



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases}$$

$$(abc)^2 : (2^{23+32} \cdot 7^{29+39}) = (2^{55} \cdot 7^{68})$$

Поскольку, это степени возведения
каждого простого числа p в произведе-
ние $(abc)^2$ — четные. Тогда степень
возведения двоек $v_2(abc)$ не менее 56. Тогда
 $(abc)^2 \geq (2^{56} \cdot 7^{68})^2 \Rightarrow (abc) \geq 2^{56} \cdot 7^{68}$. Проверим

где $abc = 2^{56} \cdot 7^{68}$. При этом сумма
 $a \geq 2^9 \cdot 7^{11}$ возведений 7 в числа a
 $b = 2^{17} \cdot 7^{18}$ и c не менее 39. Значит,
 $c = 2^{23} \cdot 7^{39}$
 $abc \geq 2^{56} \cdot 7^{68}$

$$\begin{cases} a = 2^{11} \cdot 7^{11} \\ b = 2^5 \cdot 7^0 \\ c = 2^{40} \cdot 7^{28} \end{cases}$$

Ответ: $2^{56} \cdot 7^{68}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если $\frac{a}{b}$ несократима, то $(a, b) = 1$.

$$(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = (a+b, (a+b)^2 - 9ab) = \\ = (a+b, 9ab) = 1.$$

ab состоит только из множителей a и b, но $(a+b, a) = (a+b, b) = (a, b)$. Тогда $(a+b, ab) = (a, b) = 1$.

Тогда $(a+b, 9ab) \leq 9$. Тогда если $(a+b, 9ab) = 9$, то $(a+b) \mid 9$. Тогда $a+b=9$, тогда $a=1, b=8$. Тогда $\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{1+8}{1-56+64} = \frac{1+8}{1+8} = \frac{9}{9} = 1$.

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } 1-9x=y, 3x^2+3x+1=a,$$

$$\text{Тогда } \sqrt{a+y}-\sqrt{a}=y.$$

$$\text{Дополним на } (\sqrt{a+y}+\sqrt{a}).$$

$$a+y-a=y(\sqrt{a+y}+\sqrt{a})$$

$$y=y(\sqrt{a+y}+\sqrt{a})$$

$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{9} - \text{не подходит: } \sqrt{\frac{37}{27}} - \sqrt{\frac{37}{27}} = 0 \\ \sqrt{a+y} + \sqrt{a} = 1 \end{cases}$$

$$2a+y+\sqrt{a^2+ay}=1$$

$$2\sqrt{a^2+ay}=(1-2a-y)^2 \Rightarrow 2a^2+4ay=1+4a^2+y^2-4a-2y+y^2+4ay$$

$$1-4a-2y+y^2=(y-1)^2-4a=0$$

$$(y-1)^2=4a$$

$$(9x)^2=4(3x^2+3x+1)$$

$$81x^2=12x^2+12x+4$$

$$69x^2-12x-4=0$$

$$D=12^2-4 \cdot (-4) \cdot 69=144+1104=1248$$

$$x=\frac{12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} = \frac{4}{23} \pm \sqrt{\frac{288}{23}}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{4}{9}; -\frac{4}{23} + \sqrt{\frac{288}{23}}; -\frac{4}{23} - \sqrt{\frac{288}{23}} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Сперва замечаем, что во втором ^{неравенстве} ~~уравнении~~ 2 уравнения окружностей с центрами в $(0;0)$ и радиуса 1 и с центром в $(0;12)$ и радиуса 11 .

Тогда, чтобы при ~~приведении~~ ^{одна} скобок было отрицательно, ~~тогда~~ из них должно быть пол-ки, а другая окруж-ка; также возможно, что какая-то равна 0.

Тогда решим систему (x,y) -точка с координатами (x,y) , лежащая внутри одной или на границе одной окр-ки.

Тогда Они не имеют общих точек.

Тогда, если прямая $ax+by=0$ пересекает хотя бы одну такую окружность, то найдётся целый отрезок, все точки к-го удовлетворяют решению. Тогда ~~точка~~ $ax+by=0$ имеет не более 1 точки с каждой из окр-ев. Тогда $ax+by=0$ — ^{одна} касательная к ним.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

значит,
$$\begin{cases} ax+y=8b \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$
 имеет 1 решение.

