



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 1. \quad a &= 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12} \\
 b &= 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{17} \\
 c &= 2^{15} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}
 \end{aligned}
 \Rightarrow \frac{a \cdot b \cdot c}{(abc)^2} = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

где  $k, m, n \in \mathbb{N}$ .

$$a \cdot b \cdot c = (abc)^2 = k \cdot m \cdot n \cdot 2^{39} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

Таким образом, найдем, чтобы в составе всех чисел  $k, m, n$  присутствовали все простые, т.е. квадрат.

$$a \cdot b \cdot c = (abc)^2 = k \cdot m \cdot n \cdot 2^{39} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

Требуется найти минимальное значение

$$a \cdot b \cdot c = 2^{39} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

$$b \cdot c = \frac{(abc)^2}{a} = 2^{39+20} \cdot 3^{55+20} \cdot 5^{68+20}$$

где  $x, y, z \in \mathbb{Z}, x, y, z \geq 0$

$$\Rightarrow abc = 2^{12+20} \cdot 3^{28+20} \cdot 5^{39+20}$$

$$\text{минимум } a = \frac{abc}{b}, b = \frac{abc}{a}, c = \frac{abc}{a \cdot b}, \text{ т.е.}$$

где  $a, b, c$  имеют делители на каждом из простых  $2, 3, 5$ .

$$\begin{cases} 12+x \geq \max(8, 12, 15) \Rightarrow x=0 \\ 28+y \geq \max(15, 20, 21) \Rightarrow y=0 \\ 39+z \geq \max(12, 17, 31) \Rightarrow z=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{12} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \quad \text{Требуется найти } a, b, c:$$

$$a = 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12}, b = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{17}, c = 2^{15} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{12} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

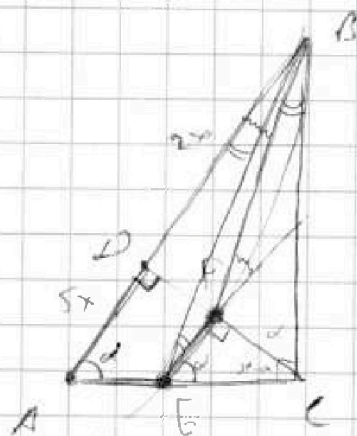
|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2.



$$\frac{AD}{AB} = \frac{5}{1}$$

$$\frac{FC}{BC} = \frac{AE}{AB}$$

Так  $AB \parallel EF \Rightarrow \angle ABE = \angle BEF$   
(как внутренние).

Так как  $BL$  — касательная к окружности, то  $\angle FBL = \frac{1}{2} \angle FCB$  (теорема о касательной).  
то  $\angle BEF = \frac{1}{2} \angle FCB$  (она вписанная угол, опирающийся на  $FB$ )

$\Rightarrow \angle BEF = \angle FBL$ . Но  $\angle BEF = \angle ABE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FBL = \angle ABE$ . Так как  $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle FEC = \alpha$   
(из 11). 5)  $\angle ECF = 90^\circ \Rightarrow \angle FCB = \alpha$ .

$\triangle AEB \sim \triangle BFC$  ( $\angle ABE = \angle FBL$ ,  $\angle BAE = \angle FCB = \alpha$ )

$$\Rightarrow \frac{FC}{BC} = \frac{AE}{AB} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{FC}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow FC = \frac{AE}{AB} \cdot BC. \text{ Так как } AD = 50,$$

$$BC = 20 \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = 10\sqrt{10}. \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$\Rightarrow AC = 10\sqrt{35} \text{ см. Так как } \triangle ADC \sim \triangle BFC \text{ и } BC =$$

$$10\sqrt{35} \text{ (по теореме Пифагора). Из (1): } \frac{FC}{10\sqrt{35}} = \frac{AE}{10\sqrt{35}} \Rightarrow AE = \frac{2}{\sqrt{5}} FC$$

