



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение: $a, b, c \in \mathbb{N}$

Пусть a_2 - степень вхождения 2 в число $a, a \in \mathbb{N}_0$

a_3 - степень вхождения 3 в число $a, a \in \mathbb{N}_0$

a_5 - степень вхождения 5 в число $a, a \in \mathbb{N}_0$

($\in \mathbb{N}$ - принадлежит натуральным, 0)

$b_2, b_3, b_5, c_2, c_3, c_5$ - определены аналогично

$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \Rightarrow ab: 2^6 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 6$$

$$ab: 3^{13} \Rightarrow a_3 + b_3 \geq 13$$

$$ab: 5^{11} \Rightarrow a_5 + b_5 \geq 11$$

Аналогично $b_2 + c_2 \geq 14$

$$a_2 + c_2 \geq 16$$

$$b_3 + c_3 \geq 21$$

$$a_3 + c_3 \geq 25$$

$$b_5 + c_5 \geq 13$$

$$a_5 + c_5 \geq 28$$

$$\text{Тогда } 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 6 + 14 + 16 = 36$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$$

Аналогично: $a_3 + b_3 + c_3 \geq 24,5 \quad 29,5$

$$a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 25 \quad 30$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 26$$

$$\text{Тогда } \min(abc) = 2^{18} 3^{25} 5^{26}$$

$$\text{Но } \left. \begin{array}{l} a_5 + c_5 \geq 28 \\ b_5 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_5 + c_5 + b_5 \geq 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min(abc) = 2^{18} 3^{25} 5^{28}$$

Нам удовлетворяет число $a = 2^4 3^9 5^{12}$

$$b = 2^2 3^4$$

$$c = 2^{10} 3^{17} 5^{16}$$

Докажем, что $a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Предположим, что это не так $\Rightarrow$

$$a_2 + b_2 + c_2 \leq 17$$

$$a_2 \leq 17 - b_2 - c_2$$

$$b_2 + c_2 \geq 14$$

$$-b_2 - c_2 \leq -14$$

$$17 - b_2 - c_2 \leq 3 \Rightarrow a_2 \leq 3$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \leq 12$$

$$b_2 \leq 12 - a_2 - c_2$$

$$b_2 + c_2 \geq 16$$

$$-a_2 - c_2 \leq -16$$

$$12 - a_2 - c_2 \leq 1 \Rightarrow b_2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 4 \geq a_2 + b_2 \geq 6 \quad \text{Противоречие.}$$

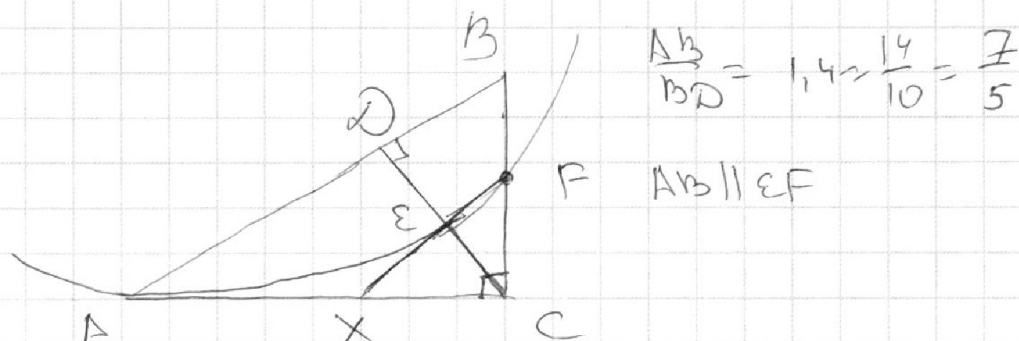
$$\text{Аналогично } a_3 + b_3 + c_3 \geq 25$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 28$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{18} 3^{25} 5^{28}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $EF \cap AC = X$ XA - кас., EF - секущая
По Δ $AX^2 = XE \cdot EF$

$XF \parallel AB \Rightarrow \Delta CEX \sim \Delta CDA$ (1)

$\Delta CEF \sim \Delta CDB$ (2)

$\Delta CXF \sim \Delta CAB$ (3)

