



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Для того, чтобы abc
было наименьшим, надо чтобы
 a, b и c состояли только
из 2 и 7.

Тогда:

$$ab = 2^{14+x_1} \cdot 7^{10+x_2}$$

$$bc = 2^{17+y_1} \cdot 7^{17+y_2}$$

$$ac = 2^{20+z_1} \cdot 7^{37+z_2}, \text{ где } x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{N}$$

тогда:

$$b^2 = \frac{ab \cdot bc}{ac} = 2^{11+x_1+y_1-z_1} \cdot 7^{-10+x_2+y_2-z_2}$$

Чтобы b было целое, тогда хотя бы одно из

x_1, y_1, z_1 должно быть 1, и чтобы сумма
 x_2+y_2 была хотя бы 10. В таком случае:

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51+x_1+y_1+z_1} \cdot 7^{64+x_2+y_2+z_2}$$

Из предыдущих условий, $x_1+y_1+z_1$ хотя бы 1,

и x_2+y_2 , а следовательно и $x_2+y_2+z_2$ хотя бы
10.

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51+1} \cdot 7^{64+10} = 2^{52} \cdot 7^{74}$$

$$\Downarrow$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{26} \cdot 7^{37}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

Чтобы $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ можно было сократить

на m , надо чтобы $(a+b):m$ и $(a^2-6ab+b^2):m$.

Тогда: $a^2-6ab+b^2:m$

$$\downarrow$$
$$(a^2+2ab+b^2-8ab):m$$

$$((a+b)^2-8ab):m \quad \text{т.к. } (a+b):m, \text{ то } (a+b)^2:m$$

$$\swarrow$$
$$8ab:m$$

~~т.к. м.к. а и b разное~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

$$0 = 50^2 + 99 \cdot 4 \cdot 49 = 50^2 + (148 - 50)(148 + 50) =$$
$$= 50^2 + (148^2 - 50^2) = ~~148~~ 148^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-50 \pm 148}{98}$$

$\left\{ \begin{array}{l} - \text{ не подходит, т.к.} \\ t = x^2 \end{array} \right.$

$$t = \frac{-50 + 148}{98} = 1$$

$\sqrt{11}$

$$x = \sqrt{t} = 1$$

А т.к. $AB = 8x$, то $AB = 8$.

Ответ: $AB = 8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

$$1. \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad | \cdot (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2 - 7x = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2. \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

1. + 2.

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x$$

$$4 \cdot (2x^2 - 5x + 3) = 9 - 42x + 49x^2$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 9 - 42x + 49x^2$$

$$49x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 484 + 492 = 976$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{42}$$

Но: $2x^2 + 5x + 3 \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \\ x \leq \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{22 + \sqrt{976}}{42} < \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{но} \quad \frac{22 - \sqrt{976}}{42} > \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{поэтому оно не подходит.}$$

$$x = \frac{22 + \sqrt{976}}{42} < \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{поэтому оно подходит.}$$

$$\frac{22 - \sqrt{976}}{42}$$

$$\frac{22 + \sqrt{976}}{42} < \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \text{ но } \frac{22 - \sqrt{976}}{42} > \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \text{ поэтому оно не подходит}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение)

А корень $\frac{22 - \sqrt{975}}{42} < \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$, поэтому
подходит.

Ответ: $x = \frac{22 - \sqrt{975}}{42} \approx -0,23$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

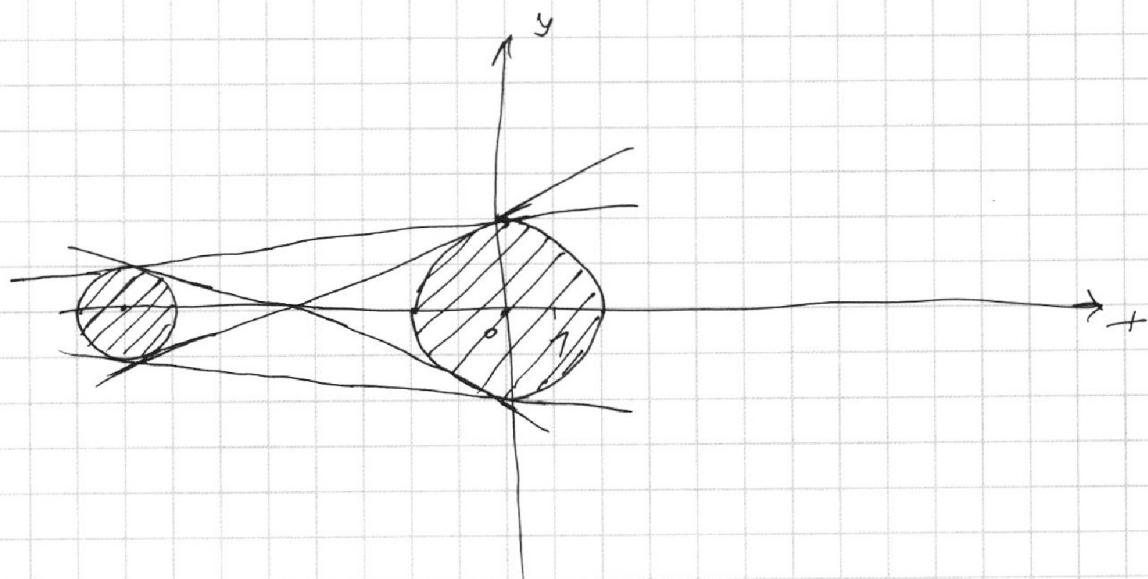
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

