



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$= 7 \quad ab^2c : 3^{33} \cdot 7^{30}$$

$$bc : 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ab^2c : ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$\Rightarrow ab^2c : 3^{33} \cdot 7^{42}$$

$$\Rightarrow ab^2c \geq 3^{33} \cdot 7^{42} \cdot \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow abc \geq \frac{3^{33} \cdot 7^{42}}{b} \Rightarrow abc - \min \text{ при } ac \text{ мин и } b - \max$$

Таким же способом минимизируем $\Rightarrow$

$$abc = \frac{3^{33} \cdot 7^{42}}{b}$$

$$ac = \frac{3^{33} \cdot 7^{42}}{b^2} \Rightarrow b^2 = \frac{3^{33} \cdot 7^{42}}{ac}$$

$$3^{28} \cdot 7^{42} \leftarrow \text{если } ac$$

$$\Rightarrow 3^{10} = b^2 \Rightarrow b = 3^5$$

$$\Rightarrow abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$$

мин значение.

$\Rightarrow ac - \min$ при
максимально возможном b

Ответ: $abc_{\min} = 3^{28} \cdot 7^{42}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



из того, что дано следует:

~~Дано:~~ $\text{НОД}(a, b) = 1$; $\text{НОД}(a+b; a^2 - 9ab + b^2)$

Найти m .

m

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b, a^2 - 9ab + b^2) = \text{НОД}(a+b, 11b^2)$$

Поскольку a и b взаимно-просты, то $a+b$ не делится ни на один из простых множителей b и a .

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a+b, b) = \text{НОД}(a, b+d)$$

Ответ: $m = 11$.

Известно, что для любых чисел a и b верно:

$$\text{НОД}(c, d) = \text{НОД}(c, \text{ост. от деления } d \text{ на } c)$$

$$\begin{array}{r} d^2 + 9ab + b^2 \\ - (d^2 + ab) \\ \hline -10ab + b^2 \\ - (-10ab - 10b^2) \\ \hline 11b^2 \text{ (ост.)} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Число $(a+b)$ и b^2 - взаимно просты $\Rightarrow$

$$\text{НОД}(a+b, 11b^2) \leq 11$$

(достаточно 11 проверить при $a=b$; $b=5$ тогда $6/5$ - несократим)

$$\begin{aligned} & \frac{6}{5} \text{ - несократим; } \frac{36 - 270 + 25}{36 - 270 + 25} = \\ & = \frac{11}{-209} \text{ (сократим на 11)} = \\ & = \frac{1}{-19} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При помощи подстановки можно показать,
что $x = \frac{5}{6}$ будет ^{единственным} корнем уравнения:

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - \frac{25}{6} + 6} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1} = 5 - 5$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + 1 \frac{5}{6}} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + 1 \frac{5}{6}} = 0$$

$0=0$
верно.

~~$$\sqrt{(x - \frac{5}{6})(3x - \frac{5}{2}) + 3\frac{11}{12}} - \sqrt{\dots}$$~~

Ответ: $x = \frac{5}{6}$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть S - расстояние от А до В; V_m -
потомки
скорость велосипедиста; V_b - скорость
велосипедиста.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{V_b} = \frac{S}{V_m} - 1 \quad (1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_m}{V_b} \cdot S - \frac{V_b S}{V_m} = 49 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{V_b+7} = \frac{S}{V_m+7} - \frac{36}{60} \quad (3) \end{array} \right.$$

$\Rightarrow (2) \text{ и } (4):$

$$\frac{V_m}{147 + (25+21)V_m} \cdot S(25-21) =$$

$$1) S(V_b - V_m) = V_b \cdot V_m$$

$$3) S V_m + 7S = S V_b + 7S - \frac{3}{5}(V_b+7)(V_m+7)$$

$$S(V_b - V_m) = \frac{3}{5}(V_b+7)(V_m+7)$$

$$\Rightarrow 5 V_b - V_m = 3 V_b V_m + 21 V_b + 21 V_m + 147$$

$$2 V_b V_m = \frac{21 V_b + 21 V_m + 147}{2}$$

$$\Rightarrow 2S(V_b - V_m) = 21 V_b + 21 V_m + 147$$

$$(25-21) V_b - (25+21) V_m = 147$$

$$V_b = \frac{147 + (25+21) V_m}{25-21} \quad (4)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(Продолжение).