(2): $\frac{CE}{CD} = \frac{XF}{CB} = \frac{EF}{BD}$

$\Rightarrow \frac{XF}{AB} = \frac{EF}{BD} \Rightarrow$

(3): $\frac{CX}{CA} = \frac{XF}{AB} = \frac{CF}{CB}$

$\Rightarrow \frac{XF}{EF} = \frac{AB}{BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow EF = \frac{5}{2} XF$

$AX^2 = \frac{5}{2} XF^2 \Rightarrow AX = \sqrt{\frac{5}{2}} XF$

2) $\frac{AD}{AB} = \frac{AB - DB}{AB} = 1 - \frac{DB}{AB} = 1 - \frac{5}{2} = \frac{2}{7} \Rightarrow AD = \frac{2}{7} AB$

$\Delta CAB \sim \Delta 90^\circ - CD \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB = \frac{2}{7} AB^2 \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{2}{7}} AB$

3) (3) $\frac{CX}{CA} = \frac{XF}{AB}$

$\frac{XF}{AB} = \frac{CA - AX}{CA} = 1 - \frac{AX}{CA} \Rightarrow 1 = \frac{XF}{AB} + \frac{AX}{CA}$

или. по синус. сзр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1 = \frac{XF}{AB} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} XF}{\sqrt{\frac{2}{2}} AB} = \frac{XF}{AB} + \frac{\sqrt{10}}{2} \frac{XF}{AB} \Rightarrow \frac{XF}{AB} = \frac{2}{2+\sqrt{10}}$$

$$4) AB \parallel EF, CD \perp AB \Rightarrow CD \perp EF \Rightarrow \angle CEF = 90^\circ$$

$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{AD \cdot DC}{EF \cdot CE} = \frac{AD \cdot BD}{EF^2} = \frac{\frac{5}{2} AB \cdot \frac{2}{2} AB}{\frac{25}{49} XF^2} =$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{AB}{XF} \right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{(2+\sqrt{10})^2}{2^2} = \frac{4+10+4\sqrt{10}}{10} = \frac{14+4\sqrt{10}}{10} = \frac{7+2\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{7+2\sqrt{10}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi - 2x}{10}\right) = 0$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{x - 2\pi}{5} = t \Rightarrow x = 5t + 2\pi$$

$$\sin(5t + 2\pi) - \sin t = 0$$

$$\sin 5t - \sin t = 0$$

$$\sin(3t + 2t) - \sin(3t - 2t) = 0$$

$$\sin 3t \cos 2t + \sin 2t \cos 3t - \sin 3t \cos 2t + \sin 2t \cos 3t = 0$$

$$2 \sin 2t \cos 3t = 0$$

$$\sin 2t = 0$$

$$2t = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x - 2\pi}{5} = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi n}{2} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 3t = 0$$

$$3t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x - 2\pi}{5} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{9\pi}{2} \geq \frac{5\pi n}{2} + 2\pi \geq -\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$9\pi \geq 5\pi n + 4\pi \geq -\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$5\pi \geq 5\pi n \geq -5\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 \geq n \geq -1, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = -1; 0; 1$$

$$n = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$n = 0 \Rightarrow x = 2\pi$$

$$n = 1 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{2}$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq 2\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \geq -\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$27\pi \geq 12\pi + 5\pi + 10\pi k \geq -3\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$10\pi \geq 10\pi k \geq -20\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 \geq k \geq -2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = -2; -1; 0; 1$$

$$k = -2 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 2\pi$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{6}$$

$$\text{Order: } x = -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ii) $a \neq 0$

$500 : a > 0$ (где $a < 0$ аналогично)

$$5x + 6ay - b = 0$$

$$6ay = -5x + b$$

$$y = \frac{-5x + b}{6a}$$

Заметим, что b не влияет на угол наклона
прямой, а только a .

