



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x , y , z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 1

$$a \cdot b : 3^{11} \cdot 7^{11}$$

$$b \cdot c : 3^{18} \cdot 7^{16}$$

$$a \cdot c : 3^{27} \cdot 7^{38}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 3^{11+18+27} \cdot 7^{11+16+38}$$

$$(abc)^2 : 3^{50} \cdot 7^{65}$$

$$abc : 3^{25} \cdot 7^{33}$$

$$65 : 2 = 32,5 \quad \text{округляем} \quad (33) > 32,5 > 32$$

$$abc \geq 3^{25} \cdot 7^{33}$$

$$a \cdot c : 3^{27} \cdot 7^{38}$$

$$a \cdot b \cdot c : 3^{25} \cdot 7^{38}$$

$$abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$$

$$a = 3^7 \cdot 7^{11}$$

$$b = 3^4$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{27}$$

$$abc = 3^{25} \cdot 7^{38}$$

$$\text{Ответ: } 3^{25} \cdot 7^{38}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$(a, b) = 7 \quad (a+b, a^2 - 8ab + b^2) = (a+b, a^2 - 8ab + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)) =$$

$$= (a+b, 10ab) \quad \text{если } a:p \Rightarrow b:p$$

$$a+b:p \quad 10ab:p$$

p - простое число,

на которое делится $a+b$ и $10ab$

$$10ab:p \quad a:p \quad b:p \quad 10:p \quad p_1=2 \quad p_2=5 \quad p_1 p_2 = 10$$

$$m=10$$

$$a=1 \quad b=9$$

$$\frac{1+9}{1-72+81} = \frac{10}{10} \quad 10:10$$

$$10:10$$

Ответ: 10

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 3

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$2x^2 + x + 3 = a \quad 1 - 4x = b$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

~~Докажу, что правая и левая часть одного знака,
и тогда возведем~~

$$a+b+a-2\sqrt{a^2+ab}=b^2$$

$$-b^2+b+2a=2\sqrt{a^2+ab}$$

$$b^4+b^2+4a^2-2b^3-4b^2a+4ab=4a^2+4ab$$

$$b^2(b^2-2b+1-4a)=0$$

$$\boxed{\text{если } b=0 \quad 1-4x=0 \quad x=\frac{1}{4} \\ \sqrt{a}-\sqrt{a}=0 \quad x=\frac{1}{4} - \text{решение}} \\ (b-1)^2=4a$$

$$(b-1)^2=4a$$

$$(1-4x-1)^2=4(2x^2+x+3)$$

$$16x^2=8x^2+4x+12$$

$$8x^2-4x-12=0 \quad 2x^2-x-3=0 \quad (2x-3)(x+1)=0$$

$$x=-1$$

$$\sqrt{2+3+4} - \sqrt{2-1+3} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3-2=1 \neq 1+4$$

$$x=\frac{3}{2} \quad \sqrt{\frac{9}{2}-\frac{9}{2}+4} - \sqrt{\frac{9}{2}+\frac{3}{2}+3} = \sqrt{4} - \sqrt{6+3} = 2-3=-1 \neq 1-6$$

Ответ: $\frac{1}{4}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 5

$$3x+2y=z, \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x+2y}$$

$$3y(3x+2y) + x(3x+2y) = 2xy$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy - 2xy = 0$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \quad (x+y)(x+2y) = 0$$