По улу $EX = \sqrt{2} \times Y$

$$\Rightarrow 2r = (\sqrt{2} (CF - \sqrt{2}r)) \cdot \sqrt{2}$$

$$2r = 2CF - 2r$$

$$2r = CF = CD$$

По теореме Пифагора:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$(AE + EB)^2 + (BF + CF)^2 = (AD + CD)^2$$

$$\stackrel{\text{AD}}{\text{AE}} + r)^2 + (r + 2r)^2 = (AD + 2r)^2$$

$$AD^2 + 2ADr + r^2 + 9r^2 = AD^2 + 4ADr + 4r^2$$

$$2ADr = 6r^2$$

$$2AD = 6r$$

$$AD = 3r$$

$$\Rightarrow AD : DC = 3r : 2r = 3 : 2$$

Ответ: 3 : 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz$$

$$25x^2 - z^2 - y^2 = 8z^2 + 6yz$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \quad (\text{возведем в } 6 \text{ квадратов})$$

$$\frac{xy}{8y+x} = \frac{2}{15} \quad 3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = 25 - 60x + 36x^2$$

$$-30x^2 + 56x - 18 = 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} \quad | :2$$

$$-15x^2 + 28x - 9 = \sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} \quad \text{избавимся}$$

П.к. квадратной стороны у нас корни,
 правая сторона
 но от нас может принимать лишь неотрицательные значения $\Rightarrow$ левая тоже.

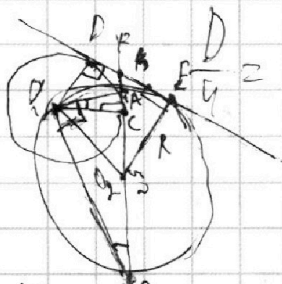
Рассмотрим функцию $f(x) = -15x^2 + 28x - 9$
 (выражение $f(x)$)

$$-15x^2 + 28x - 9 = 0$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 6 \\ 3x^2 - 5x \\ \hline 6 - 2\frac{1}{2} \\ 3x - 1,5 \\ \hline 6 - 2\frac{1}{2} \end{array}$$

$$5(V_m - V_B) = 3(V_B + 7)(V_m + 7)$$

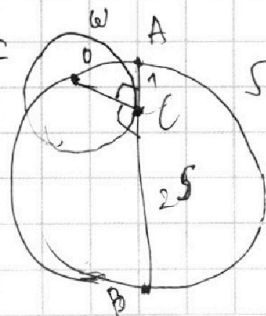
$$2S(V_m - V_B) = 21 V_m + 21 V_B + 147$$



$$DF = FK$$

$$5S(V_m - V_B) = \left(\frac{3}{2} + 1\right)(21V_m + 21V_B + 147)$$

$$2S(V_m - V_B) =$$



$$5V_m V_B = 3V_B V_m + 21V_m + 21V_B + 147$$

$$2V_m V_B = \frac{21V_m + 21V_B + 147}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{5}{v_b} = \frac{5}{v_a} - 1 \quad \frac{5}{v_b+7} = \frac{5}{v_a+7} - \frac{36}{v_a+7} \quad \frac{55}{v_b+7} = \frac{55}{v_a+7} - \frac{36}{v_a+7}$$

$$abc: 3^{14} \cdot 7 \quad bc: 3^{19} \cdot 7^{17} \quad ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$3x^2 - 5x + 6 + \frac{3x^2 - 5x + 6}{v_b} = 49 + 3x^2 + 1x + 1 - 2(3x^2 - 5x + 6)$$

$$(3x^2 - 5x + 6)^2 = 7 \quad d^2 b^2 c^2 \geq 3^{56} \cdot 7^{72}$$

Так как мы работаем с натуральными числами, то будет верно:

$$6x^2 - 4x + 7 - 25 - 60x - 36x^2 = 2(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + 2x + 1)$$

$$-30x^2 + 56x - 18 = \sqrt{d^2 b^2 c^2} \geq \sqrt{3^{56} \cdot 7^{72}} \quad x = \frac{32+y}{5}$$

$$-15x^2 + 28x - 9 = \sqrt{d^2 b^2 c^2} \geq \sqrt{3^{56} \cdot 7^{72}} \quad x = \frac{32+y}{5}$$

$$\frac{d^2 - 9ab + b^2}{4^2 \cdot 196 - \frac{d+b}{270} < 0} = abc \geq 3^{28} \cdot 7^{36}$$

$$(32+y)(32-y) = 40y^2$$

$$a+b = a^2 - 9ab + b^2 \pmod{m} + 11ab^2$$

$$a+b+9ab = a^2+b^2 \quad \frac{32(5x+y)-2^2}{y^2+32^2} = \frac{9+\sqrt{58}}{2}$$

$$a+b \equiv (a+b)^2 - 11ab \pmod{m}$$

$$11ab \equiv (a+b)(a+b-1) \pmod{m}$$

$$(a+b)(a+b-1) - 11ab = \frac{2(35x+3y-2)}{y^2+32^2}$$

$$b = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \quad a = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \dots$$

$$\gcd(a, b) = 1$$

$$z = \frac{5x-y}{3} \quad \frac{8y+x}{xy} = \frac{75}{z}$$

$$(5x-y)(8y+x) = 45xy$$

$$15xy = 8y^2 + x^2 \quad \frac{2(32+3y+34-2)}{y^2+32^2}$$

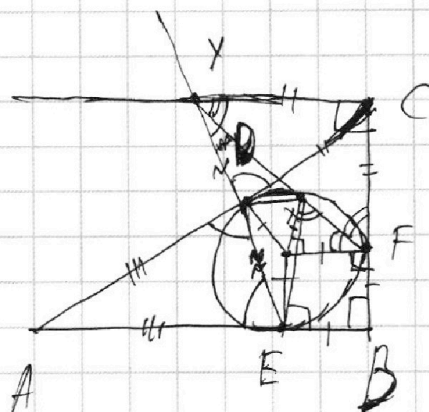
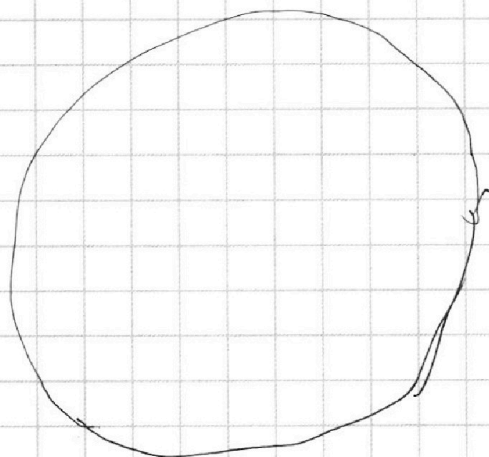
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$XF = \sqrt{2}r$$

$$XF = \sqrt{2}(BC-r)$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CF} = \frac{AB-r}{BC-r}$$

$$\frac{EX}{XY} = \frac{\sqrt{2}}{1} \quad EX = d = 2r$$

$$\sqrt{2}(YF - XF) = 2r$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{2}(BC-r) - \sqrt{2}r) = 2r$$

$$2(BC-r) - 2r = 2r$$

$$BC - r = 2r$$

$$BC = 3r$$

$$(3r)^2 + (r+x)^2 = (2r+x)^2$$

$$9r^2 + r^2 + 2rx + x^2 =$$

$$= 4r^2 + 4rx + x^2$$

$$2rx = 9r^2 + r^2 - 4r^2$$

$$2rx = 6r^2 \quad 2x = 6r \quad x = 3r$$

