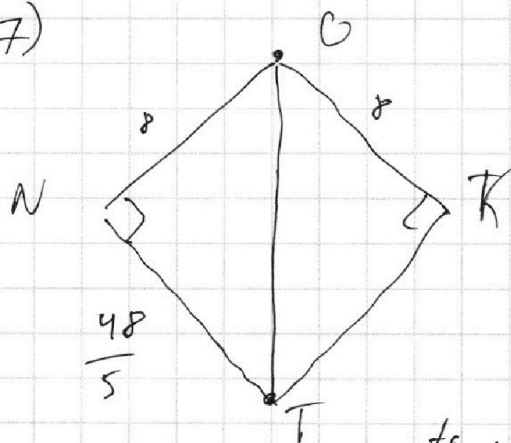
Задача 7 (стр 4)

Из первой задачи решение $AN = 18$

$\triangle ANA_1$ очевидно подобен $\triangle KTA_1 \Rightarrow$

$$KT = AN \cdot \frac{A_1K}{AA_1} = AN \cdot \frac{AA_1 - AK}{AA_1} = 18 \cdot \frac{30 - 14}{30} = 18 \cdot \frac{16}{30} = \frac{16 \cdot 3}{5} = \frac{48}{5}$$

7)



Рассм. квад. $(ONTK)$

очевидно.

$ONTK$ - гевтоуг $\Rightarrow$

$$\angle NTK = 2 \cdot \angle NTO$$

$$\text{tg } \angle NTO = \frac{NO}{NT} = \frac{8}{48/5} \cdot 5 = \frac{5}{6} \Rightarrow$$

$$\angle NTO = \arctg \frac{5}{6} \text{ (очевидно } \angle NTO \text{ - острый)} \Rightarrow$$

$$\angle NTK = 2 \arctg \frac{5}{6}$$

~~Ответ: а) 100 (нужно), б) 100, в) $2 \arctg \frac{5}{6}$~~

Задача 7 (стр 4)

Здесь мог пользоваться тем, что

ON и OK перпендикулярны $CSBC$ и ABC

соответственно т.к. Ω касается этих граней

в точках N и K

Ответ: а) 100, б) $2 \arctg \frac{5}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$$

$$10 \arccos x(\sin x) + 10 \arcsin(\sin x) = 5\pi \Rightarrow$$

$$10 \arcsin(\sin x) = \cancel{2x} - 4\pi$$

$$\arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 10 \arcsin t \in [-5\pi; 5\pi]$$

$$\text{Тогда } 2x - 4\pi \geq -5\pi \quad \text{т.е. } 2x \geq -\pi$$

$$2x - 4\pi \leq 5\pi \quad \text{т.е. } 2x \leq 9\pi$$

$$1) \quad x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \quad x \geq -\frac{\pi}{2}; \quad x \leq \frac{9\pi}{2}$$

$$10 \arcsin(\sin x) = 10x = 2x - 4\pi \Rightarrow -8x = 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$2) \quad x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$$

$$\arcsin(\sin x) + x = \pi \Rightarrow$$

$$10\pi - 10x = 2x - 4\pi$$

$$14\pi = 12x \quad x = \frac{7\pi}{6}$$

$$5) \quad x \in [\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$$

$$\arcsin x = x - 4\pi$$

$$10x - 40\pi = 2x - 4\pi$$

$$8x = 36\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2}$$

$$3) \quad x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$$

$$\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$$

$$10x - 20\pi = 2x - 4\pi$$

$$8x = 16\pi \quad x = 2\pi$$

$$4) \quad x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$$

$$\arcsin(\sin x) = x - 3\pi$$

$$30\pi - 10x = 2x - 4\pi \quad 34\pi = 12x \Rightarrow x = \frac{34\pi}{12} = \frac{17\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{a^4} - 6a = \frac{2a}{3} - 5$$