Проведём общую внутреннюю касательную
к двум окружностям

Пусть она касается (2) в г. B, (3) в г. C
и Оу в точке A

$$\text{Центр}(2) - O \quad \text{Центр}(3) - OI$$

$$\triangle BOA \sim \triangle CIA \quad \left(\begin{array}{l} \angle OBA = \angle CIA = 90^\circ \\ \angle OAB = \angle IAC \text{ (верт.)} \end{array} \right)$$

$$\frac{OA}{AI} = \frac{BO}{CI} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{OA}{OI - OA} = \frac{5}{2}$$

$$OI = 9 \Rightarrow 2OA = 45 - 5OA$$

$$2OA = 45 \Rightarrow AO = \frac{45}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(0; -\frac{45}{7})$$

$$y_{кас} = kx + c$$

$$k < 0$$

$$A \in y_{кас} \Rightarrow$$

$$c = -\frac{45}{7}$$

$$y_{кас} = kx - \frac{45}{7}$$

$$(2): x^2 + (kx - \frac{45}{7})^2 = 25$$

$$x^2 + k^2x^2 - \frac{90}{7}kx + \frac{45^2}{7^2} = 25$$

$$(1+k^2)x^2 - \frac{90}{7}kx + \frac{45^2 - 35^2}{7^2} = 0$$

см. то след. сзр



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

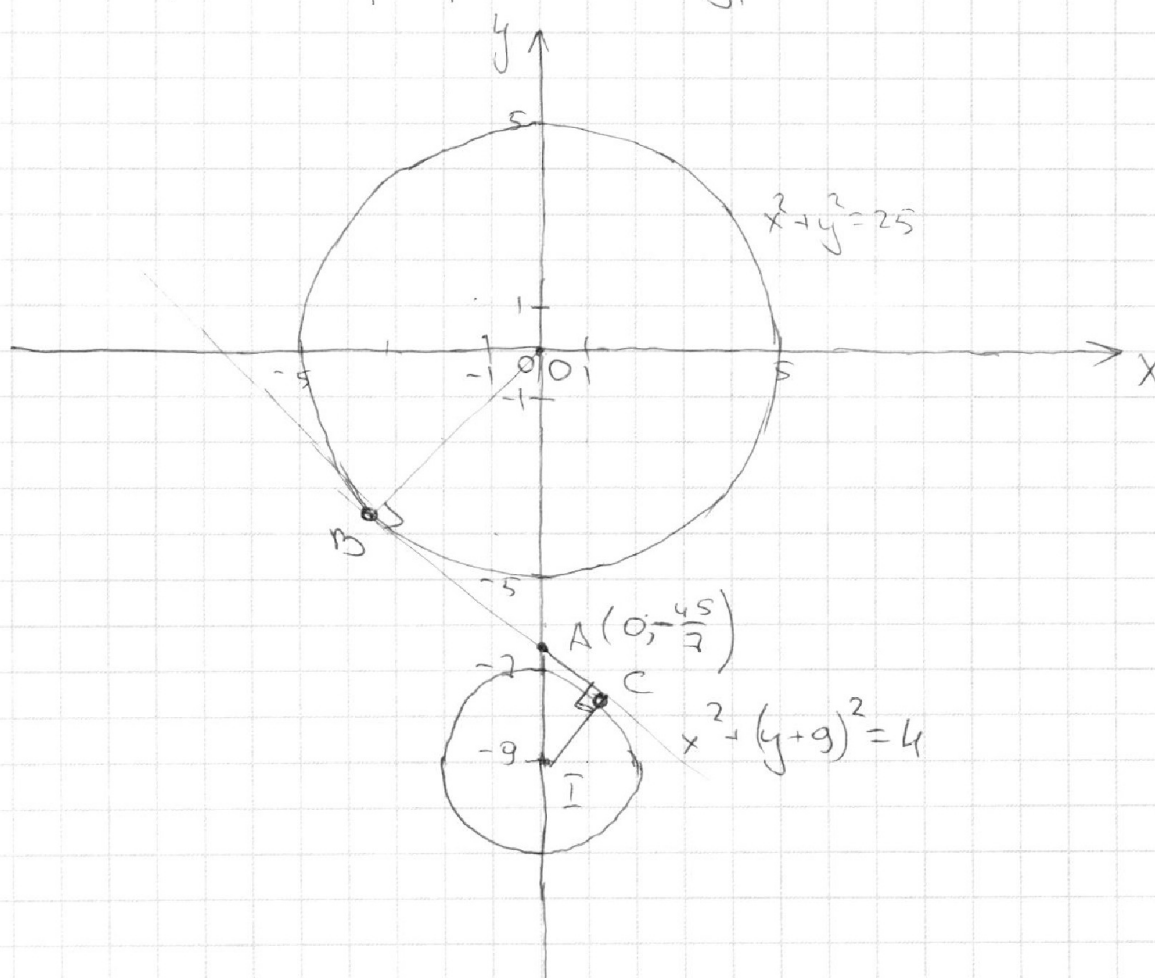
☐☐☐☒☐☐☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25 & (2) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