$$y=8b-ax$$

$$64b^2 - 16abx + a^2x^2 + x^2 = 1$$

$$x^2(a^2+1) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = (16ab)^2 - 4(a^2+1)(64b^2-1) = 256a^2b^2 - 256$$

$$- a^2b^2 - 256b^2 + 4a^2 + 4 = -256b^2 + 4a^2 + 4 = 0.$$

$$256b^2 = 4a^2 + 4 \Rightarrow a^2 + 1 = 64b^2$$

По аналогии

$$\begin{cases} ax+y=8b \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16$$
 имеет 1 решение

$$x^2(a^2+1) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$(a^2+1)x^2 - 192b + 24ax - 8abx = 0$$

$$64a^2(3-b)^2 = 192 \cdot b \cdot 4(a^2+1)$$

$$\text{Получаем } (64b^2-1)(3-b)^2 = 64 \cdot 48b^3$$

Решая ур-е, легко найти требуемое
а.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



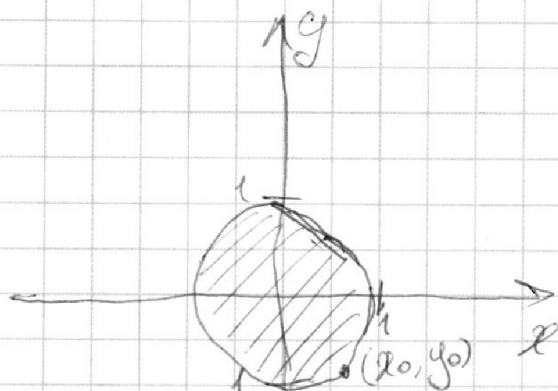
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$y_0 = 8b - ax_0$$

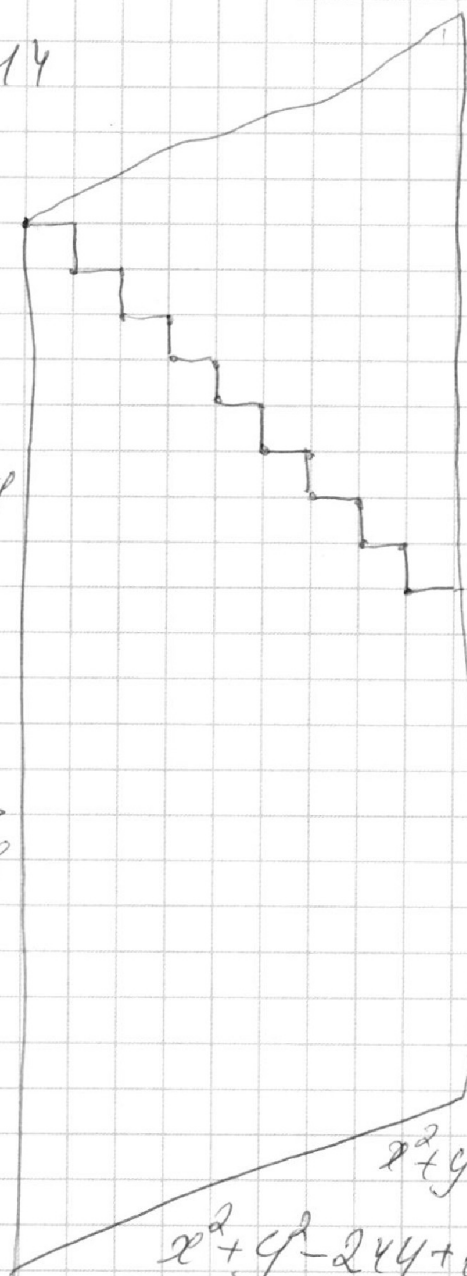
$$y = 8b - ax$$
$$64b^2 - 16abx + a^2x^2 + x^2 - 1$$



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{cases} ax + y = 8b - \text{касательная} \\ ax - 8b + y = 0 \\ (x^2 + (y - 12)^2 - 16) = 0 \end{cases}$$



$$x^2 + y^2 - 24y + 128$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 - 16 =$$

$$\geq 0$$
$$ax - 8b + y = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(9x)^2 = 2(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 6x^2 + 6x + 2$$

$$75x^2 - 6x - 2 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 75 \cdot (-2) = 36 - 4 \cdot 300 \cdot (-2) = 36 + 3000 = 3036$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{3036}}{2}$$