$$x = -y \vee x = -2y$$

$$x = -y$$

$$x = -2y$$

$$\frac{3y^2 - 4y^2 - (-3y+2y)^2}{y^2 - 6y^2}$$

$$\frac{12y^2 - 4y^2 - (-6y+2y)^2}{4y^2 - 6y^2}$$

$$\frac{-y^2 - y^2}{-5y^2}$$

$$\frac{8y^2 - 16y^2}{-2y^2}$$

$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{8}{2} = 4$$

$$\frac{2}{5} < 4$$

Ответ: 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 6

скорость ~~велосипедиста~~ ^{мотоциклиста} - v_1

время за которое он проехал - t_1

Весь путь - S

скорость велосипедиста - v_2

S_2 - путь, который проедет велосипедист за t_1

t_2 - время за которое приедет ~~велосипедист~~ ^{мотоциклист}

со скоростью $v_1 + 6$

Тогда

$$S = v_1 \cdot t_1$$

$$S = v_2 (t_1 + 2)$$

$$S_2 = v_2 \cdot t_1$$

$$S_2 + 96 = v_1 (t_1 + 2)$$

$$S = (v_1 + 6) t_2$$

$$S = (v_2 + 6) (t_2 + \frac{5}{4})$$

$$S = v_1 t_1$$

$$S = v_2 (t_1 + 2)$$

$$v_2 t_1 + 96 = v_1 (t_1 + 2)$$

$$S = (v_1 + 6) t_2$$

$$S = (v_2 + 6) (t_2 + \frac{5}{4})$$

$$v_1 = \frac{S}{t_1}$$

$$S = v_2 (t_1 + 2)$$

$$v_2 t_1 + 96 = S + \frac{2S}{t_1}$$

$$S = \frac{S t_2}{t_1} + 6 t_2$$

$$S = v_2 t_2 + 6 t_2 + \frac{5}{4} v_2 + \frac{30}{4}$$

$$t_2 = \frac{S}{\frac{S}{t_1} + 6} = \frac{S t_1}{S + 6 t_1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} S = V_2(t_1 + 2) \\ V_2 t_1 + 96 = S + \frac{2S}{t_1} \\ S = \frac{S t_1 + 2}{\frac{S}{S+6t_1} + \frac{6S t_1}{S+6t_1}} + \frac{5}{4} V_2 + \frac{30}{4} \end{cases}$$

$$V_2 = \frac{S}{t_1 + 2}$$

$$\begin{cases} \frac{S t_1}{t_1 + 2} + 96 = S + \frac{2S}{t_1} * \\ S = \frac{S^2 t_1}{(S+6t_1)(t_1+2)} + \frac{6 S t_1}{S+6t_1} + \frac{5 S}{4(t_1+2)} + \frac{30}{4} ** \end{cases}$$

$$* \quad \frac{S t_1}{t_1 + 2} + 96 = S + \frac{2S}{t_1}$$

$$S t_1^2 + 96 t_1^2 + 192 t_1 = S t_1^2 + 2 S t_1 + 2 S t_1 + 4 S$$

$$t_1^2 \cdot 96 + t_1 (192 - 4S) - 4S = 0$$

$$D = (192 - 4S)^2 + 4 \cdot 96 \cdot 4S = 16((48 - S)^2 + 96S) = 16(48^2 - 96S + S^2 + 96S)$$

$$= 16(48^2 + S^2)$$

$$t_1 = \frac{4S - 192 + 4\sqrt{48^2 + S^2}}{96 \cdot 2} = \frac{S - 48 + \sqrt{48^2 + S^2}}{48}$$

$$** \quad S = \frac{4S^2 t_1 + 24 S t_1 (t_1 + 2) + 5S(S + 6t_1) + 30(S + 6t_1)(t_1 + 2)}{4(S + 6t_1)(t_1 + 2)}$$

$$4S(S t_1 + 6 t_1^2 + 12 t_1 + 2S) = 4S^2 t_1 + 24 S t_1^2 + 48(S t_1 + S^2) + 30 S t_1 + 30 S t_1 + 60S + 120 t_1^2 + 360 t_1$$

