



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$51 \min(a \cdot b \cdot c) = ?$$

$$a \cdot b : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \quad b \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^8 \quad a \cdot c : 2^{19} \cdot 3^{16} \cdot 5^{20}$$

$$\text{Если } a = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}, \text{ то } c = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^{20}, \text{ то } b = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$$

$$\text{Или } a = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{10}, \text{ то } c = 2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^{20}, \text{ то } b = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^9$$

$$a : 2^8, \text{ то } b : 2^{11}, \text{ то } c : 2^{13} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{22}$$

$$\text{Если } a : 2^7, \text{ то } b : 2^{12}, \text{ то } c : 2^{13} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{22}$$

$$a : 2^6, \text{ то } b : 2^{13}, \text{ то } c : 2^{13} \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{23}$$

$2^{22} - \min$

$$\text{Минимум: } 2^{22}$$

$$\text{Если } a : 3^8, \text{ то } b : 3^2, \text{ то } c : 3^{11} \quad a \cdot b \cdot c : 3^{21}$$

$$a : 3^7,$$

$$2^{22} \cdot 3^{21} \cdot 5^{26}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

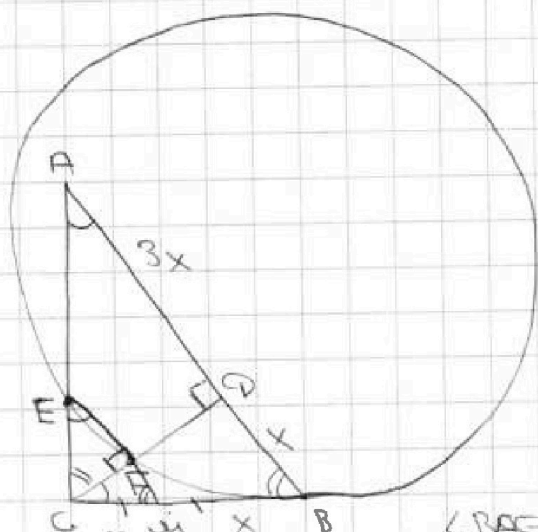
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



52



EF перпен. BC в т. H $\Rightarrow$ EH $\parallel$ AB

~~Стор. в т. А~~

$$\sin \angle ECB = \sin \angle MEC = \frac{EH}{EM} = \frac{EH}{EF} \Rightarrow EM^2 = EH \cdot EF$$

$$BM^2 = EM \cdot FM \text{ (кас. и сек.)}$$

$$\left. \begin{aligned} \angle BAC &= 90^\circ - \angle ABC \\ \angle ECB &= 90^\circ - \angle ABC \end{aligned} \right\} \angle BAC = \angle ECB \Rightarrow \angle ECB = \angle MEC$$

$$\angle BAC = \angle MEC \text{ (кас.)}$$

$$\Rightarrow EM^2 = EH \cdot EF \Rightarrow BM^2 = EM^2 \Rightarrow BM = EM$$

$$\frac{AE}{CE} = \frac{MB}{EM} = 1 \text{ (кас.)} \Rightarrow AE = CE = \frac{AC}{2} = \frac{3x}{2}$$

$$= \frac{BC}{2} = x$$

$$\frac{CF}{FB} = \frac{EM}{MB} = 1 \text{ (кас.)} \Rightarrow CF = FB = \frac{BC}{2} = x$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CAB \text{ (по 2 уг.) } k = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = \frac{1}{2} AB = \frac{3}{2} x$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{9x^2}{8}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot x = \frac{3x^2}{2}$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{9x^2}{8}}{\frac{3x^2}{2}} = \frac{16}{3}$$

Ответ: $\frac{16}{3}$

$$AB \parallel EF \quad \frac{AF}{FB} = \frac{3}{1} = \frac{3x}{x}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$$

$$CF^2 = AF \cdot FB = 3x \cdot x = 3x^2$$

$$CF = \sqrt{3}x$$

По т. Пиф. в $\triangle CFB$:

$$CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$$

По т. Пиф. в $\triangle ABC$:

$$AC = \sqrt{16x^2 + 4x^2} = 2\sqrt{5}x$$

$$\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Σ3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\sin(5 \arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$16 \sin^5(\arcsin(\cos x)) - 14 \sin^3(\arcsin(\cos x)) - \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$16 \cos^5 x - 14 \cos^3 x - \cos x = \cos x$$

$$8 \cos^5 x - 7 \cos^3 x - \cos x = 0$$

$$\cos x (\cos x - 1)(\cos x + 1)(8 \cos^2 x + 1) = 0$$

∅

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Учитывая ограничение, $x = \pm 3\pi, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm 2\pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{2}, 0$