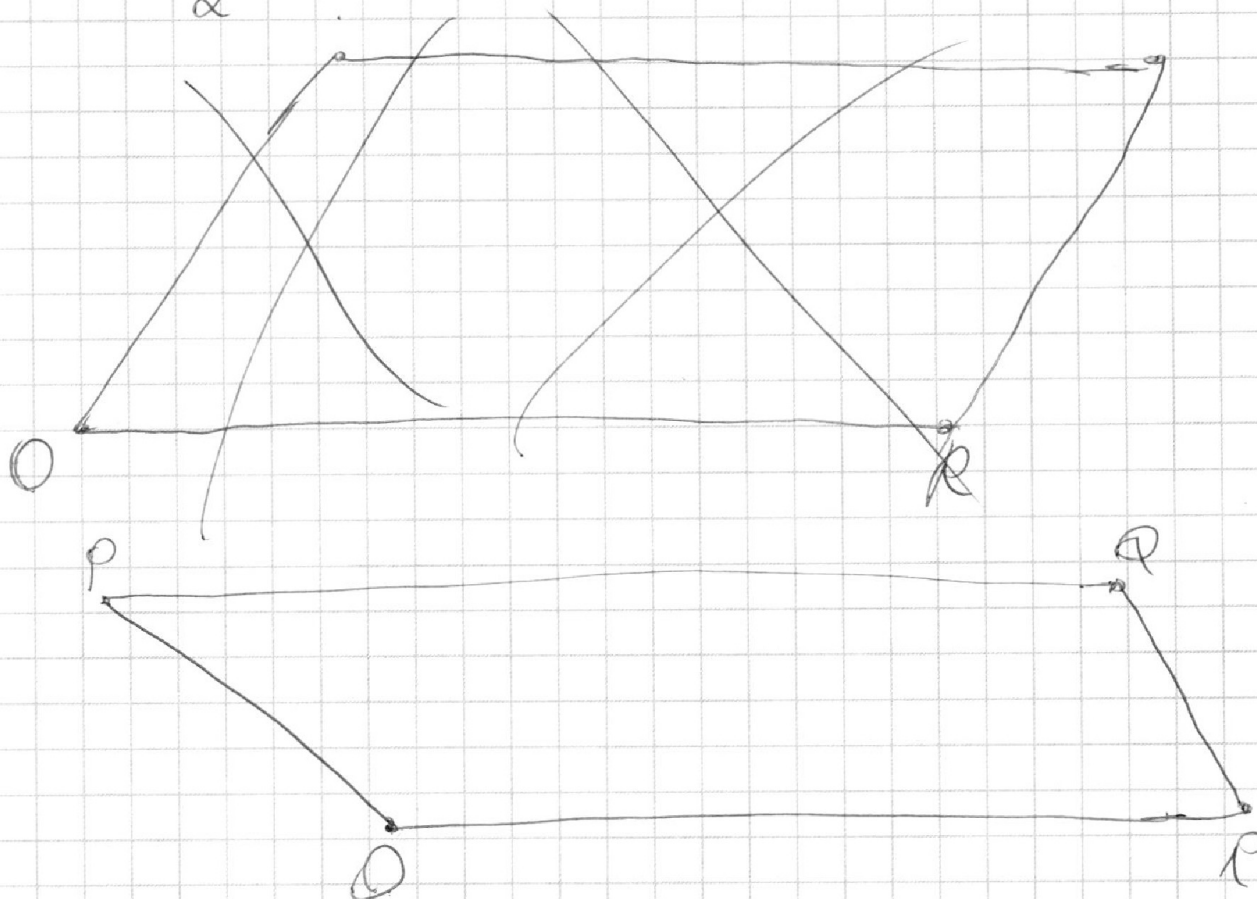
$$\frac{-3 \pm \sqrt{84}}{2} = -3 \pm \sqrt{84} = -3 \pm 2\sqrt{21}$$

$$(1 - (4 - 9x)) = 9x$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 69 \\ \hline 144 \\ 116 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 4 \\ \hline 276 \end{array}$$

$$\frac{12}{69} = \frac{4}{23}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$(3x^2 + 3x + 1) \geq 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 - 24 = 12$$

$$D_2 = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$$

$$y = 1 - 9x$$

$$(1-y)^2 = 2a + 4ay + y^2$$

$$\sqrt{a+y} - \sqrt{a} = y$$

$$(a+y+a-2\sqrt{a^2+ay}) = y^2$$

$$(2a+y) - 2\sqrt{a^2+ay} = y^2$$

$$y^2 - 2a - y = -2\sqrt{a^2+ay}$$

$$a+y-a = y(\sqrt{a+y} + \sqrt{a})$$

$$ax + y - 8b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\sqrt{a+y} + \sqrt{a} = 1$$

$$2a + y + 2\sqrt{a^2+ay} = 1$$

$$(1-2a-y)^2 = 4(a^2+ay)$$

$$1 + 2a^2 + y^2 - 4a - 4y + 4ay = 4a^2 + 4ay$$

$$1 + y^2 - 4a - 4y - 4ay = 0$$

$$(y^2 - 2y + 1) + 2(a + 2ay + y) = 0$$

$$(y-1)(y-1) = -4y - 4a +$$

$$(1-2a-y)^2 = (1-2a-y)(1-2a-y) =$$

$$= (1-2a-y-2a+4a^2+2ay-y+2ay+y^2) =$$

$$1-2a-2y+4a^2+4ay+y^2 = 0$$

$$y \geq 0; y \geq -a$$

$$6x^2 + 6x + 2 + 2(3x^2 + 3x + 1) \cdot (1-9x) + (1-9x)$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - \frac{6}{9} + 2} = \sqrt{\frac{241}{27} - 3 + 2} =$$