Построим графики этих уравнений



I) $a=0$ (1) $5x - b = 0$
При $b=0$ $x=0$ пересекает окружности
в 4 точках $\Rightarrow$ 4 решения

см. на след. сгр

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



касательная $\Rightarrow$ одно решение должно иметь
уравнение $\Rightarrow D=0 \Rightarrow D_1=0$

$$D_1 = \frac{45^2}{7^2} k^2 - \frac{45^2 - 35^2}{7^2} (1 + k^2) = 0$$

$$45^2 k^2 - (45^2 - 35^2)(1 + k^2) = 0$$

$$9^2 k^2 - (9^2 - 7^2)(1 + k^2) = 0$$

$$81 k^2 - 32(1 + k^2) = 0$$

$$81 k^2 - 32 k^2 = 32$$

$$49 k^2 = 32$$

$$k^2 = \frac{32}{49} \Rightarrow k = -\frac{4\sqrt{2}}{7} \quad (\text{т.к. } k < 0)$$

При $k = -\frac{4\sqrt{2}}{7} \quad c \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow$
прямая будет пересекать всего график (2) и (3)
не более чем два раза

При $k \in (-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7}) \quad c \in (-\infty; +\infty)$ прямая
будет пересекать график (2) и (3) в разных
различных точках

При $k \in (-\frac{4\sqrt{2}}{7}; 0) \quad c \in (-\infty; +\infty)$ прямая
будет пересекать график (2) и (3) не более, чем
в двух точках.

$$k \in (-\frac{4\sqrt{2}}{7}; 0) \quad (-\infty; -\frac{4\sqrt{2}}{7})$$

$$k < -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35} \Rightarrow 0 < a < \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

$$a \in (-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}) \Leftrightarrow a \in (-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48})$$

(аналогично где $a < 0$)

$$\text{Ответ: } a \in (-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5

1) Пусть $\log_{11} x = a$
 $\log_{11} (0,5y) = b$

$$a+b = \log_{11} x + \log_{11} (0,5y) = \log_{11} (0,5xy) \Rightarrow$$

$$0,5xy = 11^{a+b} \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^{a+b}$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} x^3 \cdot \frac{1}{12} = -5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} + \frac{2}{3 \log_{11} x} = -5$$

$$a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} = -5$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} = -5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{11} (0,5y) = \log_{11} (0,125y^3) = -5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} + \frac{13}{3 \log_{11} (0,5y)} = -5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} = -5$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} = -5$$

2) $a^4 - \frac{16}{3a} = -5$ $\frac{3a^5 + 15a - 16}{3a} = 0$

$$f(a) = \frac{3a^5 + 15a - 16}{3a}$$

$$f'(a) = \frac{1}{3} \left(\frac{(15a^4 + 15) \cdot a - (3a^5 + 15a - 16)}{a^2} \right) =$$

$$= \frac{15a^5 + 15a - 3a^5 - 15a + 16}{3a^2} = \frac{12a^5 + 16}{3a^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$f'(a) = 0 \quad a = -\sqrt[5]{\frac{4}{3}}$$

$f'(a)$

$$\begin{aligned} \text{При } a < 0 \quad a^4 > 0 \quad \left\{ \begin{aligned} a^4 - \frac{16}{3a} > 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 > 0 \end{aligned} \right. \\ -\frac{16}{3a} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{При } a > 0 \quad f'(a) > 0 \Rightarrow f(a) \text{ не более одного корня}$$

$$f(0,1) < 0 \quad f(1) > 0 \Rightarrow \text{корень есть}$$

$$g(b) = b^4 + \frac{16}{3b} + 5 \quad b = -a$$

$$g(-a) = a^4 - \frac{16}{3a} + 5 \quad \text{т.е. те рассуждения}$$

$$\text{Если } x_1 - \text{корень } f(a), \text{ то } -x_1 \text{ корень } g(b)$$