Ответ: $\pm 3\pi, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm 2\pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{2}, 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

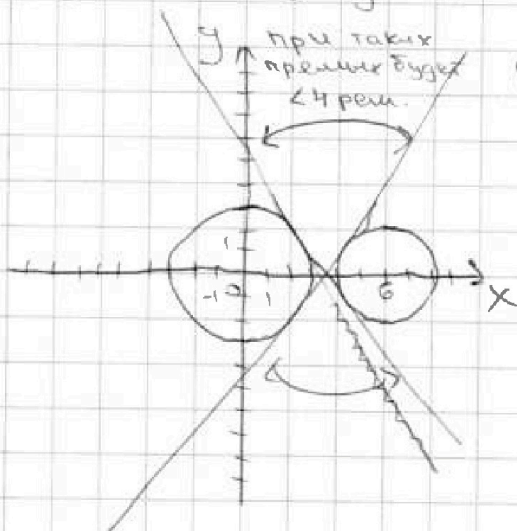
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

54

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \\ x^2+y^2=3^2 \quad (x-6)^2+y^2=2^2 \end{cases}$$



при таких
прямых будет
4 реш.

Нужно найти общие касан-
ия и прямых между собой
при всех будет 4 реш.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Delta 5$ $0.3: x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq \frac{1}{5}$
 $\log_3 x + 6 \log_3 3 = \log_3 243 - 8$ $\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y}^4(3'') - 8$
 $8 = \log_{x^2} 243 - \log_3^4 x - 6 \log_3 3$ $8 = \log_{5^5}^4(3'') - \log_3^4(5y) - 2 \log_{5y} 3$
 $\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{2 \log_3 x} + 8 = 0$ $\log_3 x \log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} - \frac{11}{2 \log_3(5y)} \log_3(5y)$
 $\log_3^5 x + 8 \log_3 x + 3.5 = 0$ $\log_3^5(5y) + 8 \log_3(5y) - 3.5 = 0 + 8 = 0$
 $\log_3^5 x + \log_3^5(5y) + 8(\log_3 x + \log_3(5y)) = 0$
 $\log_3(5xy)(\log_3^4 x - \log_3^3 x \log_3 5y + \log_3^2 x \log_3^2 5y - \log_3 x \log_3^3 5y + \log_3^4 5y) + 8 \log_3(5xy) = 0$
 $\log_3(5xy)(\dots + 8) = 0$

$5xy = 1$
 $xy = \frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

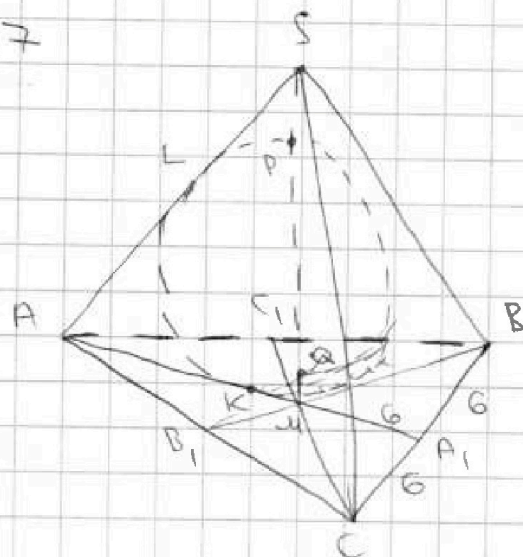
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

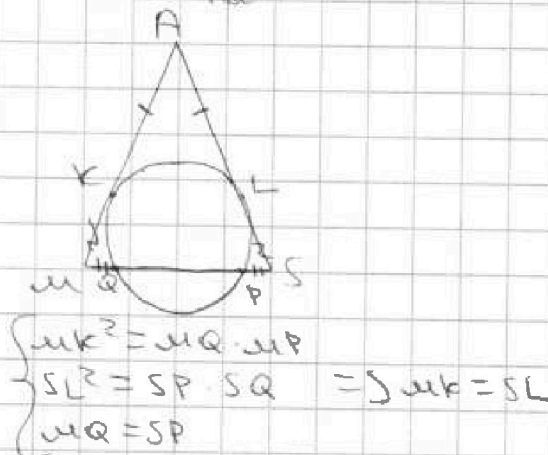
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