$$(a+b)$$

$$a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 = 0$$

$$\frac{1}{b^4}$$

$$b^4 + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} + 5 = 0$$

$$\log_{0,5} xy = t$$

$$0,5xy = 11^t$$

$$3a^5 - 18 + 2 + 15a = 0$$

$$x, y \geq 0$$

$$+ 3b^5 + 3 + 13 + 15b = 0$$

$$x \neq 1$$

$$3(a^5 + b^5) + 15(a+b) = 16 + 16 = 0 \quad y \neq 2$$

$$a^5 + b^5 + 5(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 + b^4) = a^5 + b^5 + ab(a^3 + b^3) = 5(a+b) + ab(a^3 + b^3)$$

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = 5$$

$$\sqrt{5a^2b^2} \quad a^2b^2 \leq 1$$

$$a^5 + 5a = 16$$

$$\frac{t}{-t}$$

$$b^5 + 5b = -16$$

$$(5a^4) + 5 > 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (стр 2).

а после этого с помощью
"в" параллельно её сдвинуть,
тогда нужно найти все
такие "а", что можно
параллельно сдвинуть
прямую $y = -\frac{3x}{6a}$ так,
чтобы она пересекала
обе окружности ω_1 и ω_2
в двух точках ~~и~~ (при $a=0$
 $b=0$ подходит).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} kx+b \\ -kx-b \end{aligned}$$

$$D = 4k^2b^2 - 4(k^2+1)(b^2-25)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ y = kx+b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + k^2x^2 + b^2 + 2kxb &= 5^2 \\ (k^2+1)x^2 + 2kbx + b^2 - 25 &= 0 \end{aligned}$$