$$\text{Действительно } f(x_1) = x_1^4 - \frac{16}{3x_1} + 5 = 0$$

$$g(-x_1) = x_1^4 - \frac{16}{3x_1} + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b = x_1 - x_1 = 0 \Rightarrow$$

$$xy = 2 \cdot 11^0 = 2$$

$$\text{Ответ: } xy = 2$$

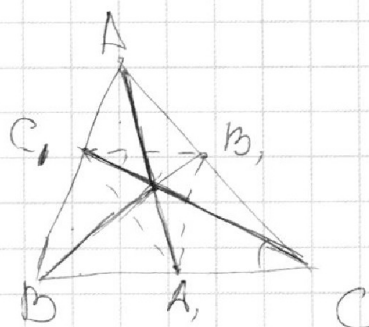
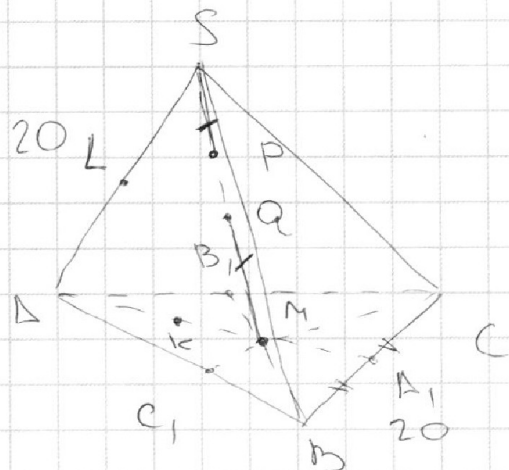
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



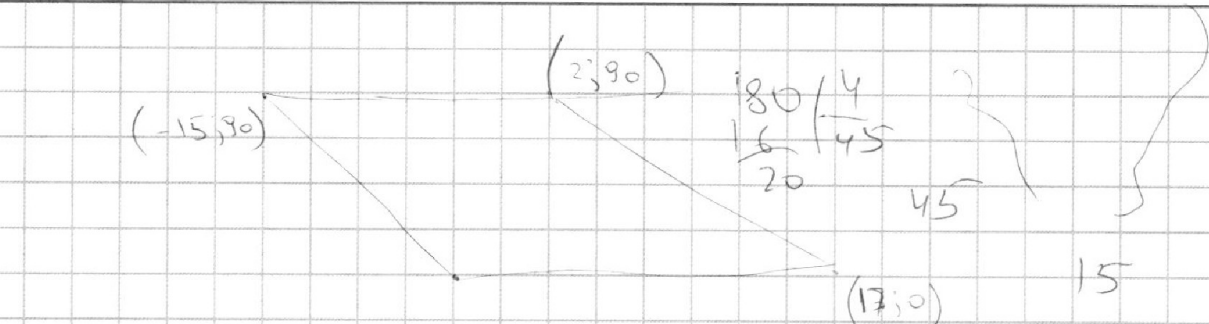
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{3b^5 + 15b + 16}{3b}$$

$$a + b + c \leq 17$$

$$a^5 = \frac{16}{12}$$

$$17 - b + c \leq 16$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 =$$

$$a \leq 12 - (b - c)$$

$$f(1) = 0,1$$

$$f(-2) > 0 \quad 0,1$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot \frac{9}{2 \sin \alpha}$$

$$a \leq 1$$

$$BC \cdot CC_1 \cdot \sin \alpha = 90^\circ \quad 4 - \frac{6}{1} + \frac{2}{3} + 15 = 0 \quad 5\sqrt{4}$$