57

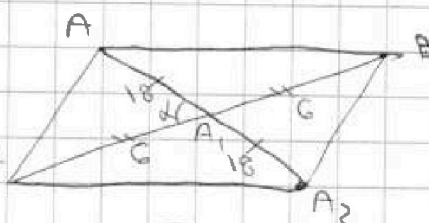


$$SP = MQ \quad S_{\text{прое}} = 90 \quad SA = BC = 12$$



$$\left. \begin{array}{l} AK = AL \text{ (касает)} \\ MK = SL \end{array} \right\} \Rightarrow AK = AS = 12 = BC \Rightarrow MA_1 = 6 \Rightarrow AA_1 = 18$$

Удобнее мерить AA_1 :



$$S_{\text{ABAC}} = 2S_{\text{ABC}} = 180 = \frac{1}{2} AA_1 \cdot BC \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{180 \cdot 2}{18 \cdot 12 \cdot 6} = \frac{5}{6}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\text{Т. cos гл } A_1MC: MC^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 72 - 12\sqrt{11} = 4(18 - 3\sqrt{11})$$

$$MC = 2\sqrt{18 - 3\sqrt{11}} \quad \cos \angle AA_1B = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow CC_1 = 3\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}$$

$$\Rightarrow \text{по т. cos гл } A_1B_1C_1: B_1C_1 = 2\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}$$

$$\Rightarrow BB_1 = 3\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 162 \cdot \sqrt{324 - 99} = 162 \cdot 15 = 2430$$

Ответ: 2430

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$MC^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{4} = 72 - 12\sqrt{11} = 12(6 - \sqrt{11})$$

$$MC = 2\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}, \quad CC_1 = 3\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}, \quad 4(18 - 3\sqrt{11})$$

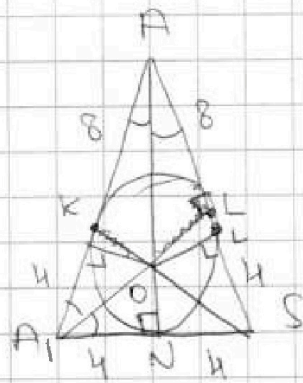
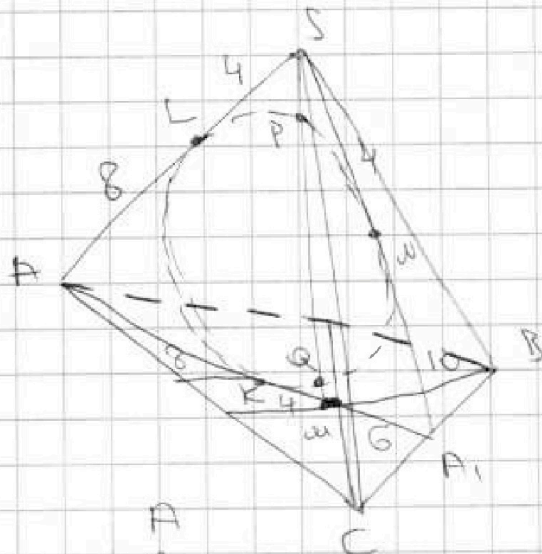
$$MB = 2\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}, \quad BB_1 = 3\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}, \quad AA_1 = 18$$

$$AA_1, BB_1, CC_1 = 162 \sqrt{324 - 99} = 162 \cdot 15 = 2430$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 9 \\ \hline 162 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ - 99 \\ \hline 225 \\ \times 15 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 162 \\ 15 \\ \hline 810 \\ 162 \\ \hline 2430 \end{array}$$

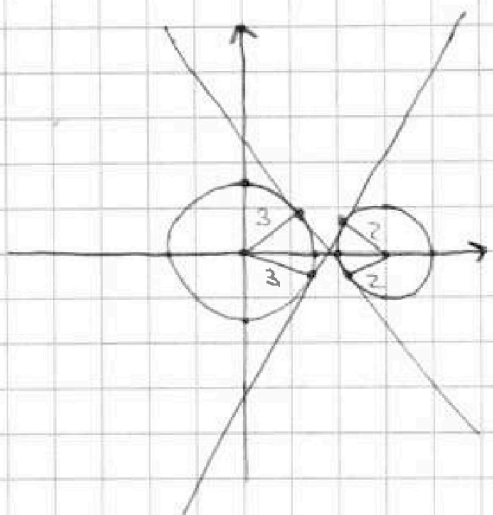


$$AN = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = ax + 2y - 36 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = ax + 2y - 36 \end{cases}$$

$$8x - 12x - 41 = 0 \quad x = \frac{41}{12} = 3\frac{5}{12}$$

$$\begin{array}{l} a^8 \quad c^{11} \quad 8^3 \\ a^7 \quad c^{12} \quad 8^{33} \\ a^6 \quad c^{13} \quad 8^{34} \\ a^5 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^5(5y) + \log_3^5(x) + 8(\log_3(5y) + \log_3(x)) = 0$$