$$4k^2b^2 - 4(k^2b^2 + b^2 - 25) =$$

$$= 4k^2b^2 - 4k^2b^2 - 4b^2 + 100k^2 + 100$$

$$100(k^2+1) - 4b^2 = 0$$

$$x = ky + s$$

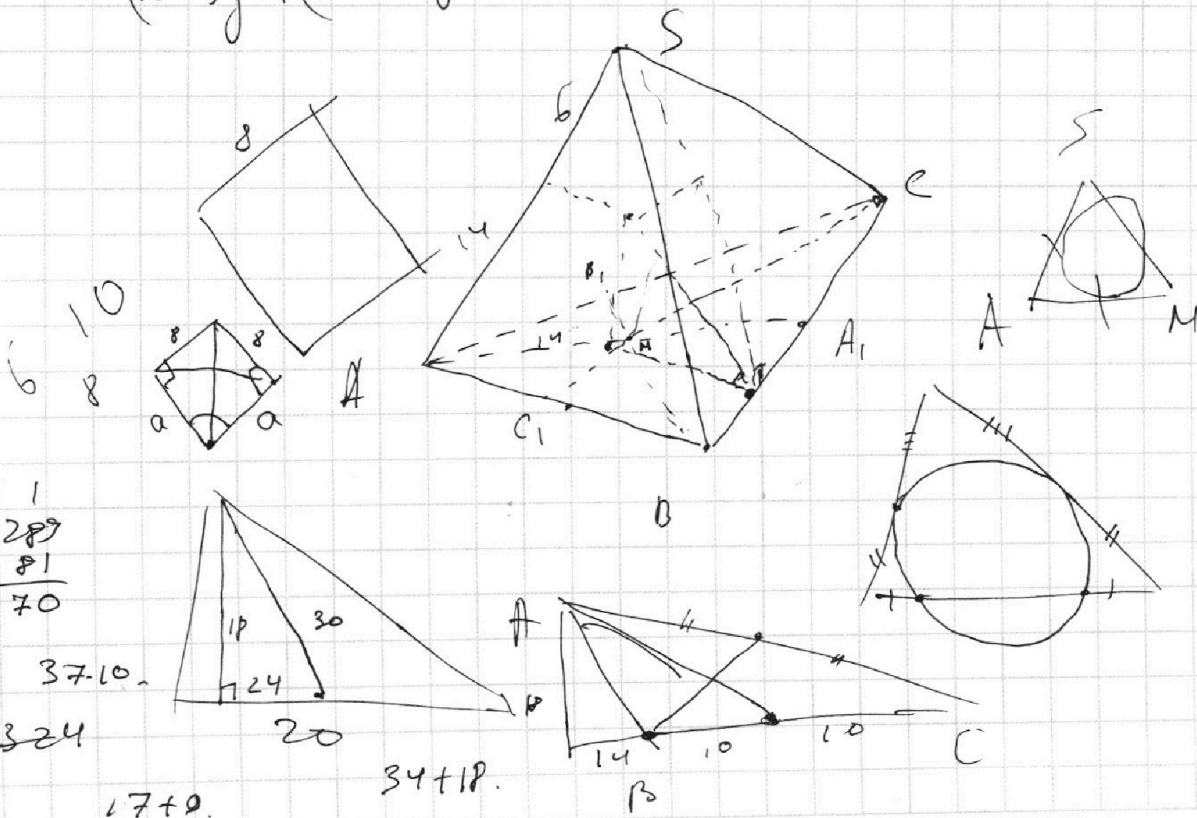
$$25(k^2+1) = b^2$$

$$y = \frac{x}{k}$$

$$D = 4k^2s^2 + 324 + 72ks -$$

$$k^2y^2 + s^2 + 2kys + y^2 + 18y + 77 = 0 \Rightarrow -4(k^2s^2 + s^2 + 77k^2 + 77) =$$

$$(k^2+1)y^2 + (2ks+18)y + s^2+77 = 0 \quad = 324$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$a^x = b \quad b^{y^x} = a^x = b \quad a^x b^y = ab.$$

$$a^{x \cdot \frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{x}} \quad b^t = a \quad xy = 1$$

$$a^2 - \frac{6}{a} = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{x^3} \frac{1}{121} = \frac{\log_x \frac{1}{121}}{3} = \frac{-\log_x 121}{3} = \frac{-2 \log_x 11}{3}$$

$$\frac{1}{a^4} - 6a = -\frac{2a}{3} - 5$$

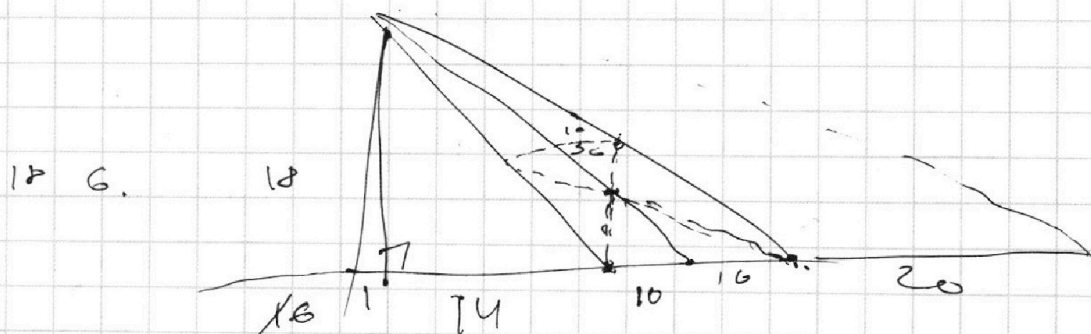
$$\frac{1}{a^4} - 6a = -\frac{2a}{3} - 5$$

$$1 - 6a^5 = -\frac{2a^5}{3} - 5a^4 \quad 3 - 18a^5 = -2a^5 - 5a^4$$

$$16a^5 - 5a^4 - 3 = 0.$$

$$\log_{11} x + \log_{11} y = \log_{11} xy$$

$$\frac{1}{b^4} + b = -\frac{13}{3} b - 5$$



$$18^2 \cdot 3 + 18^2$$

$$18^2 \cdot 10 = 18 \sqrt{10} \cdot \frac{1}{3}$$

$$6 \sqrt{10}$$

$$18 + 18$$

$$54^2 + 18^2 =$$

$$18^2 \cdot 4$$

$$p^2 q^2 = \frac{64}{145} = \sqrt{29} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\frac{64}{145} = \sqrt{29} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Черновик.

$$(abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{14} \cdot 5^{16} = 2^{59} \cdot 3^{52}$$

2.9.