$$\text{Из того, что } \triangle ADC \sim \triangle BFC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{50}{10\sqrt{35}} = \frac{BF}{10\sqrt{35}} \Rightarrow BF = 50$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} FC = \frac{50}{10\sqrt{35}} \Rightarrow FC = \frac{50 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{35}} = \frac{50 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7}} = \frac{50}{2\sqrt{7}} = \frac{25}{\sqrt{7}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{EC}{FC} = \frac{AC}{CD} = \frac{x\sqrt{5}}{b\sqrt{10}} \Rightarrow EC = \sqrt{\frac{2}{5}} FC$$

$$\Rightarrow AE = AC - EC = AC - \sqrt{\frac{2}{5}} FC$$

$$\frac{EC}{FC} = \frac{AC}{CD} = \frac{x\sqrt{5}}{b\sqrt{10}} \Rightarrow EC = \sqrt{\frac{2}{5}} FC$$

$$AE = AC - EC = AC - \sqrt{\frac{2}{5}} FC, \text{ так } AC = \frac{2}{\sqrt{5}} FC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - \sqrt{\frac{2}{5}} FC = \sqrt{\frac{2}{5}} FC \Rightarrow FC = \frac{AC}{\sqrt{5}} = \frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = x\sqrt{5}$$

Тогда  $\triangle GFC \sim \triangle ABC$  (по трем сторонам)  $\Rightarrow$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{GFC}} = \left(\frac{BC}{FC}\right)^2 = \left(\frac{x\sqrt{5}}{x\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{15}{5} = \boxed{\frac{28}{5}}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \quad 10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\text{Так как } \arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ то}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \pi - 2x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \geq 2x - \pi \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{2} \geq 2x \geq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \geq 2x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$\text{Таким образом, } \arcsin(\cos x) = \arcsin(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \text{ где } \arcsin(\sin x) = x \text{ для } x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \Rightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$$

$$= \frac{\pi}{2} - x \text{ (где } x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]) = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$\text{Заметим: } 10 \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$4\pi = 8x$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Отв: } \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

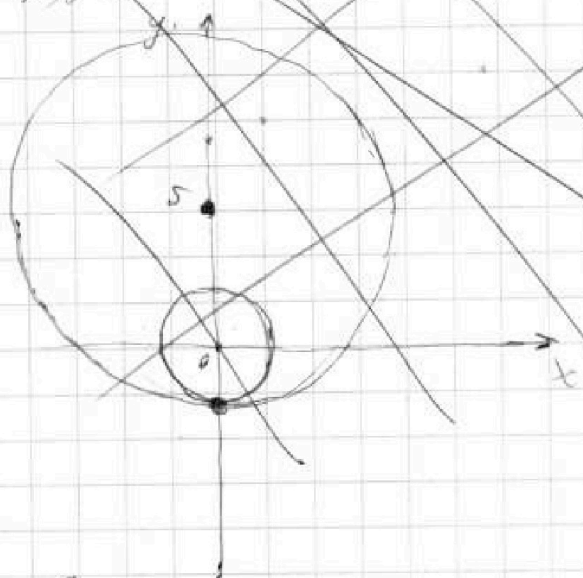


$$4. \begin{cases} ax - 3y + 5z = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 10y + 65) = 0 \end{cases}$$

Исходное уравнение равносильно:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 10y + 65 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 5)^2 - 100 + 65 = 0 \\ x^2 + (y - 5)^2 = 35 = 5^2 \end{cases}$$

В системе координат  $xy$  найти совокупность точек  
для окружностей  $\omega$  с центром в точке  $(0, 0)$ ,  $(0, 5)$   
с радиусами 1 и 5 соответственно:



Решим, что окружности  
касание имеют в точке  $(0, 1)$ ,  
и в  $(0, 6)$  расстояние между  
их центрами (5) равно сумме  
радиусов  $1 + 4 = 5$   
для радиуса внешнего (6)

В системе координат  $xy$  найти совокупность

точек для окружностей  $\omega$  с центрами  $(0, 0)$ ,  $(0, 10)$ ,  
радиусами 1 и 6 соответственно:

Уравнение  $ax - 3y + 5z = 0$  имеет вид  
 $y = \frac{a}{3}x + \frac{5}{3}z$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу.**

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

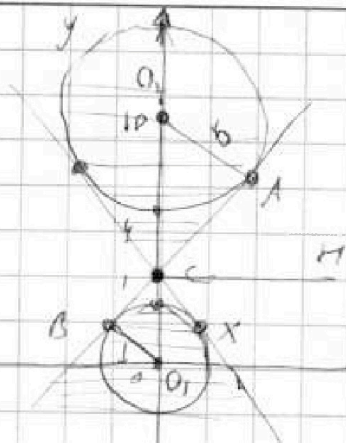


**МФТИ**

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

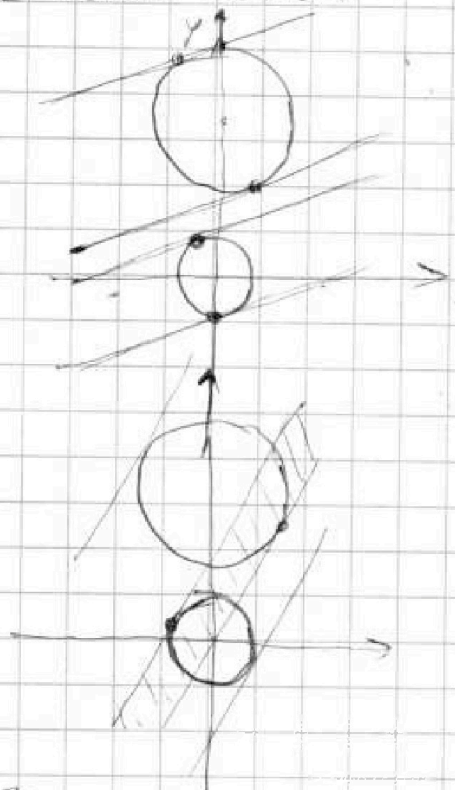
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



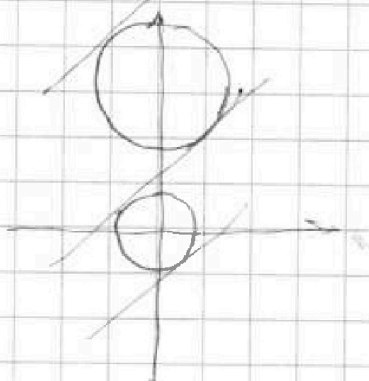
Третье общее внутреннее  
качество и свойство:

Доказано, что для  $g \in G$   
функция  $\chi$  имеет вид  $\chi(g) = \chi(g^{-1})$ ,  
т.е.  $\chi$  — классическая функция.  
—  $\chi$  — классическая функция в  $G$ -  
классе, то  $\chi(g) = \chi(g^{-1})$ ,  
т.е.  $\chi$  — классическая функция.  
—  $\chi$  — классическая функция.

Коллекции, с ~~каждой~~ каждой из них связан определенный программный материал, т.е. были "партнеры" программы из - в Р и О, об этом не стоит забывать:



Мет. Вудри, то же, много времени  
и много, а, что 1 что  
2 измерения при ~~различных~~ различных  
переходе между Вера  
3 и 4 эти измерения являются  
тоже при измерении Калана и  
физическим измерением при Калана.



Успехи науки представляют собой только робкие  
обозначения на пути к открытию, но уже имеют ~~большое~~  
значение для всего человечества Робинсон между двумя группами капиталистов



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найти этот коэффициент. Из рисунка.

