



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- ✓ 3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- ✓ 5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

- ✓ 6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- ✓ 7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1

Пусть $a = 2^{k_1} \cdot 7^{t_1} \cdot a'$, $b = 2^{k_2} \cdot 7^{t_2} \cdot b'$, $c = 2^{k_3} \cdot 7^{t_3} \cdot c'$

Тогда $abc = 2^{k_1+k_2+k_3} \cdot 7^{t_1+t_2+t_3} \cdot a' \cdot b' \cdot c'$

и есть $2^{14} \cdot 7^{10}$

$k_1+k_2 \geq 14$, $t_1+t_2 \geq 10$

Аналогично

$k_2+k_3 \geq 17$, $t_2+t_3 \geq 17$

$k_1+k_3 \geq 20$, $t_1+t_3 \geq 37$

Сложив неравенства:

$2(k_1+k_2+k_3) \geq 14+17+20$

$k_1+k_2+k_3 \geq 25,5$

$k_1+k_2+k_3 \geq 26$, $k_1 \in \mathbb{N}_0, k_2 \in \mathbb{N}_0, k_3 \in \mathbb{N}_0$

Это достигается при $k_1=0, k_2=6, k_3=12$

$2(t_1+t_2+t_3) \geq 10+17+37$

$t_1+t_2+t_3 \geq 32$

Так как $t_1+t_3 \geq 37$, то

$t_1+t_2+t_3 \geq 37$

Достигается

при $t_2=0, t_3=0, t_1=10$

$k_1+k_2+k_3 \geq 26$, $t_1+t_2+t_3 \geq 37$

Заметим, что $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Равенство достигается при $a = 2^{10} \cdot 7^0$, $b = 2^6 \cdot 7^0$, $c = 2^{12} \cdot 7^{37}$

abc при этом равно $2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Так как m - наибольшее такое, что
 $a+b$ и $a^2 - cab + b^2$ делятся на m , то
 $m = \text{НОД}(a+b, a^2 - cab + b^2) =$
 $= \text{НОД}(a+b, (a+b)^2 - cab) = \text{НОД}(a+b, cab),$
так как $\frac{a}{b}$ - несократима, то $\text{НОД}(a, b) = 1$
 $\text{НОД}(a+b, a) = \text{НОД}(a+b, b) = 1$. Значит
 $\text{НОД}(a+b, ab) = 1$, а значит $\text{НОД}(a+b,$
 $cab) = \text{НОД}(a+b, c) \leq c$.

Пример на $c=8$: $a=1, b=7$, где $\frac{a}{b} = \frac{1}{7}$ - несократима.
 $a^2 - cab + b^2 = 1 - 6 \cdot 7 + 7 \cdot 7 = 8$.

$8:8$ и $8:8$.

Ответ: $m=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

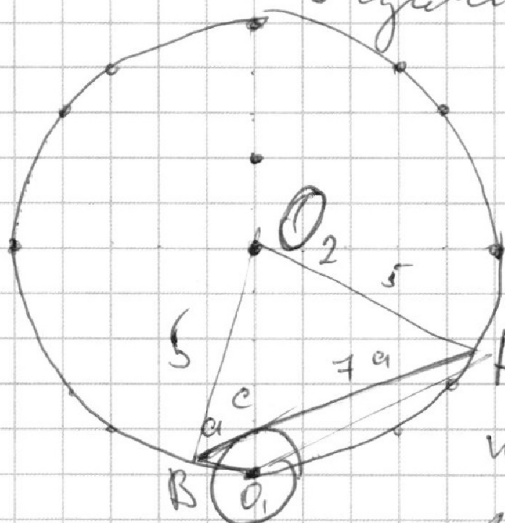
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3



Пусть $BC = a$, тогда
 $AC = BC \cdot 7 = 7a$

$O_1C \perp AB$, так как
 O_1C — радиус, а AB — касательная,
значит $O_1C = 1$

Из т. Пифагора в $\triangle BCO_1$, $BO_1 = \sqrt{1+a^2}$,
аналогично $AO_1 = \sqrt{1+49a^2}$

Из т. синусов в $\triangle BO_1A$ $\frac{AB}{\sin \angle BO_1A} = 2R = 10$

$7a = 10 \cdot \sin \angle BO_1A$, $\sin \angle BO_1A = 0,7a$

$$S_{\triangle AO_1B} = \frac{O_1C \cdot AB}{2} = \frac{O_1B \cdot O_1A \cdot \sin \angle BO_1A}{2}$$

$$1 \cdot 7a = \sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2} \cdot 0,7a$$

$$\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2} = 10$$

$$(1+a^2)(1+49a^2) = 100$$

$$49a^4 + 50a^2 - 99 = 0$$

$$49 \cdot (a^2 - 1) \left(a^2 + \frac{99}{49} \right) = 0$$

$$a^2 = 1$$

$$a = \pm 1$$

$$\text{или } a^2 = -\frac{99}{49}$$

нет решения, так как $a^2 \geq 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$q = -1$ - невозможно, т.к. $q > 0$

$q = 1$

$BC = 1, AC = 7$

$AB = 8$

Ответ: $AB = 8$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Решим уравнение и проверим, не является ли корень не отрицательным

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$
$$-7x + 2 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

Если $2 - 7x = 0$, то

$$x = \frac{2}{7} = \text{корень}$$

$$\text{и.к. } 2\left(\frac{2}{7}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 > 0 \text{ и } 2\left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1 > 0$$

Итак

$$1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Сопоставим уравнение 0, и.к. первый корень не отрицательный