р1.

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 21 \\ \hline 25 \\ \hline 59 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 28 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 81 = 4.$$

$$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \quad x^2 + (y+9)^2 = 4.$$

$$x^2 + y^2 = 25.$$

$$x+y=6$$

$$y+z=14$$

$$z+16=12$$

$$x+y+z=12$$

$$z=$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$$

$$b = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^4$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^4$$

$$c = 2^8$$

$$t + 16 - t + 14 - t = 18$$

$$t + 25 - t + 13 - t = 30$$

$$a = 2^8$$

$$16 + 14 - t = 18$$

$$25 + 13 - t = 30$$

$$b = 2^6$$

$$t = 30 - 18 = 12.$$

$$t = 8.$$

a

a

$$t + 28 - t + 13 - t = 26.$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

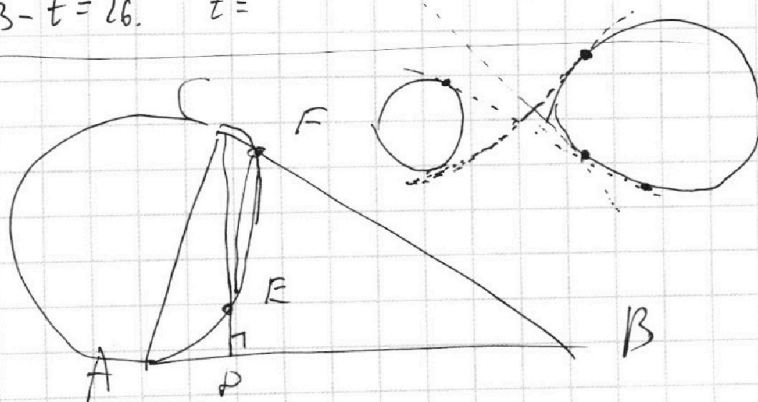
$$28 + 13 - t = 16. \quad t =$$

$$t + 28 - t$$

$$5x + 6ay - b = 0.$$

$$6ay = b - 5x.$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a triangle and a sphere.

Diagram 1: A triangle with vertices A, B, and C. A point H is marked on the base AB. A line segment CH is drawn. A curved line is drawn through H, labeled $x + \pi s$.

Diagram 2: A similar triangle with vertices A, B, and C. Points E and F are marked on the sides AC and BC respectively. A line segment EF is drawn. A curved line is drawn through E and F, labeled $x + \pi s$.

Equations and Calculations:

$$10(x + \pi s)$$

$$5\pi - 20k\pi$$

$$20k\pi - 4\pi =$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4.$$

$$AB = 1,4 BD.$$

$$AD = AB - BD = 1,4 BD - BD = 0,4 BD$$

$$EF = EF = \frac{1}{2} BD.$$

$$\left(\frac{CD}{EF}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{0,4}}{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{0,4 \cdot 4}{0,25} = \frac{1,6}{0,25} = \frac{16}{25} = \frac{4}{5}$$

$$CD = \sqrt{0,4} BD$$

$$CD^2 = 0,4 BD^2$$

$$10(\arccos x) + 10 \arccos$$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$$

$$10 \arccos(\sin x) + 10 \arcsin(\sin x) = 10\pi$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x.$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x.$$

$$0, 10\pi$$

$$9\pi - 2x \geq 0.$$

$$9\pi \geq 2x.$$

$$9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$2x \leq -\pi$$

Trigonometric Functions:

$$\arcsin \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$10 \arcsin x \in [-5\pi, 5\pi]$$