$$\frac{O_1C}{CO_2} = \frac{BO_1}{O_1A} = \frac{1}{5} \Rightarrow O_1C = \frac{1}{5} CO_2$$

$$\text{Из } O_1C + CO_2 = AO_2 = 10 \Rightarrow \frac{1}{5} CO_2 + CO_2 = 10 \Rightarrow CO_2 = \frac{5}{2} \cdot 10$$

$$CO_1 = \frac{1}{2} \cdot 10$$

Также  $\angle O_1O_2$ .  $\lg \angle ACH = \lg \angle O_2CA =$

$$= \frac{CO_1}{O_2A}. \text{ Из т. Пифагора } CA = \sqrt{CO_2^2 + O_2A^2} = 6 \cdot \sqrt{\frac{100}{5} - 1}$$

$$= 6 \cdot \sqrt{\frac{51}{5}} = \frac{6}{2} \sqrt{51} \Rightarrow \lg \angle ACH = \frac{\sqrt{51}}{2}$$

$$\lg \angle HCK = \lg \angle XCO_1 = \lg \angle O_1CB = \frac{BO_1}{CO_1}$$

$$\text{Из } BC = \sqrt{\frac{100}{5} - 1} = \sqrt{\frac{51}{5}} = \frac{\sqrt{51}}{2} \Rightarrow \lg \angle HCK = \frac{\sqrt{51}}{2}$$

Таким образом получим предел для  $\frac{a}{2}$ , т.е.

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{a}{2} < -\lg \angle HCK \\ \frac{a}{2} > \lg \angle HCK \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{a}{2} < -\frac{\sqrt{51}}{2} \\ \frac{a}{2} > \frac{\sqrt{51}}{2} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{3}{2}\sqrt{51}) \cup (\frac{3}{2}\sqrt{51}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5.  $\begin{cases} \lg_5^9(2x) - 3 \lg_{2x} 5 = \lg_{2x} 625 - 3. \\ \text{Требуется} \end{cases}$

~~$\lg_5^9(2x) - 3 \lg_{2x} 5$~~

$\lg_5^4 y + 4 \lg_y 5 = \lg_{y^2} 32 - 3$

$a \Rightarrow 3: x > 0, x \neq \frac{1}{2}; y > 0; y \neq 1.$

Требуется решить:

$\lg_5^9(2x) - 3 \lg_{2x} 5 = \frac{\lg_{2x} 625}{\lg_{2x} 2x^2} - 3$

$\lg_5^9(2x) - 3 \lg_{2x} 5 = \frac{1}{2} \lg_{2x} 5^4 - 3$

$\lg_5^9(2x) - \frac{3}{\lg_5 2x} = \frac{4}{3} \frac{1}{\lg_5 2x} - 3$

①  $\lg_5^9(2x) - \frac{1}{\lg_5 2x} \cdot \frac{13}{3} + 3 = 0$

Требуется решить:

$\lg_5^9 y + \frac{4}{\lg_5 y} + \frac{1}{3} \frac{1}{\lg_5 y} + 3 = 0$

②  $\lg_5^9 y + \frac{13}{3} \frac{1}{\lg_5 y} + 3 = 0$

Возьмем из ① ②:

$(\lg_5^9(2x) - \lg_5^9 y) / (\lg_5^9(2x) + \lg_5^9 y) = \frac{13}{3} \left( \frac{1}{\lg_5 2x} + \frac{1}{\lg_5 y} \right) = 0$

$(\lg_5 2x + \lg_5 y) / (\lg_5 2x - \lg_5 y) / (\lg_5^2 2x + \lg_5^2 y) = \frac{13}{3} \frac{2 \lg_5 2x \lg_5 y}{\lg_5^2 2x + \lg_5^2 y} = 0$

Значит  $a = \lg_5 2x, b = \lg_5 y$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \end{cases} \quad a+b=2$$

Используем метод Виета:

$$(a^2 - b^2) / (a^2 + b^2) = \frac{13}{3} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = a$$

$$(3)(a+b) / (b-a) (a^2 + b^2) = \frac{13}{3ab} \Rightarrow 0$$

Допускаем предположение, что  $a, b$  — корни уравнения:

$$x^5 + 3x - \frac{13}{3} = 0$$

$$\begin{cases} a^5 + 3a - \frac{13}{3} = 0 \\ b^5 + 3b + \frac{13}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Сложим: } 3a^5 + 3b^5 + 9(a+b) = 0$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a+b) = 0$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \quad | \quad a+b \\ a^5 + b^5 \quad | \quad a^5 + b^5 - a^3b + a^2b^2 - a^2b^3 \\ \hline b^5 - a^3b \\ -b^5 + a^3b \\ \hline -a^3b - a^2b^2 \\ -a^3b - a^2b^2 \\ \hline a^3b^2 - a^2b^3 \\ a^3b^2 + a^2b^3 \\ \hline -a^2b^3 - a^2b^3 \\ -a^2b^3 - a^2b^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(4) (a+b) / (3(a^5 - a^3b + a^2b^2 - a^2b^3 + b^5) + 9) = a$$