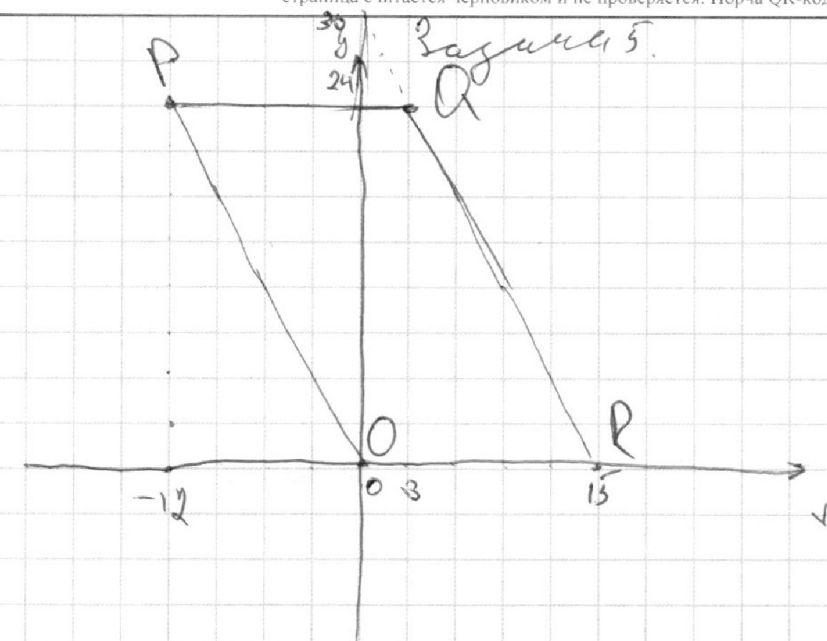
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1$$

Найдем все такие $X(x_0, y_0)$, что

$2x_0 + y_0 = \text{const}$ - они лежат на ~~горизонтальной~~ параллельной PO .

То есть, для любой точки A находим все такие B , лежащие на параллельной PO (т.е. $12 + 2x_1 + y_1 = \text{const}$)

Следовательно, находим все такие пары (A, B) , что они лежат на параллельной PO , и расстояние между которыми 12 (расстояние найдем).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

разность координат ~~там~~ этих точек)
Для каждой пары точек существует
ровно одна их рассматриваемых 12 (с ~~тем~~ -
различные направления)

Заметим, что если прямая не проходит
через точки $(0, x)$, $x \in \mathbb{Z}$, то эта прямая
не проходит и через одну из этих точек.
(и.е. если $2 \cdot 0 + x = c$ не имеет решений, то $c \notin \mathbb{Z}$,
а значит $c \neq 2x_0 + y_0 \in \mathbb{Z}$)

Но есть такие прямые, содержащие хотя
бы одну точку в этом параллелограмме
30 (их разность координат сторон ≥ 0)

Наконец, заметим, что рассматриваемых между ними
12 и все их рассматриваемых точек в параллелограмме
24 (для каждой координаты на прямой Oy
от 0 до 24)

Заметим, что координаты точек равны
координатам пересечения с Oy .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На прямой с целыми координатами ровно
13 точек точек в параллелограмме

($2x_0 + y_0 = 2k$, т.к. точки принадлежат параллелограмму,
то $y_0 > 0$ и $y_0 \leq 24$, ур-ие $2x_0 = 2k - y_0$ имеет
ровно 13 решений)

С целыми, симметрично, 12 точек.

В паре обе прямые одинаковой четности.

Четных пар (с координатами y четной y и
 $0, 2, \dots, 24$) - 13, значит пар точек
 $(13 \cdot 13) \cdot 13 = 13^3$

Нечетных пар ($1, 3, \dots, 23$) - 12, значит
пар точек $12 \cdot (12 \cdot 12) = 12^3$

Следовательно всего пар точек

$$13^3 + 12^3$$

Ответ: $13^3 + 12^3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



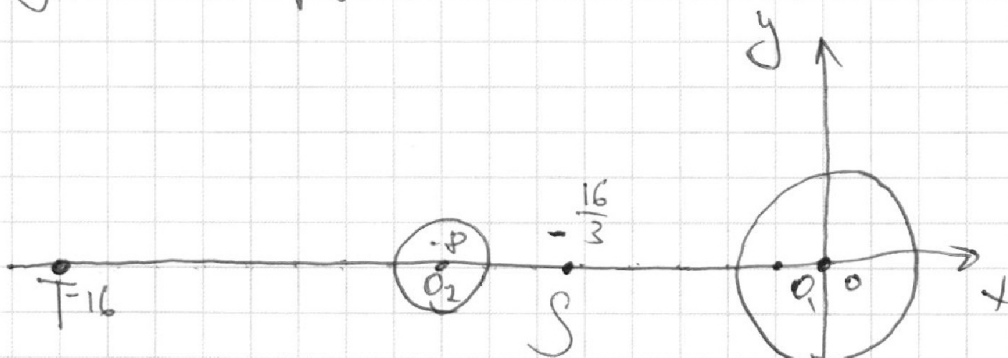
Задача 6

$$\begin{cases} 9x - y + 10y = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1) / (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) - ур-линия

(2) $(x+8)^2 + y^2 - 1$ - ур-окружности
 $x^2 + y^2 - 4$ - ур-окружности

Так как пер-во отрицательное, то
точки $A(x, y)$ находимся ровно внутри
одной окружности или на границе.



Так как окр. не пересекаются, то
точки $A(x, y)$ находимся внутри или на
границе одной из окружностей.
Уточним решение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Три круга пересекаются ^{круг} ~~три~~ в сумме ^{круг} ~~два~~ раза. Так как
каждый круг пересекает ~~два~~ ^{два} в 0, 1 или 2 точ-
ках, то круги касаются ~~одни~~ ^{одни} ~~одна~~ ^{одна}
других. Всего таких
пар 4.