$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

$$\begin{array}{r} x^3y^2 - x^4y \\ (-x^3y^2 - x^4y) \\ \hline x^3y^2 + x^3y^2 \\ x^2y^2 + x^2y^2 \\ \hline x^2y^2 - x^2y^2 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} X+Y \\ -X^3-Y \\ \hline X^4+Y^4 \\ X^2+X^2Y \\ \hline Y^4-X^3Y \\ Y^4+Y^3X \\ \hline (-X^3Y-Y^3X) \\ (-X^3Y-Y^3X) \\ \hline Y^3X^2-Y^3X \\ (-Y^3X^2-Y^3X^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2y^2 + x^2y^2 - x^2y^2 \\ \hline x + y \\ \hline x^3 + y^3 - x^2y^2 \\ \hline \end{array}$$

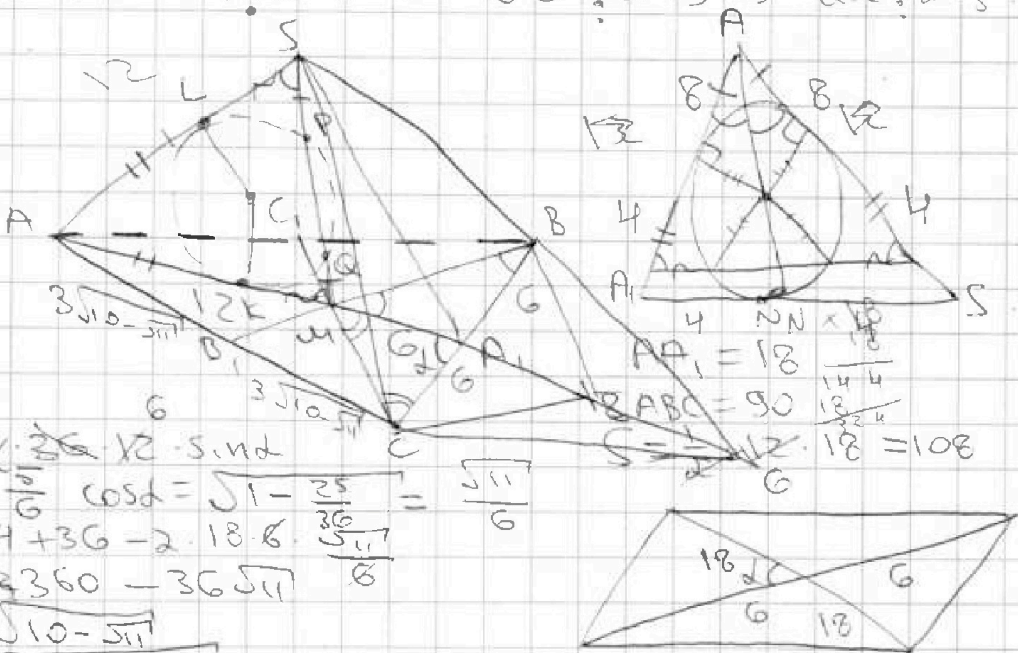
$$= \frac{\begin{vmatrix} x^5 & + & x^0 \\ x^5 & + & x^4 \\ x^5 & + & x^4 \\ x^5 & + & x^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^5 & + & x^4 \\ x^5 & + & x^4 \\ x^5 & + & x^4 \\ x^5 & + & x^4 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{array}{r} x+y \\ \hline x^4 + y^4 + \cancel{2x^3y} + \cancel{2xy^3} \\ \hline -y^3x \\ \hline \cancel{(-y^4x - y^3x^2)} \\ \hline y^3x^2 - x^4y \end{array}$$

$$\begin{aligned} & (\log_3(5y) + \log_3(x)) (\log_3^4(x) - \log_3^3 x \log_3 5y + \log_3^2 x \log_3^2 5y - \log_3 x \log_3^3 5y + \log_3^4 5y) \\ & (t+s)(t+s)(t+s) \\ & \log_3(5yx)(t+s) \quad \log_3 x \log_3 5y (\log_3^2 x - \log_3^2 5y + \log_3 x \log_3 5y) \\ & xy = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x - \log_3 243 = \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 - \log_{25y^2} (3'')$$

$$a \cdot b \cdot c = ? \quad a, b \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \quad b, c \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \quad a, c \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$