Используем (3):



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\lg_5(2xy) (\lg_5(2x) + \lg_5(2y) + \lg_5^2 2 + \lg_5^2 y) - \frac{13}{3(\lg_5 2 \lg_5 y)} = 0$$

$$\text{Пусть } a = \lg_5 2x, \quad b = \lg_5 y$$

$$\lg_5(2xy) (a+b)(a^2+b^2) - \frac{13}{3ab} = 0$$

$$(5) (a+b)(3ab)(a^2+a^2b+ab^2+b^2) + 13 = 0$$

Возьмем из (5):

$$(a+b)(3a(a^2-ab+ab^2+b^2) + 3b^3 + 9 - 3ab(a^2-a^2b+ab^2+b^2) - 13) = 0$$

$$\text{Приведем уравнение } 3x^5 + 9x - 13 = 0$$

$$\text{Возьмем производную } 15x^4 + 9 \neq 0 \text{ при любых } x$$

Р-чис.  $3x^5 + 9x$  возрастает.  $\Rightarrow$  уравнение имеет

ровно 1 корень. Аналогично для уравнения  $3x^5 + 9x + 13 = 0$

Следовательно, уравнение:

$$\begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ровно 1 решение!}$$

Из предыдущих рассуждений следует, что

единственное решение (одно)  $a=b=0$  и  $a=-b$  (можно проверить и убедиться).

$$\text{Тогда } a = \lg_5 2x \text{ и } b = \lg_5 y, \text{ то}$$

$$a+b = \lg_5 2x \cdot y = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = 0,5$$

$$\text{Ответ: } 0,5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

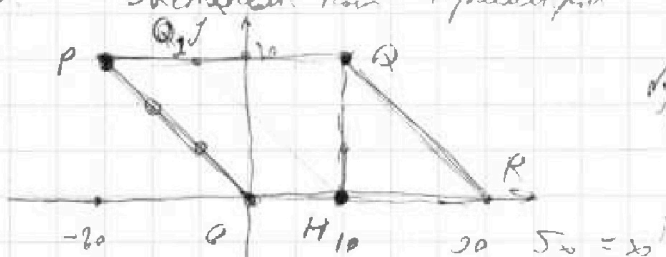
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



**МФТИ**

6. Расчеты по переводу 85 руб. в Old (D), и

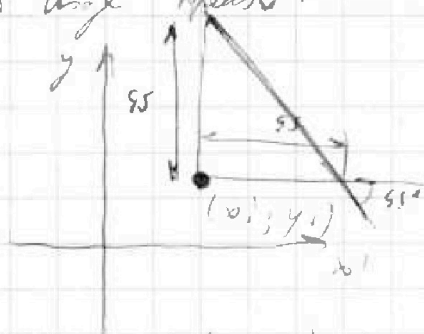


dyje obzględniamy już  
Pierw x:  
 $x' = 50$ .

Ths is:-  $b'_1 = 501, b'_2 = 502$

$$50_2 - 50_1 + y_2 - y_1 = 95 \Leftrightarrow 50_2 - 50_1 + y_2 - y_1 = 95$$

~~Der~~ Die Tangens  $(x_i, y_i)$  nimmt folgende Werte an:  
 8. Tangens:  $T_i$



Тогда с учетом параллельности  
составим Нормальную на  $65^\circ$ , то

die Menge aller  $A$  abwärts  
 beschränkt  $\text{OPER } \{x' \mid x' \leq 10\}$

Сам ~~мне~~ пока не надо (не надо)