Ответ:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$a+b+a-2\sqrt{a^2+ab}=b^2$$

$$-b^2+2a+b=2\sqrt{a^2+ab}$$

$$b^4+4b^3+b^2-4b^2a-2b^3+4ab=4a^2+4ab$$

$$b^4-2b^3+b^2-4b^2a=0$$

$$b^2-2b+1-4a=0$$

$$(b-1)^2=4a$$

$$(1-4x)^2=4 \cdot (2x^2+x+3)$$

$$16x^2=8x^2+4x+12$$

$$8x^2-4x-12=0$$

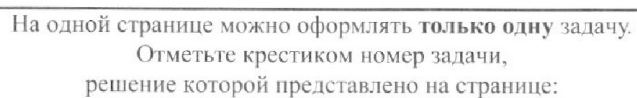
$$2x^2-x-3=0$$

$$2x+3$$

$$(x+1)(2x-3)$$

$$792 \leq 2 \cdot 96 \cdot 2 \cdot 48$$

$$(4(48-5))^2$$


МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

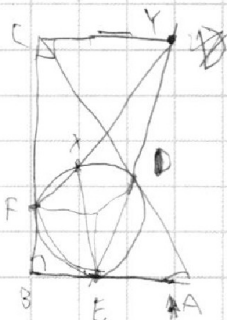


$$\begin{aligned}
 96 + V_B t_1 &= V_M (t_1 + 2) \\
 S_1 &= V_M t_1 + V_B (t_1 + 2) = V_M + 6 \quad (V_B = 6) \\
 V_M t_1 &= V_B (t_1 + 2) \quad (V_M + 6) t_2 = (V_B + 6) (t_2 + \frac{5}{4})
 \end{aligned}$$

$$V_B = \frac{V_M (t_1 + 2) - 96}{t_1}$$

$$(V_M + 6) t_2 = \left(\frac{V_M (t_1 + 2) - 96}{t_1} + 6 \right) \left(t_2 + \frac{5}{4} \right)$$

$$t_2 (V_M + 6) = \frac{V_M (t_1 + 2) - 96}{t_1} + 6 = \frac{5}{4} \cdot \frac{V_M (t_1 + 2) - 96}{t_1} + 6$$

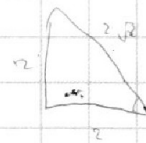


$$EX = 2\sqrt{2} \cdot XY$$

$$\frac{EX}{\sin \angle XYE} = \frac{XY}{\sin \angle EXY}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{EX}{XY} = \frac{\sin \angle XYE}{\sin \angle EXY} = \frac{ED}{DY}$$

$$2\sqrt{2}$$



~~32x~~

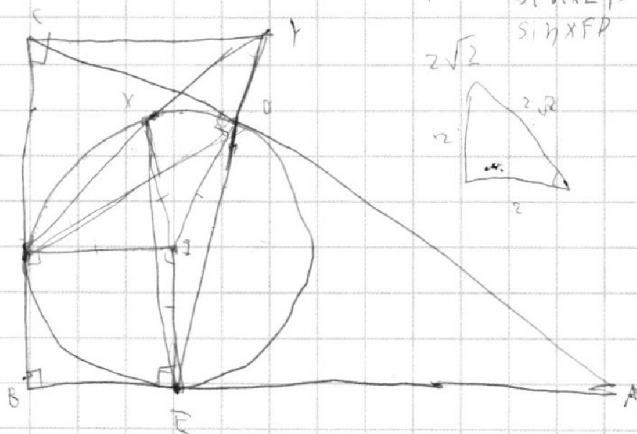
$$(x+1)(32x^3 - 64x^2 + 26x - 3)$$

$$= 32 \cdot 27 - 64 \cdot 9 + 26 \cdot 3 - 3$$

$$= 32 \cdot 9 - 64 \cdot 3 + 26 - 1$$

$$= 32 \cdot 9 - 64 \cdot 3 - 27$$

$$= 32 \cdot 8 - 64 - 9$$



$$2\sqrt{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_1 = V_M \cdot t_1 \quad t_1 = \frac{S}{V_M}$$