$$CC_1 \sin \alpha = \frac{9}{2}$$

$$\frac{15 - 16}{3b}$$

$$\frac{16}{0,3}$$

$$(15b^4 + 15)b - 3b^2 - 15b - 16$$

$$15b^5 + 15b - 3b^5 - 15b - 16$$

$$12b^5 = 16$$

$$b = \frac{16}{12 \cdot 5\sqrt{4}}$$

$$\frac{15 - 16}{3b}$$

$$5 + 5 - \frac{15 - 16}{3b}$$

$$4 + 5 - 16$$

$$15 = 16$$

$$15 = 4$$

$$\frac{-4}{5\sqrt{4}}$$

$$12 + 15 \cdot 5\sqrt{4} - 16$$

$$15 \cdot 5\sqrt{4} - 12$$

$$\frac{4 - 16}{3 \cdot 5\sqrt{4}} = \frac{-12}{3}$$

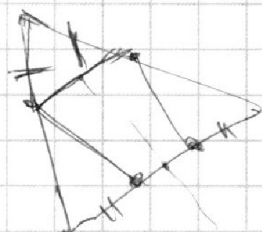
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &: 2^6 3^{13} 5^{11} \\ bc &: 2^{14} 3^{21} 5^{13} \\ ac &: 2^{16} 3^{25} 5^{28} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 6 \\ b+c &= 14 \\ a+c &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= -b \\ 2(a+b+c) &= 36 \\ a+b+c &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 12 \\ b &= 2 \\ c &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &\leq 3 \\ b_2 &\leq 1 \\ (5b^4 + 15) \cdot 3b - 3(b^5 + 15b + 16) &= 0 \end{aligned}$$

$$9b^2$$

$$\begin{aligned} a+b+c &= \min \\ a+b+c &\geq 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4b^5 - 2b(b^5 + 1) &= 0 \\ 4b^5 - 2b^6 + 2b &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a+b &\geq 6 \\ b+c &\geq 14 \\ a+c &\geq 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15b^5 + 45b - 3b^5 - 45b - 48 &= 0 \\ 12b^5 &= 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25b^5 + 15b + 16 \\ x^2 - y^2 &= 2b^5 + 8b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_4 x - 6 \log_4 11 &= \frac{1}{3} \log_4 11^2 - 5 \\ \log_4 x - 6 \log_4 11 + \frac{2}{3} \log_4 11 + 5 &= 0 \\ \log_4 x - \log_4 11 + \frac{2}{3} \log_4 11 + 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\log_4 x - \frac{16}{3 \log_4 11} - 5 = 0$$

$$3b^5 - 16 + 15b = 0$$

$$\begin{aligned} 3b^5 + 15b - 16 &= 0 \\ &\leq 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b+c &\geq 30 \\ y &= -15x + 17 \end{aligned}$$

$$D = \left(\frac{45}{2k}\right)^2 - \frac{45^2 - 35^2}{2^2} (1+k^2) = 0$$

$$\begin{aligned} b &\leq 4 \\ a &\geq 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad 9 \quad 16 \\ y &= -15x \end{aligned}$$

$$45^2 - (45^2 - 35^2)(1+k^2) = 0$$

$$\begin{aligned} y &= -15x \\ y &= -15(x-17) \\ x &= 0 \\ x &= 90 \end{aligned}$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$45k^2 - 45^2 + 35^2 - 45k^2 + 35k^2$$

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle CEF}$$

$$b = 5\sqrt{4}$$

$$35k^2 + 35^2 = 45^2$$

$$\frac{45^2}{2^2} - 5^2 = \frac{12b^5 - 48}{9b^2}$$

$$49k^2 + 49 = 81$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{32}{49} \\ &\sim 25 \quad k = -\frac{4}{2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 49k^2 &= 81 - 49 \\ k^2 &= \frac{81 - 49}{49} \\ x^2 + k^2 x^2 - \frac{90}{7} kx + \frac{45^2}{2^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{4}{3} \left(\frac{b^5 - 4}{b^2} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{10\pi}{3}$
 $\frac{10\pi}{3}$
 $\frac{24}{28}$
 $\frac{28}{52}$
 $\frac{9\pi-4\pi+5\pi}{15\pi+5\pi}$

$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi-2x}{10}$
 $\sin x = \cos\left(\frac{9\pi-2x}{10}\right)$
 $\sin x - \cos\left(\frac{9\pi-2x}{10}\right) = 0$
 $0 \leq \frac{9\pi-2x}{10} \leq \pi$
 $0 \leq 9\pi-2x \leq 10\pi$
 $-9\pi \leq -2x \leq \pi$
 $\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$