Рассмотрим внешнее касательное,
оно пересекает в центре искомого
окружности. Центр искомого
окружности $T(-16, 0)$, коэффициенты равны
 $\frac{R_2}{R_1} = 2$, то есть $\frac{TO_1}{TO_2} = \frac{x}{x-16} \Rightarrow x = 16$, а
координата -16 .

Пусть уравнение касательной $y = kx + n$

$$0 = -16k + n, n = 16k$$

$$\begin{cases} y = kx + n \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ - имеет одно решение}$$

$$y = kx + 16k$$

$$x^2 + (kx + 16k)^2 = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + k^2 x^2) + 32k^2 x + (256k^2 - 4) = 0$$

$$D = 0$$

$$D = 2^{10} \cdot k^4 - 4 \cdot (k^2 + 1) \cdot (2^8 k^2 - 4) = 0 \quad | : 2^4$$

$$2^6 \cdot k^4 - (k^2 + 1)(2^6 k^2 - 1) = 0$$

$$2^6 \cdot k^4 - 2^6 \cdot k^4 + k^2 + 2^6 k^2 + 1 = 0$$

$$k^2 \cdot (1 + 2^6) = -1$$

$$k^2 = \frac{1}{63}$$

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{63}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}$$

Итак есть 4 касательных $y = \pm \frac{\sqrt{16}}{3\sqrt{7}} + \frac{16}{3\sqrt{7}}$

$$1) \frac{\sqrt{16}}{3\sqrt{7}} - y + \frac{16}{3\sqrt{7}} = 0$$

$$a + -y + 10b = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{16}}{3\sqrt{7}}, b = \frac{16}{15\sqrt{7}}$$

$$2) -\frac{\sqrt{16}}{3\sqrt{7}} - y + \frac{16}{3\sqrt{7}} = 0$$

$$a = -\frac{\sqrt{16}}{3\sqrt{7}}, b = \frac{16}{15\sqrt{7}}$$

Рассмотрим центр окружности
касательной, через него проведем взаимно
перпендикулярные касательные. Радиус $\frac{R_2}{R_1} = 2$,
центр лежит на $O_1 O_2$, $\frac{SO_2}{SO_1} = 2$, значит $SO_2 = \frac{2R}{3} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S O_1 = \frac{\pi}{3}, \quad S(-\frac{16}{3}, 0)$$

Ищем уравнение касательной $y = kx + n$.

$$0 = \frac{-16k}{3} + n, \quad n = \frac{16k}{3}$$

$$\begin{cases} y = kx + n \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ — имеем одно решение}$$

$$y = kx + \frac{16k}{3}$$

$$x^2 + (kx + \frac{16k}{3})^2 = 4$$

$$x^2(1+k^2) + \frac{32k}{3}x + (\frac{256k^2}{9} - 4) = 0$$

$$D = 0$$

$$D = \frac{2^{10} \cdot k^2}{9} - 4 \cdot (1+k^2) \cdot (\frac{2^8 \cdot k^2}{9} - 4) = 0 \quad | : 2^4$$

$$\frac{2^6 \cdot k^2}{9} - (1+k^2) \cdot (\frac{2^6 \cdot k^2}{9} - 1) = 0$$

$$\frac{2^6 \cdot k^2}{9} - \frac{2^6 \cdot k^4}{9} + k^2 - \frac{2^6 \cdot k^2}{9} + 1 = 0$$

$$k^2 \left(\frac{2^6}{9} - 1 \right) = 1$$

$$k^2 \left(\frac{55}{9} \right) = 1$$

$$k^2 = \frac{9}{55}$$

$$k = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

уравнение $y = \pm \frac{3x}{\sqrt{55}} + \frac{16}{\sqrt{55}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \frac{3x}{\sqrt{55}} - y + \frac{16}{\sqrt{55}} = 0$$

$$a + -y + 10b = 0$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{55}}, \quad b = \frac{16}{10\sqrt{55}}$$

$$2) -\frac{3x}{\sqrt{55}} - y + \frac{16}{\sqrt{55}} = 0$$

$$a = -\frac{3}{\sqrt{55}}, \quad b = \frac{16}{10\sqrt{55}}$$

Ответ: $a_{1,2} = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}, \text{ где max } b = \frac{16}{10\sqrt{55}}$
 $a_{3,4} = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}, \text{ где max } b = \frac{8}{15\sqrt{7}}.$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

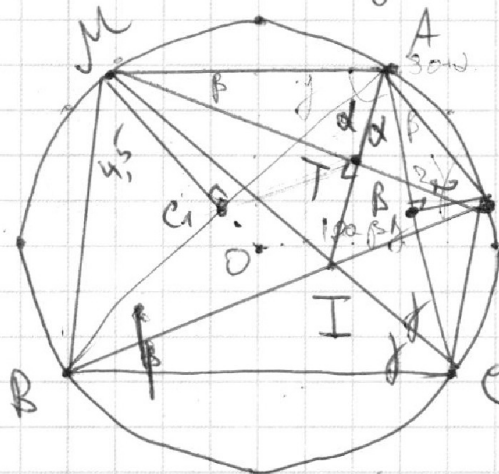
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7



Так как M и N —
середины AB и AC , то
 CM и BN — медианы.

$T = MN \cap AI$

То T — точка пересечения $AN = MC = NI$ и
 $AM = MB = MI$.