это два уравнение ~~окружности~~ ^{окружности}.



Если первая скобка ≤ 0 , то (x, y) внутри
левой ~~окружности~~ ^{окружности}, и тогда вторая скобка должна
быть ≥ 0 , то есть (x, y) снаружи правой
~~окружности~~ ^{окружности}. И наоборот вторая скобка
 ≤ 0 , тогда первая ≥ 0 и (x, y) внутри
второй окружности.

А уравнение $ax - y + 10b = 0$

$y = ax + 10b$, это просто просто прямая.
Тогда два решения будет, когда прямая
будет касательной сразу к двум окружностям.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение)

Пусть $y = \cancel{ax} + k$, где $k = 10b$

Тогда:

$$\begin{cases} (x+8)^2 + (ax+k)^2 - 1 = 0 \\ x^2 + (ax+k)^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

и т.к. это касательная,
то $D = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 4

$$\sqrt{1} - \sqrt{2} = 2 - 3x$$

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} = 1$$

$$\sqrt{1} = \frac{3 - 7x}{2}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = \frac{9 - 42x + 49x^2}{4}$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 9 - 42x + 49x^2$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\frac{1 - 2 + 7x}{2} = 2x^2 + 2x + 1$$

$$49x^2 - 74x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 3 = 976$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82}$$

ОДЗ:

$$2 \cdot \left(\frac{22 \pm \sqrt{976}}{82} \right)^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{5+1}{4} \\ x \leq \frac{5-1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{(22 \pm \sqrt{976})}{82}$$

$$\frac{(22 + \sqrt{976})}{82}$$

$$\frac{(22 - \sqrt{976})}{82}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

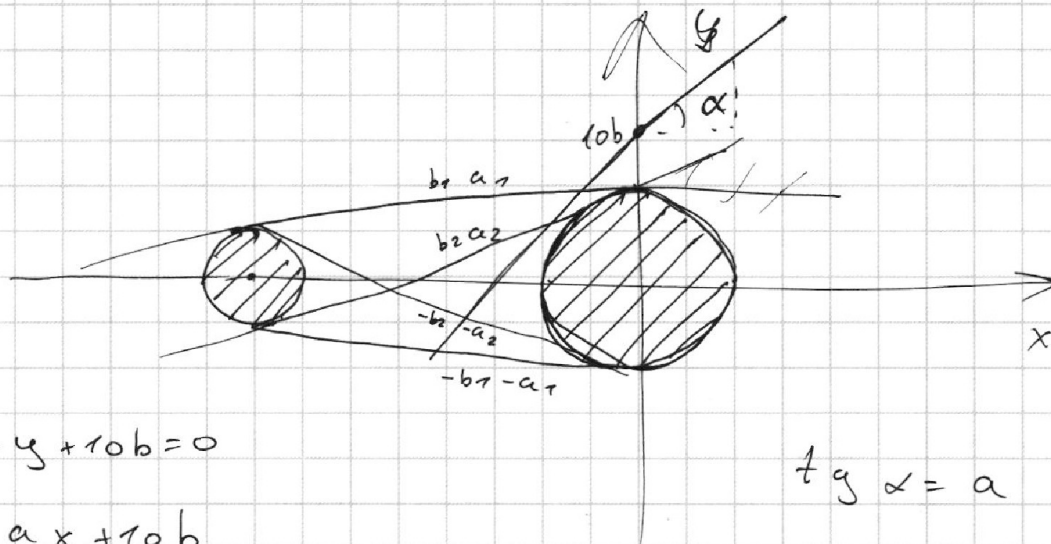


N 5

$$ax - y + 10b = 0$$

извне + внутри - извне + внутри -

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$



$$ax - y + 10b = 0$$

$$y = ax + 10b$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ y = ax + 10b \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$(x+8)^2 + (ax + 10b)^2 = 1$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20axb + 100b^2 = 1$$