$$S_1 = V_B \cdot (t_1 + 2)$$

$$S_1 = (V_M + 6) \cdot t_2 \quad t_2 = \frac{S_1}{V_M + 6}$$

$$S_1 = V_B \cdot (t_2 + 2)$$

$$96 + V_B \cdot t_1 = V_M \cdot (t_1 + 2)$$

$$S_1 = (V_B + 6) \cdot \left(t_1 + \frac{S_1}{V_M + 6} \right)$$

$$S_1 = V_B \cdot \left(\frac{S}{V_M} + 2 \right)$$

$$96 + V_B \cdot \frac{S}{V_M} = V_M \cdot \left(\frac{S}{V_M} + 2 \right)$$

$$V_B = \frac{(S + 2V_M - 96)V_M}{S}$$

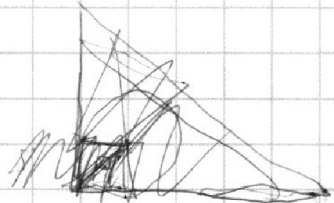
$$S_1 = \frac{(S + 2V_M - 96)V_M}{S_1} \cdot \left(\frac{S}{V_M} + 2 \right)$$

$$S_1 = \frac{(S + 2V_M - 96)V_M + 6S}{S} \cdot \left(\frac{S_1 + 6V_M}{V_M + 6} \right)$$

$$S = 2V^2 - 96V + 48$$

$$S = \frac{(5V_M + 2V^2 - 96V + 6S) \left(S + \frac{5}{4}V + \frac{15}{2} \right)}{S(V_M + 6)}$$

$$S^2 V + 6S^2 = S^2 V + \frac{5}{4} S V^2 + \frac{15}{2} S V + 2V^2 S + \frac{5}{2} V^3 + 15V^2$$



$$S^2 = 25V_M + 4V^2 - 192V + 96$$

$$20 = 25V + 4V^2 - 192V - 96$$

$$5V + 2V^2 = 95V - 48$$

20

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$d \cdot b \cdot bc \cdot a (= a^2 b^2 c^2 = 3^{11+15+21} \cdot 7^{11+16+39})$$

$$abc = 3^{25} \cdot 7^{39}$$

$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

$$(a+b)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{R}}$$

$$(a+b, a^2-8ab+b^2) = (a+b, 70ab)$$

$$\frac{m}{b} \rightarrow \frac{a}{b} \rightarrow \frac{a+b}{b}$$

$$\frac{3+5}{0-8 \cdot 3+49}$$

$$\frac{7+9}{1-8 \cdot 10+9^2}$$

$$\frac{10}{10} = 1$$

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1$$

$$\frac{1-6+4}{19-9+4}$$

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

$$(2x-4)(x-1)$$

$$\frac{3}{16}$$

$$1 \sqrt{4x}$$

$$1 \sqrt{4x} \quad 3x^2-5x-7 < 0$$

$$2x^2-3x+4 + 2x^2+x+3 - 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = 1+16x^2-8x$$

$$-2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = 2x^2-8x-3$$

$$a=b$$

$$a^2=b^2$$

$$a^2-b^2=0$$

$$(a-b)(a+b)=0 \quad 6-3=3$$

$$(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3) = (6x^2-3x-3)^2$$

$$4x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 5x + 12 = 36x^4 - 36x^3 - 24x^2 + 18x + 9$$

$$32x^4 - 32x^3 - 38x^2 + 23x - 3 = 0$$

$$\frac{2-1+3}{3-2} = 7+4$$

$$M \quad B$$

$$S_1 = V_M \cdot t_1$$

$$S_1 = V_B \cdot (t_1 + 2)$$

$$S_1 = (V_M + 6) t_2$$

$$S_1 = (V_B + 6) (t_2 + \frac{5}{4})$$

$$96 + S_2 = V_M \cdot (t_1 + 2)$$

$$S_2 = V_B \cdot t_1$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$a+b + 2\sqrt{a^2+ab} = b^2 + 2ab + b$$

$$2\sqrt{a^2+ab} = b^2 - 4b^2a - 2b^2$$

$$(S_1) \cdot S_2 \quad V_M \cdot V_B \quad t_1 \quad t_2$$

$$b^4 - 2b^3 + b^2 - 4b^2a$$