Пусть $MC \perp AB$ и $BN \perp AC$, и, к
 $\triangle BMC$ и $\triangle CNB$ — равнобедренные, так
 C и B — середины AB и AC

Стороны MC и BN — $\frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2}$ и $4,5 \cdot (2R - 4,5)$,
то есть $AB^2 = 18 \cdot (2R - 4,5)$, $R = \frac{AB^2}{36} + \frac{4,5}{2}$

Аналогично $AC^2 = 2 \cdot (2R - 2)$, $R = \frac{AC^2}{16} + 1$

$$\frac{AB^2}{36} + \frac{4,5}{2} = \frac{AC^2}{16} + 1 \quad | \cdot 4$$

$$\frac{AB^2}{9} + 9 = \frac{AC^2}{4} + 4 \quad | \cdot 36$$

$$4AB^2 + 3 \cdot 36 = 9AC^2 + 4 \cdot 36$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$9AC^2 = 4AB^2 + 180$$

$$AC^2 = \frac{4AB^2}{9} + 20$$

Пусть $AC = 2x$, $AB = 2y$

По т. Пифагора $AN = \sqrt{4 + x^2}$, $AM = \sqrt{4,5^2 + y^2}$

$$S_{\triangle ANC} = 2x = \frac{(4 + x^2) \cdot \sin \angle ANC}{2}$$

$$\sin \angle ANC = \frac{4x}{4 + x^2}$$

аналогично
по т. синусов

$$\sin \angle BMA = \frac{3y}{4,5^2 + y^2}, R = \frac{1}{4 + x^2} = \frac{1}{4,5^2 + y^2} \Rightarrow \frac{4 + x^2}{4,5^2 + y^2} = 1$$

Так как $AN = NI$, $MA = MI$, то $MANI$ -
гильбранг, а значит $AI \perp MN$

$$\angle AMN = \angle ABN, \frac{\sin \angle ABN}{AN} = 2R$$

$$\sin \angle ABN = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{4 + x^2} = \frac{AN}{\sqrt{4 + x^2}}$$

$\triangle MAT$ $\angle ATM = 90^\circ$, значит

$$AT = \sin \angle AMT \cdot AM = \frac{\sqrt{4,5^2 + y^2}}{\sqrt{4 + x^2}} = 1$$

А так как $MANI$ -гильбранг, то $AT = IT$,

то есть $AI = 2 \cdot AT = 2$.

Ответ: $AI = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

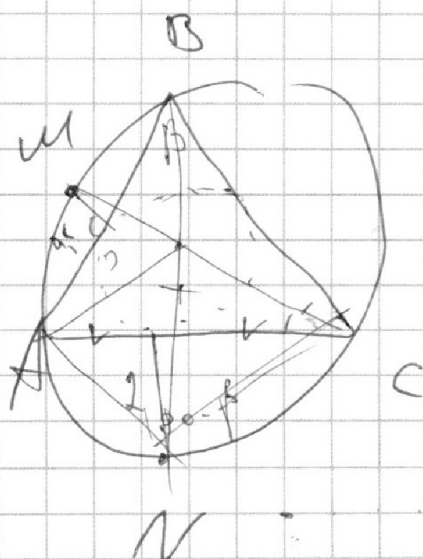
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черный

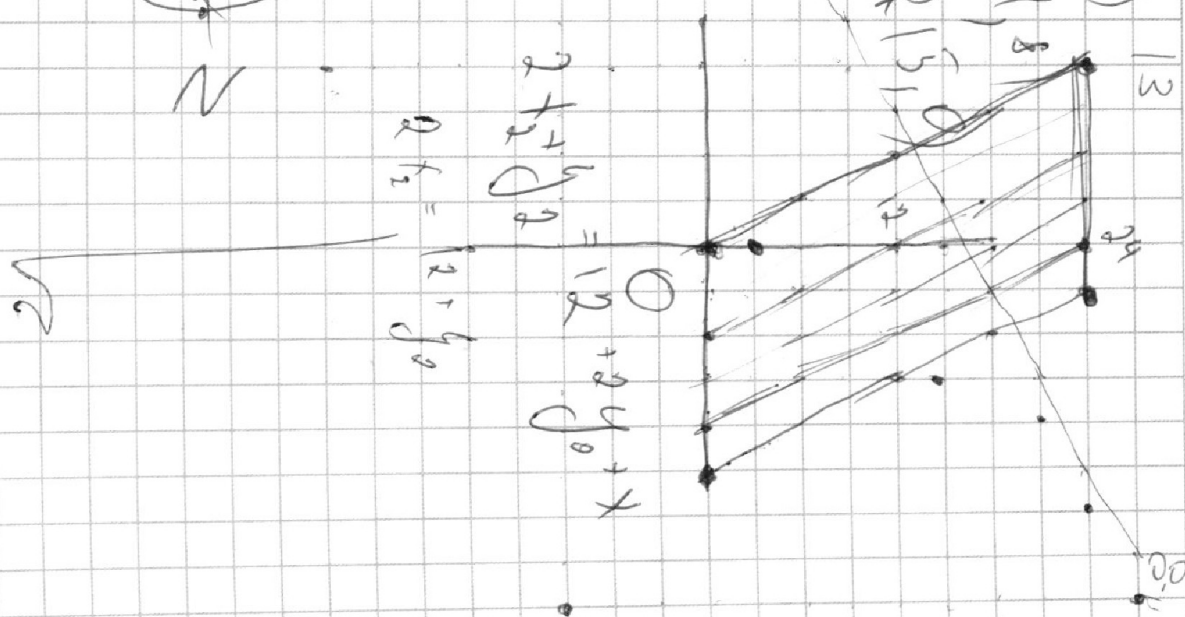
$$\sqrt{(4-1)(24-3)} \leftarrow \sqrt{2\left(4-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = 2 - 7x$$

$Q = 4 - 2.4 \cdot X$

$$(2 + 1 + 24 - \frac{1}{2}) \cdot 5$$



$$\frac{2}{\sin \beta} = 2R$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4}$$