$$x^2(1+a^2) + x(16+20ab) + 64+100b^2-1=0$$

$$D = (16+20ab)^2 - 4(1+a^2)(64+100b^2-1) = 0$$

$$16^2 + 640ab + 400a^2b^2 = (4+a^2)(64+100b^2-1)$$

$$16^2 + 640ab$$

$$8^2 + 160ab + 100a^2b^2 = 64+100b^2-1+64a^2+100a^2b^2-a^2$$

$$64+160ab = 64+100b^2-1+64a^2-a^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 5

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + 2x^2 + 2x + 1 = 1$$

$$x - y = x^2 - y^2$$

$$x - y = (x - y)(x + y)$$

$$x + y = 1$$

$$4x^2 - 3x + 5 + 2\sqrt{\quad} = 1$$

$$(4x^2 - 3x + 5) - 2\sqrt{\quad} = (2 - 7x)^2$$

$$4x^2 - 3x + 5 = \frac{(2 - 7x)^2 + 1}{2}$$

$$4x^2 - 3x + 5 = 2 - 14x + 24,5x^2 + \frac{1}{2}$$

$$24,5x^2 - 4x^2 - 14x + 3x + 2 + \frac{1}{2} - 5 = 0$$

$$20,5x^2 - 11x - 1,5 = 0$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 =$$

$$2 \cdot \sqrt{\quad} = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41}}{2}$$

$$484 + 165 \cdot 3 = 989 + 492 = 1481$$

$$8x^2 - 6x + 8 = 4 - 28x + 24,5x^2 + 1$$

$$x(x + 44) = 5 \cdot 3 \cdot 54$$

$$\begin{array}{l} 8 \cdot 44 \cdot \frac{5}{2} \\ 10 \cdot 44 \cdot \frac{6}{5} \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$(2x^2-5x+3) - 2 \cdot \sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} + (2x^2+2x+1) = 4-28x+19x^2$$

$$2x^2-5x+3 - 2 \cdot \sqrt{4x^4+4x^3+2x^2-10x^3-10x^2-5x+6x^2+6x+3} + 2x^2+2x+1 = 4-28x+19x^2$$

$$4x^2-3x+4-2\sqrt{4x^4-6x^3-2x^2+x+3} = 4-28x+19x^2$$

$$4x^2-49x^2-3x+28x+4-4-2\sqrt{\dots} = 0$$

$$4x^2-6x^3-2x^2+x+3$$

$$4x^2-2x^3-4x^2-3x = 4x^3+2x^2+4x+3$$

$$(4x^3-2x^3-4x^2-3x) - (4x^3-2x^2-4x-3)$$

$$x(4x^3-2x^2-4x-3) - (4x^3-2x^2-4x-3)$$

$$(4x^3-2x^2-4x-3)(x-1)$$

$$\begin{array}{r} x^4 \quad x^3 \quad x^2 \\ x^3 \quad x^2 \quad x \\ x^2 \quad x \quad 1 \end{array}$$

$$4x^3-2x^2-4x-3$$

$$\begin{array}{r} 4x^4-2x^3 \\ -4x^3+2x^2 \\ \hline 4x^4-2x^3-4x^3+2x^2 \\ -4x^3+2x^2-4x-3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x^2-5x+3=0 \\ 2x^2+2x+1=0 \\ -5x+3-2x-1=0 \\ -7x+2=0 \\ x=\frac{2}{7} \end{array}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1 = (2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$$

$$-8x-2x+2 = (2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b} - \text{несокр.}$$

$$[a, b] = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$$\frac{a^2-3ab+b^2-3ab}{a^2-}$$

$$\boxed{\begin{matrix} a+b : m \\ ab : m \end{matrix}} \quad \begin{matrix} a+b = k_1 m \\ ab = k_2 m \end{matrix}$$

$$a = k_1 m + n_1$$

$$b = k_2 m + n_2$$

$$k_1 m + n_1 + k_2 m + n_2 = m$$

$$m(k_1 + k_2) + (n_1 + n_2) = m$$

$$n_1 + n_2 = m$$

$$(k_1 m + n_1)(k_2 m + n_2) = m$$

$$k_1 k_2 m^2 + k_1 m n_2 + k_2 m n_1 + n_1 n_2 = m$$

$$n_1 n_2 = m$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$k_1 = \frac{k_2(a+b)}{ab}$$