$\frac{x-2\pi}{5} = t$
 $x = 2\pi = 5t$
 $x = 5t + 2\pi$
 $x = 2\pi + \frac{5\pi}{2}$
 $x = 2\pi + \frac{5\pi}{2}$
 $x = 2\pi - \frac{5\pi}{2}$
 $x = 2\pi - \frac{5\pi}{2}$

$360 - \alpha - \beta$
 $-\alpha - \beta$
 20

$\frac{9\pi-4\pi-5\pi}{3}$
 $\frac{5\pi-5\pi}{3}$
 $\frac{15\pi-5\pi}{5}$
 $\frac{10\pi}{3}$
 $\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$
 C, M, M'

$\cos\left(\frac{9\pi-2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi-2x}{10}\right) =$
 $\sin\left(\frac{5\pi-9\pi+2x}{10}\right) = \left(\frac{2x-4\pi}{10}\right) = \left(\frac{x-2\pi}{5}\right)$
 $\sin x - \sin\left(\frac{x-2\pi}{5}\right)$
 $\sin 5t - \sin t = 0$
 $\sin(3t+2t) - \sin(3t-2t) = 0$
 $\sin 3t \cos 2t + \sin 2t \cos 3t - \sin 3t \cos 2t + \cos 3t \sin 2t$
 $2 \sin 2t \cos 3t = 0$
 $\sin 2t \cos 3t = 0$
 $\sin 2t = 0$
 $2t = \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $t = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
 $\frac{x-2\pi}{5} = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
 $x - 2\pi = \frac{5\pi n}{2}$
 $x = \frac{5\pi n}{2} + 2\pi$
 $x = -\frac{\pi}{2}$
 $x = 2\pi$
 $x = \frac{9\pi}{2}$

$3t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$
 $\cos 3t = 0$
 $\frac{x-2\pi}{5} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$
 $x - 2\pi = \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$
 $x = 2\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}$
 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$
 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)$
 $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi n}{2} + 2\pi \leq \frac{9\pi}{2}$
 $-\pi \leq 5\pi n + 4\pi \leq 9\pi$
 $-\frac{5\pi}{4} \leq 5\pi n \leq \frac{5\pi}{4}$
 $-1 \leq n \leq 1$
 $\frac{9\pi}{2} \geq 2\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \geq -\frac{\pi}{2}$
 $27\pi \geq 12\pi + 5\pi + 10\pi k \geq -3\pi$
 $10\pi \geq 10\pi k \geq -20\pi$
 $1 \geq k \geq -2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \cdot 11^{-2} - 5$$

$$\log_4 x - 6 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$t^4 - \frac{6}{t} + \frac{2}{3t} + 5 = 0 \quad | \times 3t$$

$$3t^5 - 18 + 2 + 15t = 0$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$\log_4 x + \log_{11} 0.5y = t+2$$

$$\log_4 0.5xy = t+2$$

$$0.5xy = 11^{t+2}$$

$$xy = \frac{11^{t+2}}{0.5} = 2 \cdot 11^{t+2}$$

$$\log_{11} (0.5y) - \log_{0.5y} 11 = -\frac{13}{3} \log_{0.5y} 11 - 5$$

$$y^4 z^4 + \frac{1}{2} + \frac{13}{3z} = t^4 - \frac{6}{t} + \frac{2}{3t}$$

$$z^4 + \frac{16}{3z} = t^4 - \frac{16}{3t}$$

$$z^4 - t^4 + \frac{16}{3} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{t} \right) = 0$$

$$z+t=0$$

$$xy=2$$

$$z^4 - t^4 + \frac{16}{3} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{t} \right) = 0$$

$$(z^2+t^2)(z-t) + \frac{16}{3} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{t} \right) = 0$$

$$z=t$$

$$(z+t) \left((z^2+t^2)(z-t) + \frac{16}{3zt} \right) = 0$$

$$3zt(z^2+t^2)(z-t) + 16 = 0$$

$$zt(z-t) < 0$$

$$3ab(a^2+2b)+16=0$$

$$z-t=a$$

$$3a^3b+6b^2a+16=0$$

$$zt=b$$

$$6b^2a+3a^3b+16=0$$

$$a^2 = z^2 - 2zt + t^2$$

$$D = 9a^2 - 6 \cdot 16 \cdot 4a$$

$$a^2 + 2b = (z^2 + t^2)$$

$$5b = 5 \cdot \frac{16}{9}$$

$$a = \sqrt[5]{-\frac{16}{9}}$$

$$b = \frac{16}{9}$$

$$a^2 + 4b = (z+t)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 &= 4 \\ x^2 + (y+9)^2 &= 4 \end{aligned}$$