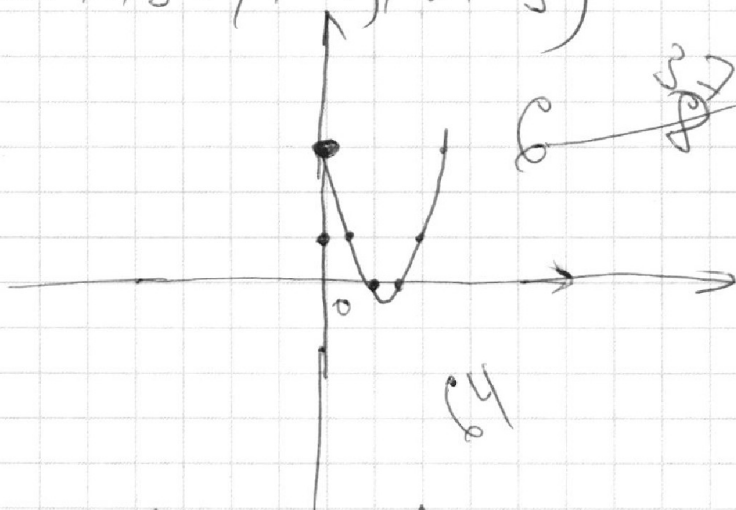
$$8 - 10x^3 = 1 \quad \frac{3}{2}$$

$$x \in [1, 1.5]$$

$$\sqrt{4 - 16}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$$

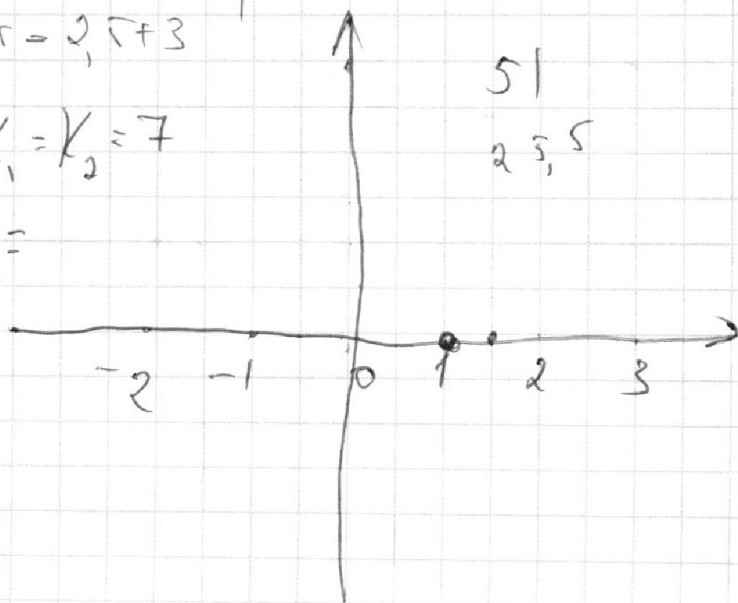
4



$$2 \cdot 0.25 = 0.5 = 2.5 + 3$$

$$K_1 = K_2 = 7$$

$$K_3 =$$



$$\begin{aligned} a_1 &= 2.1 \\ a_2 &= 2.2 \\ a_3 &= 2.3 \\ a_4 &= 2.4 \\ a_5 &= 2.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 \\ 10 \\ 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 \\ 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 51 \\ 23.5 \end{aligned}$$

$$\frac{1.88 \cdot 2}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

2

$$\begin{aligned} ab &= k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &= t \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \end{aligned}$$

$$k \cdot t \cdot 5^2$$

$$ac = 5 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$2x+y=2k$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = \frac{k \cdot 5 \cdot 2^{34} \cdot 7^{47}}{t \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}} =$$

$$= \frac{k \cdot 5 \cdot 2}{t}$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 7 \end{aligned}$$

$$b^2 = \frac{ab \cdot bc}{ac} = \frac{k \cdot t}{5} \cdot \frac{1+7}{1^2-6 \cdot 7+7^2} =$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - cab + b^2) = \frac{8}{50-42} = 1$$

$$= \text{НОД}(a+b, (a+b)^2 - cab) =$$

$$= \text{НОД}(a+b, -cab) = \text{НОД}(a+b, 8)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$4a = \frac{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2}}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$a = \sqrt{2}$$

$$4a = \sqrt{2}$$

$$R = 5$$

$$8a = \sqrt{100 - 64a^2}$$

$$2 = 100$$

$$2 \cdot 64a^2 = 100$$

$$2 = \frac{25}{32}$$

$$a = \frac{5}{4} \sqrt{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{4a}{5}$$