$180 = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 12 \cdot \sin d$
 $\sin d = \frac{5}{6} \quad \cos d = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$
 $AC^2 = 324 + 36 - 2 \cdot 18 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}$
 $AC^2 = 360 - 36\sqrt{11}$
 $AC = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$
 $AB = 6\sqrt{10 + \sqrt{11}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4) $5x + 2y - 30 = 0 \quad y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}0$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 3^2 \quad (x - 0)^2 + y^2 = 3^2$$

при $a = 0$

$$-2 < \frac{3}{2}B < 2$$

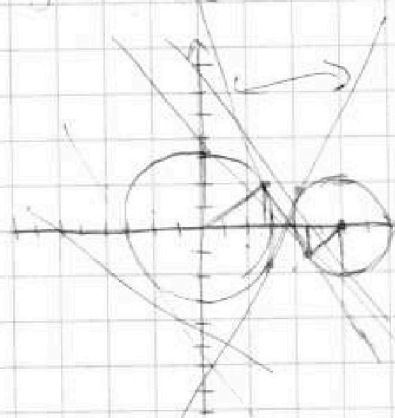
$$-4 \leq 3 \leq 4$$

$$-\frac{5}{6} < 8 < \frac{5}{2}$$

$$x^2 + y^2 - 9 = x^2 + y^2 - 12x + 32 = a(x+y)$$

$$12x = 41$$

$$x = \frac{5}{7}$$



$$5) \log_3 x + 6 \log_3 3 = \log_3 243 - 8$$

093: $x > 0$ $x \neq 1$ $y > 0$ $y \neq 1$

$$\log_3 x + \frac{6}{\log x} = \frac{50}{2 \log_5 x} - 8$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$5 + 8 + 9 - \frac{5}{2} = 0$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

$$2t^5 + 8t + 7 = 0$$

$$7 = -2\frac{1}{5} - 16t$$

$$\log_3(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{5y \times 3} 3 - 8$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(5y) + \frac{2}{\log_{\frac{1}{3}}(5y)} = \frac{11}{2\log_{\frac{1}{3}}(5y)} - 8$$

$$\log(5) = 1$$

$$s + \frac{2}{s+1} = \frac{1}{s} - 2$$

$$55 + 85 + 2 - \frac{1}{5} = 0$$

$$5 + 85 - 35 = 0$$

$$25 + 165 - 7 = 0$$

$$7 = 255 + 165$$

$$-2t^5 - 16t = 2s^5 + 16s$$

$$-2 \log_2 x - 16 \log_2 x = -2 \log_2(5y) + 16 \log_2(5y)$$

$$\log_2(5y) + \log_2 x + 3(\log_2 x + \log_2(5y)) = 0$$

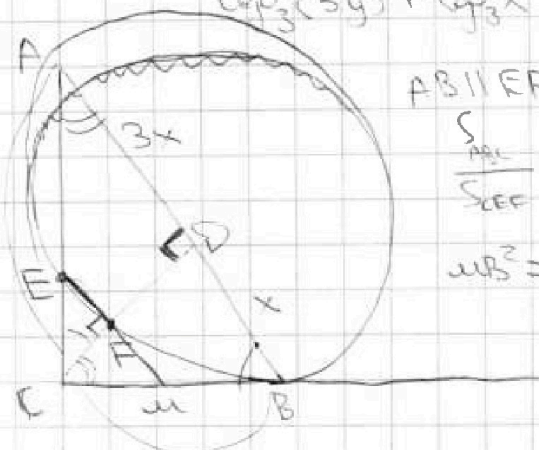
$$P_{\text{top}}(5 \times 4) = 0$$

$AB \parallel EF, \frac{AD}{DE} = \frac{3}{1} \quad CD = 3 \times 2 \quad CD = 6 \times$

$$\frac{S_{\text{ABC}}}{S_{\text{ABC}}} = \frac{S_{\text{ABC}}}{S_{\text{ABC}}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot x = 2\sqrt{3} \cdot x$$