$$a+b = \frac{k_2(a+b)}{ab} m$$

$$1 = \frac{k_2 m}{ab}$$

$$ab = k_2 m$$

$$a+b : m$$

$$(a+b)^2 - 8ab : m$$

$$(a+b)^2 : m \quad 8ab : m$$

$$a+b : m$$

$$8ab : m$$

$$\cancel{a+b = k_1 m}$$

$$\cancel{8ab = nm}$$

$$\cancel{a = k_1 m - b}$$

$$\cancel{8(k_1 m - b)^2 = nm}$$

$$\cancel{8k_1^2 m^2 - 8b^2 = nm}$$

$$\cancel{8k_1 m b - 8b^2 = nm}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{12}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$ab = k_1 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = k_2 2^{17} \cdot 7^{12}$$

$$ac = k_3 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\begin{aligned} ab &= 2^{14+k_1} \cdot 7^{10+k_2} \\ bc &= 2^{17+m_1} \cdot 7^{12+m_2} \\ ac &= 2^{20+n_1} \cdot 7^{37+n_2} \end{aligned}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{12}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$ab \cdot bc = 2^{31} \cdot 7^{22}$$

$$\frac{ab^2}{ac} = \frac{k_1 k_2 2^{31} \cdot 7^{22}}{k_3 2^{20} \cdot 7^{37}} = \frac{k_1 k_2}{k_3} 2^{11} \cdot 7^{-15}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{51} \cdot 7^{64}$$

abc

$$b = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_3} 2^{11} \cdot 7^{-15}}$$

$$a = \sqrt{\frac{k_1 k_3}{k_2} 2^{17} \cdot 7^{30}}$$

$$c = \sqrt{\frac{k_2 k_3}{k_1} 2^{23} \cdot 7^{44}}$$

$$abc = \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3 k_1 k_3 k_2 k_3}{k_1 k_2 k_3}}$$

$$abc = \sqrt{k_1 k_2 k_3}$$

$$ab^2 c = 2^{31+k_1+m_1} \cdot 7^{22+k_2+n_2}$$

$$b^2 = 2^{\frac{11(k_1+n_1-m_1)}{2}} \cdot 7^{\frac{-15(k_2+n_2-m_2)}{2}}$$

$$k_2 + n_2 = 10$$

$$k_2 = 0, n_2 = 10$$

$$k_1 + n_1 + m_1 = 11$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= 10 \end{aligned}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51+(k_1+n_1+m_1)} \cdot 7^{64+(k_2+n_2+m_2)}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$b^2 = 2^{12} \cdot 7^{10}$$

$$b = 2^6 / 2^5$$

$$\begin{aligned} b &= 2^6 \\ a &= 2^8 \cdot 7^{20} \\ c &= 2^{17} \cdot 7^{17} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

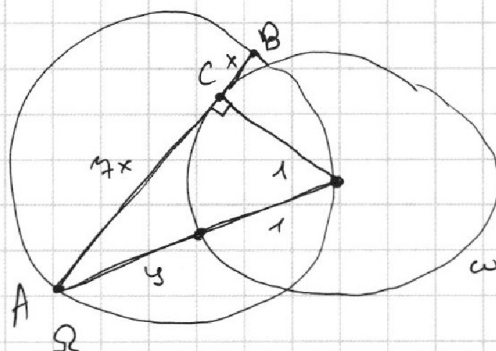
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 3



$$(7x)^2 + 1^2 = (y+1)^2$$

$$y \cdot (y+1) = (7x)^2$$

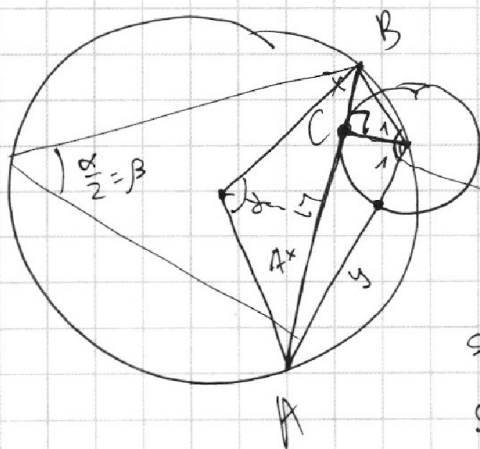
$$49x^2 + 1 = y^2 + 2y + 1$$

$$y^2 + 2y = 49x^2$$

$$(7x)^2 + 1 = (y+1)^2$$

$$(7x)^2 = y \cdot (y+2)$$

$$y^2 + 2y = 49x^2$$



$$2R \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$2R \cdot \sin \beta$$