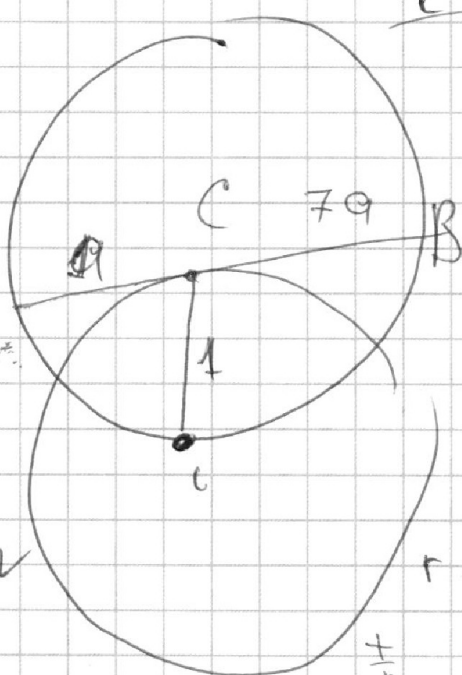
$$\frac{4}{5} = 0.8a$$

$$10 = 100 - 16a^2$$

$$\frac{8a}{\sin \alpha} = 10$$

$$a = \frac{5}{4} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = 0.8a$$



$$5 \cdot 16 \cdot a = (1+a^2)(1+49a^2)$$

$$AB \cdot AC = 4 + 50a^2 + 49a^4$$

$$AO^2 - R^2 = (AO - R)(AO + R)$$

$$a \cdot 7a = 25 - O_2C^2$$

$$O_2C = \sqrt{25 - 7a^2}$$

$$AO_1 = \sqrt{1+a^2}$$

$$BO_1 = \sqrt{1+49a^2}$$

$$AO_1^2 - 1 = a^2$$

$$64a^2 = 1+a^2 + 1+49a^2 - 2\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+49a^2} \cdot \cos$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

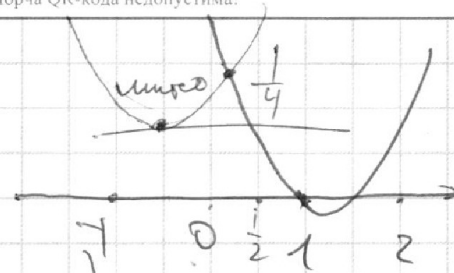
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

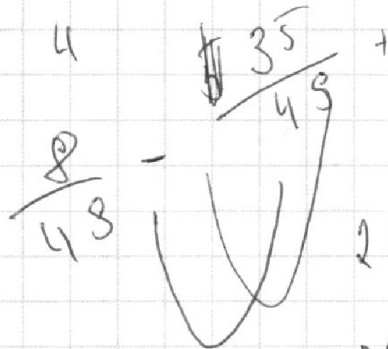


Черновики



$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 - 2x + 1)$$

4

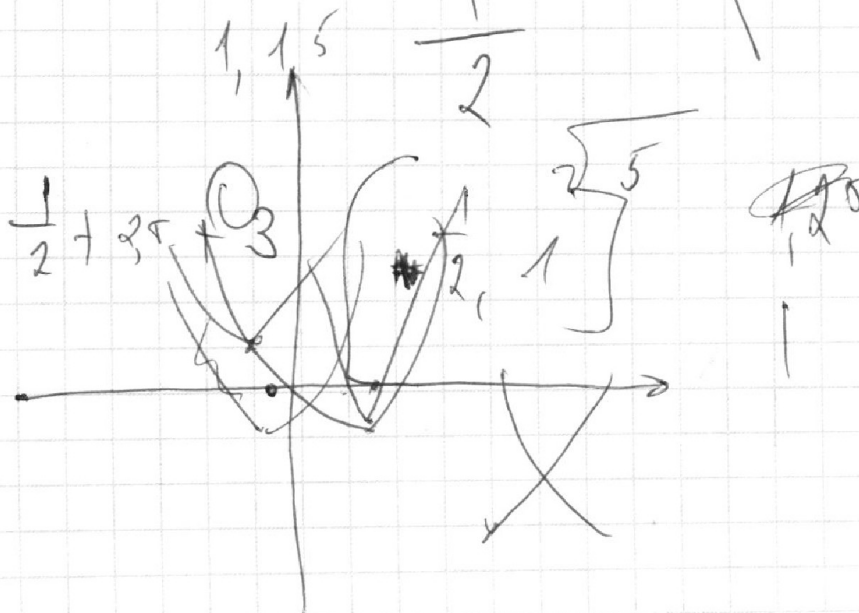


$$2(x^2 + x + \frac{1}{2}) =$$

$$= 2((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}) =$$

$$2x^2 + 2x + 1 < 1$$

$\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

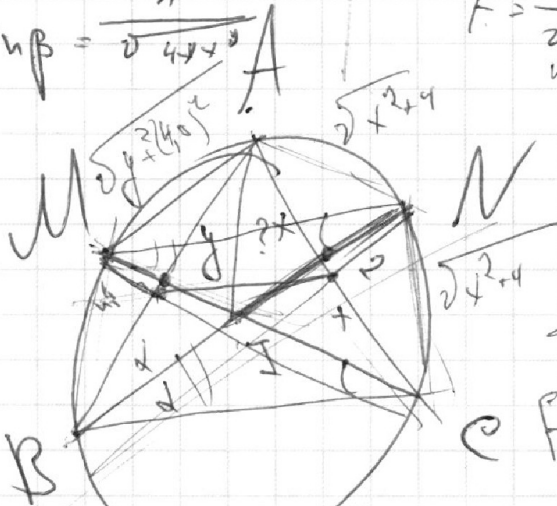
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

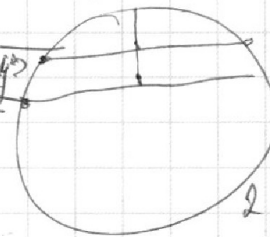
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\sin \beta}{\sqrt{4+4}} = \frac{1}{1}$$