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot 3 \times \sqrt{3} \times = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times$$

$$u_B^2 = E u \cdot F u$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3\sin \alpha \sin 3\alpha = \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + 2\sin \alpha - 2\sin^3 \alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$\sin(3\alpha + 2\alpha) = \sin 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 3\alpha = (3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha)(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha$$

$$3\sin \alpha - 6\sin^3 \alpha - 4\sin^3 \alpha + 8\sin^5 \alpha = 8\sin^5 \alpha - 10\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha$$

$$2\sin \alpha \cos^2 \alpha + 6\sin \alpha \cos^2 \alpha = 8\sin \alpha (\sin^4 \alpha - 2\sin^2 \alpha + 1) - 6\sin \alpha$$

$$2\cos^2 \alpha (4\sin \alpha \cos^2 \alpha - 6\sin \alpha) = (2 - 2\sin^2 \alpha)(4\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - 6\sin \alpha) =$$

$$= (2 - 2\sin^2 \alpha)(4\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha - 6\sin \alpha) = (2 - 2\sin^2 \alpha)(-4\sin^3 \alpha - 2\sin \alpha) =$$

$$= -8\sin^3 \alpha - 4\sin \alpha + 8\sin^5 \alpha + 4\sin^3 \alpha = 8\sin^5 \alpha - 4\sin^3 \alpha - 4\sin \alpha$$

$$8\sin^5 \alpha - 10\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha = 8\sin^5 \alpha - 4\sin^3 \alpha - 4\sin \alpha = 16\sin^5 \alpha - 14\sin^3 \alpha - \sin \alpha$$

$$\sin(5\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$16\sin^5 \alpha - 14\sin^3 \alpha - \sin \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \quad 16\cos^5 \alpha - 14\cos^3 \alpha - \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$16\cos^5 \alpha - 14\cos^3 \alpha - 2\cos \alpha = 0$$

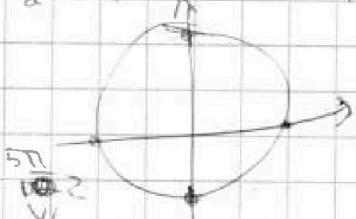
$$\cos \alpha (8\cos^4 \alpha + 7\cos^2 \alpha - 1) = 0$$

$$\cos \alpha (\cos \alpha - 1)(8\cos^3 \alpha + 8\cos^2 \alpha + \cos \alpha + 1) = 0$$

$$\cos \alpha (\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1)(8\cos^2 \alpha + 1) = 0$$

$$\cos \alpha = 0 \quad \cos \alpha = 1 \quad \cos \alpha = -1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \alpha = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \alpha = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



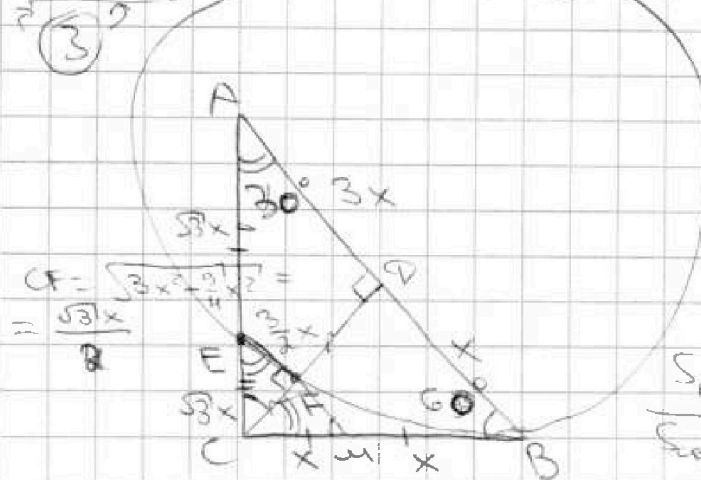
$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 3\pi$$

Ответ: $x = -3\pi, -2\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \dots$

3



$$CF = \sqrt{3x^2 + 3x^2} = \sqrt{18x^2} = 3\sqrt{2}x$$

$$AP = 3x \quad PB = x \quad CP = \sqrt{3}x$$

$$CB = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x$$

$$CA = \sqrt{3x^2 + 3x^2} = 2\sqrt{3}x$$

$$\sin \alpha = \frac{3x}{2\sqrt{3}x} = \frac{1}{2} = \frac{FM}{EM} = \frac{CF}{CE} = \frac{FM}{EM}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x^2 \quad BM^2 = FM \cdot EM$$

$$= 2\sqrt{3}x^2 \quad CM = BM$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} \cdot \frac{2x}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{8}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{\sqrt{3}x^2}{8}} = 16$$