тогда  $(x_i', y_i)$  на каждой из контрол  $20 + 1 = 21$

напр. между (102) и (103). Вещь, которую мы

$\lambda(x,y) = \sin m x + \cos n y$

Ты же - в своем праве, и решил ты - не  
быть ОРО, ты и получишь все необходимое:

21. (10-1) = 21.11. = 201. - 8 000.11

21

Решение:

$$200 \cdot 794 \dots + 201 = \frac{200 \cdot 81}{2} = 8100$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 21 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 11 \overline{) 70} \\ \underline{21} \phantom{0} \\ 49 \\ 20 \overline{) 49} \\ \underline{40} \phantom{0} \\ 90 \\ 45 \overline{) 90} \\ \underline{90} \\ 0 \end{array}$$

4 3 3

77 0 1 8  
33 5 1 1

$$\text{Bar} - 2914 \quad 3750 = \underline{9131}$$

The gas hangover A upside 61 B

no interest:  $19131.21 + 339811$

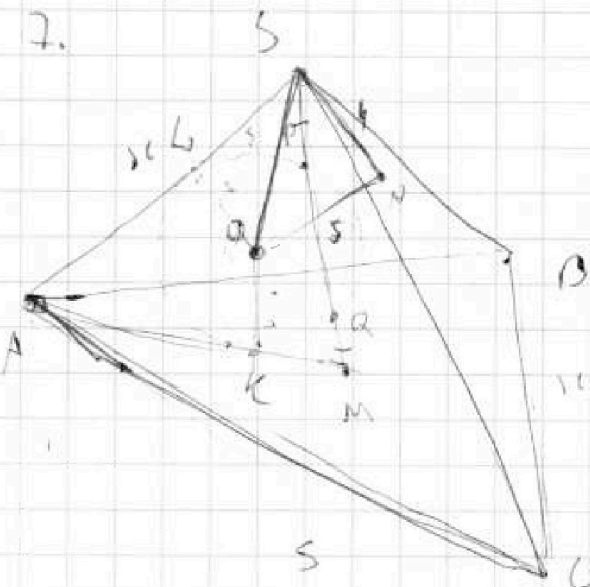
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

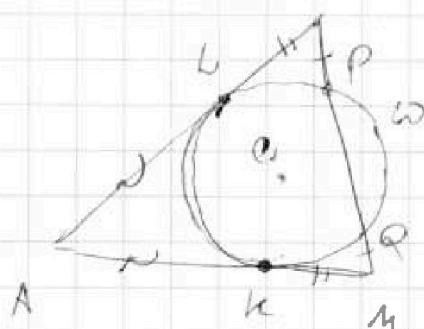
|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



а) Пл.  $\alpha$  касательна  
Плоскости ABC, т.е.  
 $OK \perp AM$ , т.е. O —  
центр  $\alpha$   
Построим ~~плоскость~~ плоскость  
ASM. Точка пересечения  
 $\alpha$  этой плоскости —  
— окружность  $\omega$  с центром O.



Из теоремы о касательных отрезках  
от вершины к окружности

$$LS^2 = SP \cdot SQ =$$

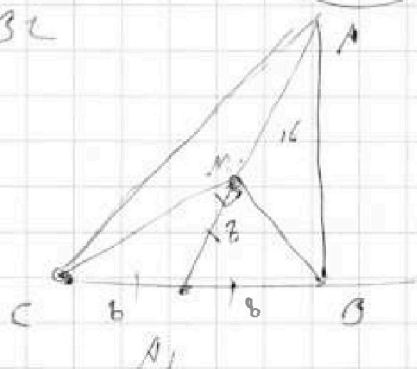
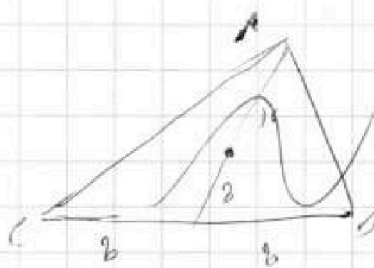
$$LM^2 = MQ \cdot MP$$

$$\text{т.к. } MP = SP \Rightarrow LS^2 = LM^2 \Rightarrow LS = LM$$

$AL = AK$  как касательные из одной точки

$\triangle ASM$  — равнобедренный, т.е.  $AS = AM \Rightarrow AM = 16$

Рассмотрим  $\triangle ABK$



$CA_1 = A_1B = 8$ . M — точка пересечения медиан  $\Rightarrow A_1M = \frac{1}{3} AM = 8$