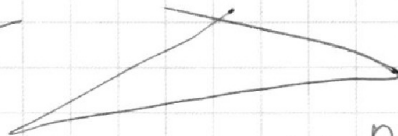
$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{4+4}}$$



$$F = \frac{\sqrt{4+4}}{\sqrt{4+4}}$$



$$\frac{\sin \beta}{2R = AM}$$



$$2(OR - 2) = x^2$$

$$\frac{x^2}{2} + 2 = 2R$$

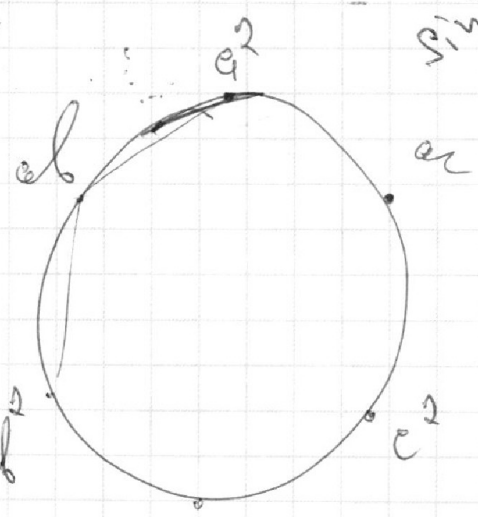
$$R = \frac{x^2}{4} + 1$$

$$4,5 \cdot (2R - 4,5) = 4,5^2$$

$$\frac{4,5}{4+4} = 4,5^2$$

$$(x^2 + 4) \cdot \sin 2\alpha = 2 \cdot 2 + \frac{4x^2}{x^2 + 4}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{4x^2}{x^2 + 4}$$



$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{\sin 2\alpha}{2x}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{x^2 + 4}} = 2$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + 4}}{2x}$$

$$R = \frac{4,5^2}{4,5} + 4,5 = 4,5 + 4,5 = 9$$

$$\frac{4,5^2}{4,5} + \frac{4,5}{2} = 4,5 + 2,25 = 6,75$$

$$\frac{4,5^2}{4,5} + \frac{4,5}{2} = 4,5 + 2,25 = 6,75$$



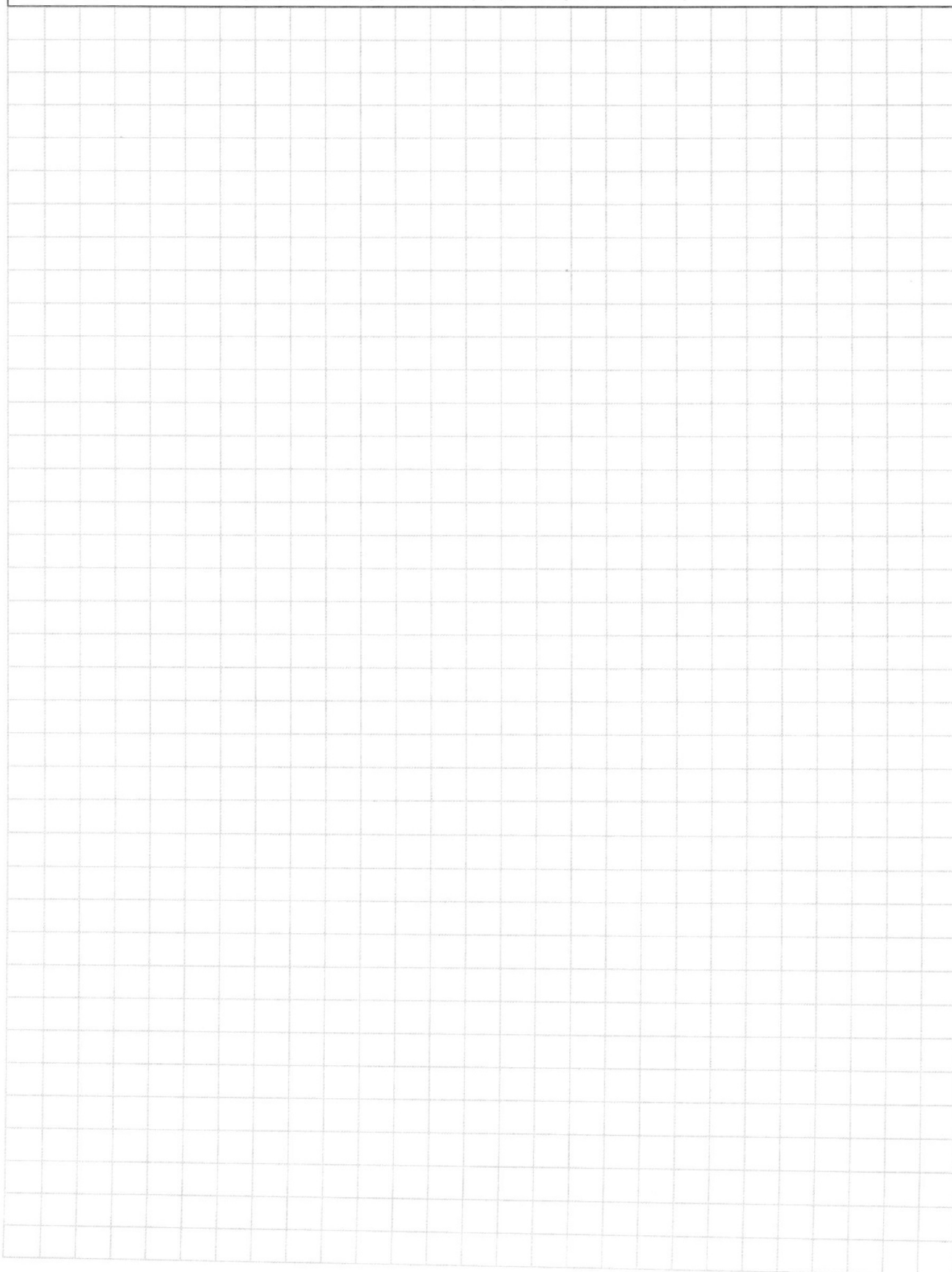
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