$$9180^\circ - \beta$$

$$\sin p_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\sin p_2 = \frac{7x}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

$$\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta = \sin(p_1 + p_2) =$$

$$R \cdot \omega = 1$$

$$R \cdot \Omega = 5$$

$$1(1+y) = (7x)^2$$

$$(1+y)^2 = 1^2 + (7x)^2$$

$$1+y = (7x)^2 = 49x^2$$

$$(1+y)^2 = 1 + 49x^2$$

$$(49x^2)^2 = 1 + 49x^2$$

$$49^2 x^4 = 1 + 49x^2$$

$$49x^2 = t$$

$$t^2 = 1 + t$$

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$49x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$29x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\sin p_1 \cos p_2 + \cos p_1 \sin p_2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$

$$\sin \beta = \sin(r_1 + r_2) = \sin r_1 \cos r_2 + \cos r_1 \sin r_2 =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} =$$

$$= \frac{x + 7x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49x^2+1}} = \frac{8x}{\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}} =$$

$$8x = 2.5 \cdot \frac{8x}{\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}}$$

$$1 = 2.5 \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)}}$$

$$\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)} = 10$$

$$(x^2+1)(49x^2+1) = 100$$

$$x^2 = t$$

$$(t+1)(49t+1) = 100$$

$$49t^2 + t + 49t + 1 = 100$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 99 \cdot 9 \cdot 49 =$$

$$= (50^2) + (198-50)(198+50) =$$

$$= 50^2 + (198^2 - 50^2) = 198^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-50 \pm 198}{98} = \frac{-50 + 198}{98} =$$

$$= \frac{98}{98} = 1$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{98 \cdot 198}{49 \cdot 2 \cdot 98 \cdot 2}$$

$$99 \cdot 9 \cdot 99$$

$$(198-50)(198+50)$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(59-50)(59+50)$$

$$(99-50)(99+50)$$

$$(98-50) \cdot (98+50)$$

$$98 \cdot 148 = 14524$$

$$x \cdot (100+x) = 99 \cdot 9 \cdot 99$$

$$99 \cdot 99$$

$$198 \cdot 98$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 5

$$160ab = 100b^2 - 1 + 63a^2$$

$$100b^2 = 160ab - 63a^2 + 1$$

~~$$100b^2$$~~

$$y = ax + 10b$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + (ax + 10b)^2 = 4$$

$$x^2 + a^2 x^2 + 20axb + 100b^2 = 4$$

$$x^2(1+a^2) + x(20ab) + 100b^2 - 4 = 0$$

$$D = 400a^2b^2 - 4(1+a^2)(100b^2 - 4) = 0$$

$$100a^2b^2 = 100a^2b^2 - 4a^2 + 100b^2 - 4$$

$$0 = 100b^2 - 4a^2 - 4$$

$$0 = 160ab - 63a^2 + 1 - 4a^2 - 4$$

$$0 = 160ab - 67a^2 - 3$$

$$67a^2 = 160ab - 3$$

~~$$ax$$~~
$$y = ax + 10b$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0$$

$$((x+8)^2 + (ax+10b)^2 - 1)(x^2 + (ax+10b)^2 - 4) = 0$$

$$0 = 160ab - 67a^2 - 3$$

$$160ab = 67a^2 + 3$$

$$b = \frac{67a^2 + 3}{160a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$b = \frac{67a^2 + 3}{160a} = \frac{67a}{160} + \frac{3}{160a}$$

$$160ab = 100b^2 - 1 + 63a^2$$

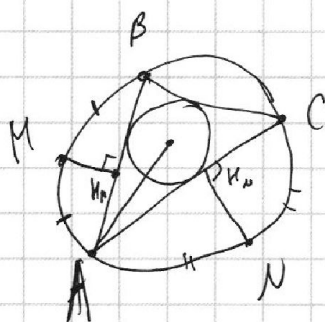
~~100~~

$$67a^2 + 3 = 100 \left(\frac{67a^2 + 3}{160a} \right)^2 - 1 + 63a^2$$

$$67a^2 + 3 = \left(\frac{67a^2 + 3}{16a} \right)^2 - 1 + 63a^2$$

$$4a^2 + 4 = 6$$

N7



$$MK_K = 1,5$$

$$NK_N = 2$$