$$= \sqrt{\frac{-17}{27} + 2} = \sqrt{\frac{37}{27}}$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - \frac{6}{9} + 1} = \sqrt{\frac{241}{27}}$$

$$2 \cdot 2ay = 4ay$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

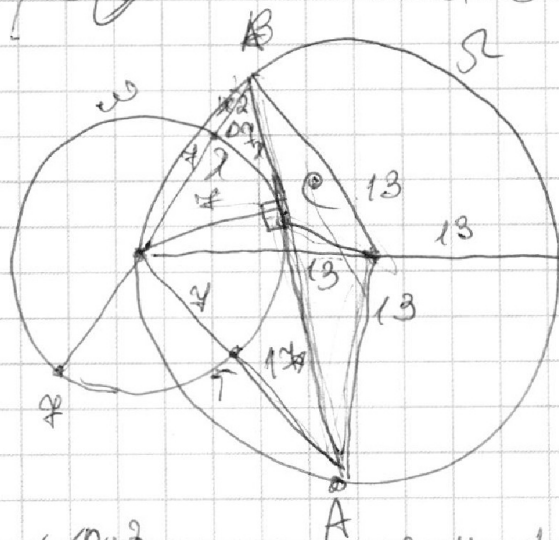
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} =$$

$$= (1 - 9x)^2 = 1 - 18x + 81x^2$$

$$49x^2 + 49 = 81 \Rightarrow 49x^2 = 32$$



$$49x^2 = 49 \cdot 32 = 49 \cdot 32$$

$$x = \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{\sqrt{32}}{7} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$(7+x)^2 = 7^2 + (7x)^2 =$$

$$= 49 + 14x + x^2 = 49 + 49x^2$$

$$14x + x^2 = 49x^2$$

$$14x = 48x^2$$

$$7x = 24x^2$$

$$7 = 24x \Rightarrow x = \frac{7}{24}$$

$$14BD + BD^2 = 49x^2$$

$$49x^2 + 49 = (7 + BD)^2$$

$$49 + 14BD + BD^2 = 49 + BD^2 + 28BD$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$(3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1) - 2\sqrt{\dots} = 1 - 18x + 81x^2$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{\dots} = 1 - 18x + 81x^2$$

$$5x^2 - 15x - 2 = -2\sqrt{\dots}$$

$$(7x)^2 + 49 = (7 + x^2)^2$$

$$49x^2 + 49 = 49 + 7x^2 + x^4$$

$$42x^2 = x^4 \Rightarrow x^2 = \sqrt{42} \Rightarrow AB = 24\sqrt{42}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$64a^2(3-b)^2 = 192b \cdot 4 \cdot (a^2 + 1)$$

$$\int a^2(3-b)^2 = 48b(a^2 + 1)$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 64b^2 \end{cases}$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

$$(64b^2 - 1)(3-b)^2 = 192b \cdot 4 \cdot 48b^3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 = 16$$

$$-24y + 144 = 15$$

$$24(6 - y) = 15$$

$$6 - y = \frac{15}{24} \Rightarrow y = 6 - \frac{15}{24} = 5\frac{9}{24} = 5\frac{3}{8}$$

$$x(14 + BD)^2 = x^2 + 49x^2$$

$$296 + 28BD + BD^2 =$$

$$= 49 + 49x^2$$

$$248 + 28BD + BD^2 = 49x^2$$

$$\begin{cases} ax + y = 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$(ax + y)^2 = 64b^2$$

$$a^2x^2 + 2axy + y^2 = 64b^2$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 2axy + y^2 = 64b^2$$

$$D = (16ab)^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) = 256a^2b^2 - 256a^2b^2 - 256b^2 + 4a^2 + 4 = -256b^2 + 4a^2 + 4 = 0$$

$$4a^2 + 4 = 256b^2$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$a^2 + 1 = 64b^2$$

$$ax + y = 8b$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 128 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 8x + 92b + 24ax - 8^2bx = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 8x + 92b + 24ax - 8^2bx = 0$$

$$24b + 3ax - ab = 0$$

$$ab = 24b + 3ax =$$

$$64(a^2 - 1) = 256b^2$$

$$64(a^2 - 1) = 256b^2$$

$$192b \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} 192 \quad | \quad 64 \\ 16 \quad | \quad 12 \\ \hline 32 \quad | \quad 12 \\ \hline 32 \quad | \quad 0 \end{array}$$