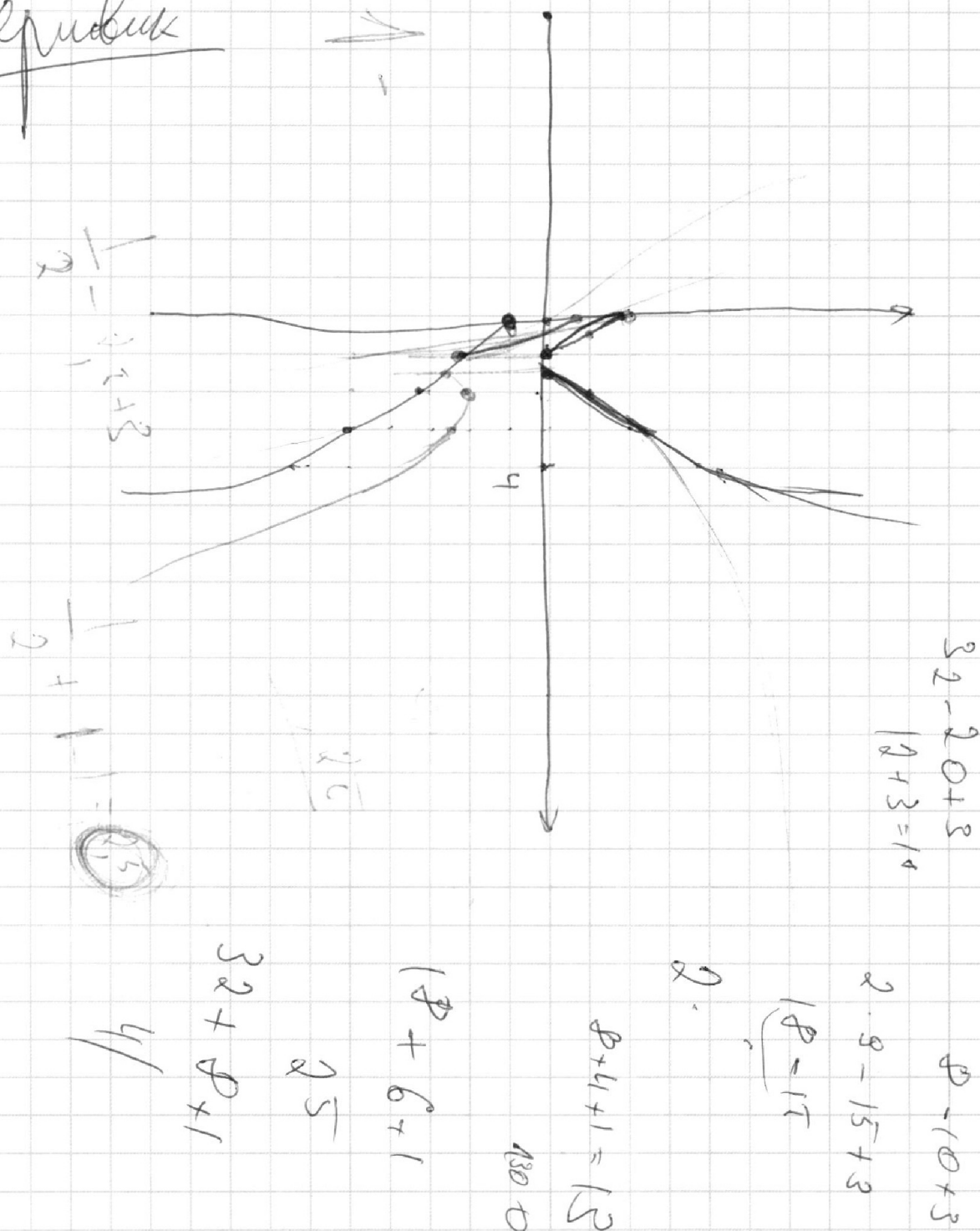
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Черновик~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

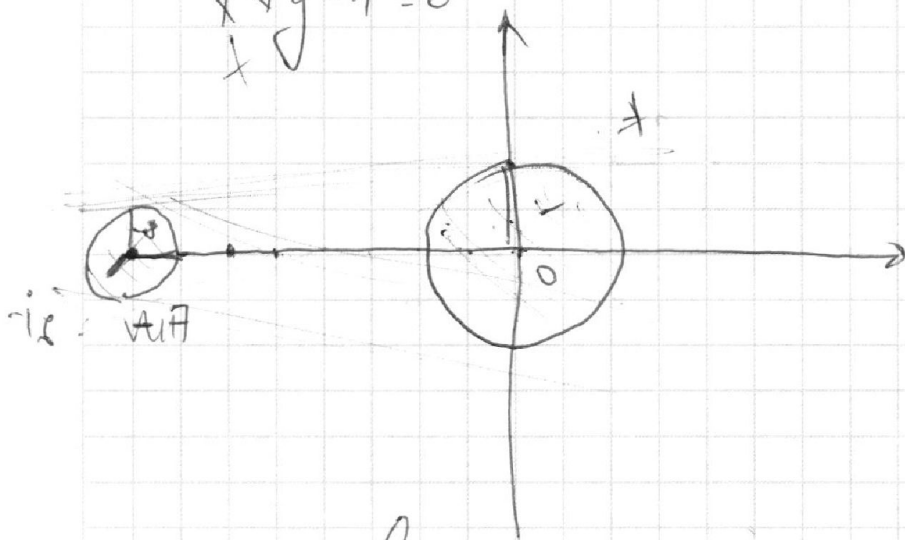
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$ax + by + c = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$



$$y = ax + b$$

$$O(-16, 0)$$

$$0 = -16a + b, b = 16a$$

$$\begin{cases} y = ax + b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$D = 32 \cdot a^4 - 4 \cdot (1 + a^2)$$

$$y = ax + 16a$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + a^2 x^2 + 32a^2 x + 16^2 a^2 x^2 + (ax + 16a)^2 = 4$$