$$a=0$$

$$5x - b = 0$$

$$5x = b$$

$$b \neq 0$$

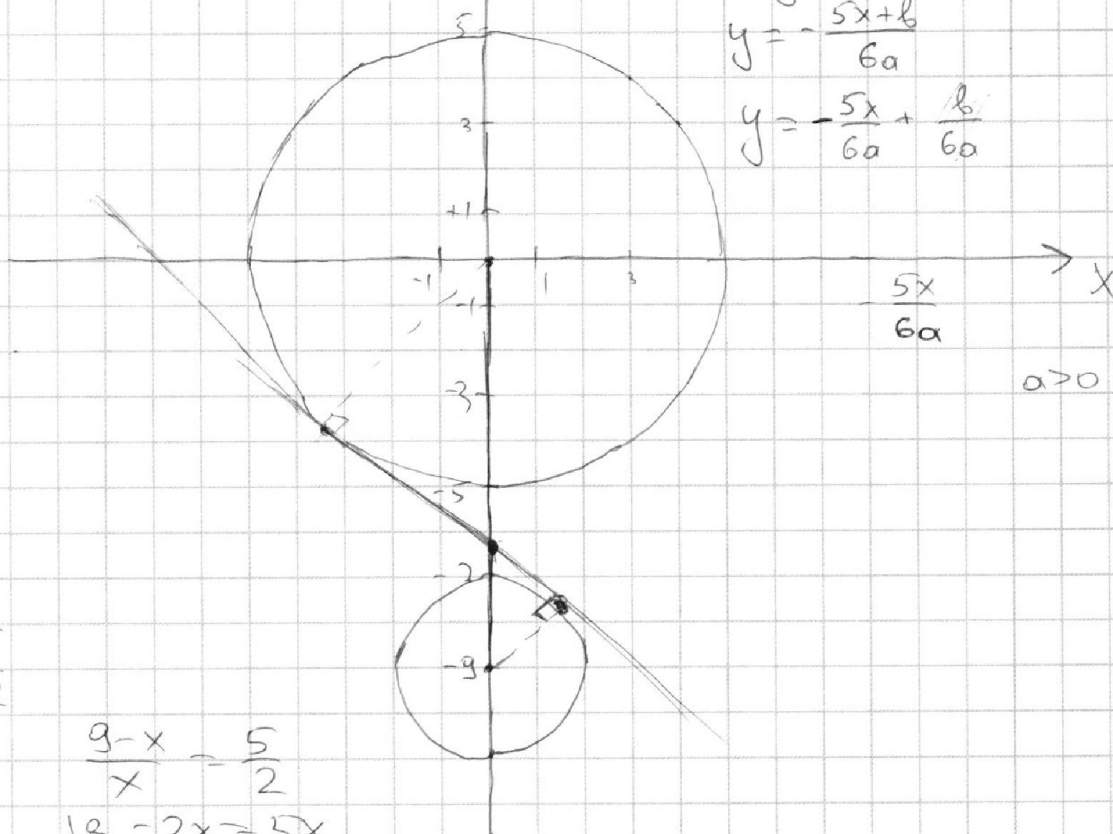
$$x = \frac{b}{5}$$

$$a \neq 0$$

$$6ay = -5x + b$$

$$y = -\frac{5x+b}{6a}$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$$



$$\frac{5}{2}$$

$$\frac{9-x}{x} = \frac{5}{2}$$

$$18 - 2x = 5x$$

$$x = \frac{18}{7}$$

$$y = -\frac{18}{7}$$

$$\frac{x}{9-x} = \frac{5}{2}$$

$$2x = 45 - 5x$$

$$7x = 45$$

$$x = \frac{45}{7} = 6\frac{3}{7}$$

$$\left(\frac{45}{7}\right)^2 -$$

$$\begin{aligned} y &= kx + b \\ y &= kx - \frac{45}{7} \end{aligned}$$