$\Rightarrow A_1M = CA_1 = A_1B = 8 \Rightarrow \angle CMB = 90^\circ$  Пусть  $\angle A_1MB = \alpha$

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} AB \cdot CK \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} A_1B \cdot CB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 \cdot \sin \alpha = 12 \cdot 16 \cdot \sin \alpha$$

$$S_{ABK} = 160$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{100}{12 \cdot 15} = \frac{25}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{52^2 - 25^2}{52^2}} = \sqrt{\frac{23 \cdot 73}{52^2}}$$

$$MB = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{17 \cdot 23}}{52}$$

$$MB = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{17 \cdot 23}}{52}$$

$$MC = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{17 \cdot 23}}{52}$$

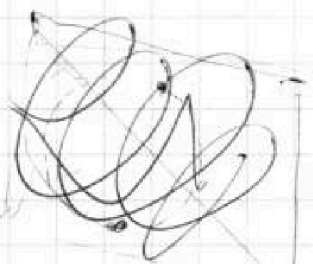
$$AB_1 \cdot C(1 - 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{52^2 - 25^2}{52^2}}) / 2 \cdot \frac{\sqrt{17 \cdot 23}}{52} =$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{52^2 - 25^2}{52^2}} = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot \frac{5}{52} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5} \cdot 25 = 150$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot MB_1 \cdot CC_1 = 150 \cdot 25 = 3500$$

б)



Т.к.  $R$  — радиус сферы

$P \in N_{\text{пл}} \quad ON = 5, SN = 5$

$\Rightarrow$  по теореме  $OS = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

Решим  $\triangle AOS$ : Т.к.  $OK \perp AS \Rightarrow$

$OK = R = 5$  (т.к.  $R$  касается  $AS$ )

$$\Rightarrow AK = \sqrt{OS^2 - ON^2} = 5$$

$$\Rightarrow AK = 16 - 5 = 12$$

Покажем, что  $AK = 12$ , т.к.  $AK \perp AS$ ,  $AL = AK \Rightarrow$

$$AK = 12 \Rightarrow LA_1 = LA_1 - AK = 25 - 12 = 12$$

Еще можно рассмотреть  $\triangle AOS$  и  $\triangle AOS$ , т.к.

$R$  касается  $ABC$  и  $SBC$ . Тогда  $AK = 12$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

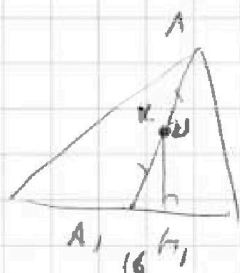
|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



решение от



К от BC. Т.к. К - середина AA,

$$(AK = 12, AH = 29) \Rightarrow$$

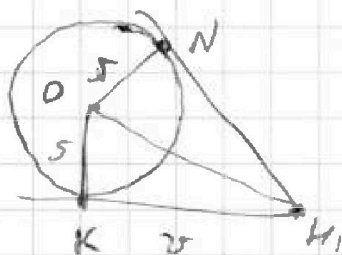
$$KH = \frac{1}{2} AH, \text{ где } KH, AH - \text{высоты}$$

из точек К и А соотв.:

$$\text{то } AH \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = S = 100 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} AH = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$$

Т.к.  $\angle K$  касательна ABC и STBC, т. продолжим  
ее сторону HK и проведем перпендикуляр  $TD \perp BC$ .



$$\sin \angle KH, O = \frac{5}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \angle NH, K = 2 \arcsin \frac{4}{5}$$

$$\text{Ответ: } 2 \arcsin \frac{4}{5}$$