



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



⊕ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

⊕ 3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

⊕

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

⊕ 5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть $a_2; a_3; a_5$ — числа двоих, троек
и пятёрок в разложении на множители
числа a ; аналогично введём

$b_2; b_3; b_5; c_2; c_3; c_5$

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad ab : 2^9 &\Rightarrow a_2 + b_2 \geq 9 \\ bc : 2^{14} &\Rightarrow b_2 + c_2 \geq 14 \\ ac : 2^{19} &\Rightarrow a_2 + c_2 \geq 19 \end{aligned} \right\} +$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 42$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

$$\left. \begin{aligned} 2) \quad ab : 3^{10} &\Rightarrow a_3 + b_3 \geq 10 \\ bc : 3^{13} &\Rightarrow b_3 + c_3 \geq 13 \\ ac : 3^{18} &\Rightarrow a_3 + c_3 \geq 18 \end{aligned} \right\} +$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$$

$$\left. \begin{aligned} 3) \quad ab : 5^{10} &\Rightarrow a_5 + b_5 \geq 10 \\ bc : 5^{13} &\Rightarrow b_5 + c_5 \geq 13 \\ ac : 5^{20} &\Rightarrow a_5 + c_5 \geq 20 \end{aligned} \right\} +$$

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 53$$

$$a_5 + b_5 + c_5 \geq 27$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Итак, две числа abc имеем

$$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$\text{Но } ac : 5^{30} \Rightarrow abc : 5^{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Пример и } abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Пусть } a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$ab = (2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15}) : 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc = (2^{14} 3^{13} 5^{15}) : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac = (2^{19} 3^{19} 5^{30}) : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin t \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall t \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin t \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\forall t \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\underline{-3\pi \leq x \leq 2\pi}$$

1) Если $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in \underline{I}$ или $\underline{IV}$ четверти, то
найдем число $k \in \mathbb{Z}$, что

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi + 10\pi k = 6x$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}}$$

$$-3\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \leq 2\pi$$

$$-9 \leq 1 + 5k \leq 6$$

$$-10 \leq 5k \leq 5$$

$$-2 \leq k \leq 1$$

• Если $k = -2$ $x = \frac{\pi}{3} - \frac{10\pi}{3}$

$$x = -3\pi$$

• Если $k = -1$ $x = \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2} \in$ области определения
арксинуса. Проверка: $5 \arcsin \cos \frac{7\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

$$5 \arcsin \frac{1}{2} = 4\pi - \frac{5\pi}{2}$$

$$\text{проверка } -\frac{5\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$$

верно

• Если $k = -1$ $x = \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \in \text{IV сег.}$$

проверка: $5 \arcsin \cos -\frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} - \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$$5 \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5 \cdot (-\frac{\pi}{6})}{1} = -\frac{5\pi}{6}$$

верно

• Если $k = 0$ $x = \frac{\pi}{3}$ (В целях экономии времени не проверяю, так как $\frac{\pi}{2} - x \in \text{I или II сег.}$)

$$5 \arcsin \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

верно

• Если $k = 1$ $x = 2\pi$

$$5 \arcsin(\cos 2\pi) = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(1) = \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

верно

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

2) если $(\frac{\pi}{2} - x) \in \pi$ или π кет верги, то
найдётся число $n \in \mathbb{Z}$, но

$$5 \cdot \left(- \left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) \right)^{+2\pi n} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot \left(- \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) \right)^{+2\pi n} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{15\pi}{2} + 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = 8\pi + 2\pi n$$

$$x = 2\pi + \frac{\pi n}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2\pi + \frac{\pi n}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-5 \leq 4 + n \leq 5$$

$$-9 \leq n \leq 1$$

• $n = -9$ $x = 2\pi - \frac{9\pi}{2}$

$$x = -\frac{5\pi}{2}$$

$$5 \arcsin \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{2} \right) \right) = -\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin 0 = -2\pi$$

$$0 = -2\pi$$

неверно

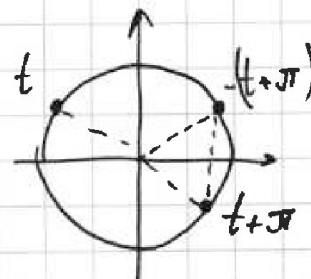
• $n = 8$ $x = 2\pi - 4\pi$

$$x = -2\pi$$

$$5 \arcsin \cos (-2\pi) = -2\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin 1 = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} \text{ - неверно}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

• $n = -7$ $\alpha = 2\pi - \frac{7\pi}{2}$; $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$

$$5 \arcsin \cos \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cancel{-\frac{3\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot 0 = -\pi$$

неверно

• $n = -6$ $\alpha = 2\pi - 3\pi$; $\alpha = -\pi$

$$5 \arcsin \cos (-\pi) = -\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin (-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

неверно

• $n = -5$ $\alpha = 2\pi - \frac{5\pi}{2}$; $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

$$5 \arcsin \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin 0 = 0$$

$$\frac{0}{5} = 0$$

верно

• $n = -4$ $\alpha = 2\pi - 2\pi$; $\alpha = 0$

$$5 \arcsin \cos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

неверно

• $n = -3$ $\alpha = 2\pi - \frac{3\pi}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$5 \arcsin \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$0 = \pi$$

неверно

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

• $n = -2$ $\alpha = 2\pi - \pi$; $\alpha = \pi$

$$5 \arccos \cos \pi = \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

неверно

• $n = -1$ $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{2}$; $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

$$5 \arccos \cos \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$0 = 2\pi$$

неверно

• $n = 0$ $\alpha = 2\pi$

$$5 \arccos \cos 2\pi = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

верно

• $n = 1$ $\alpha = 2\pi + \frac{\pi}{2}$; $\alpha = \frac{5\pi}{2}$

$$5 \arccos \cos \frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$0 = 3\pi$$

неверно

~~Ответ: $\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$~~

Ответ: $\left\{ -3\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

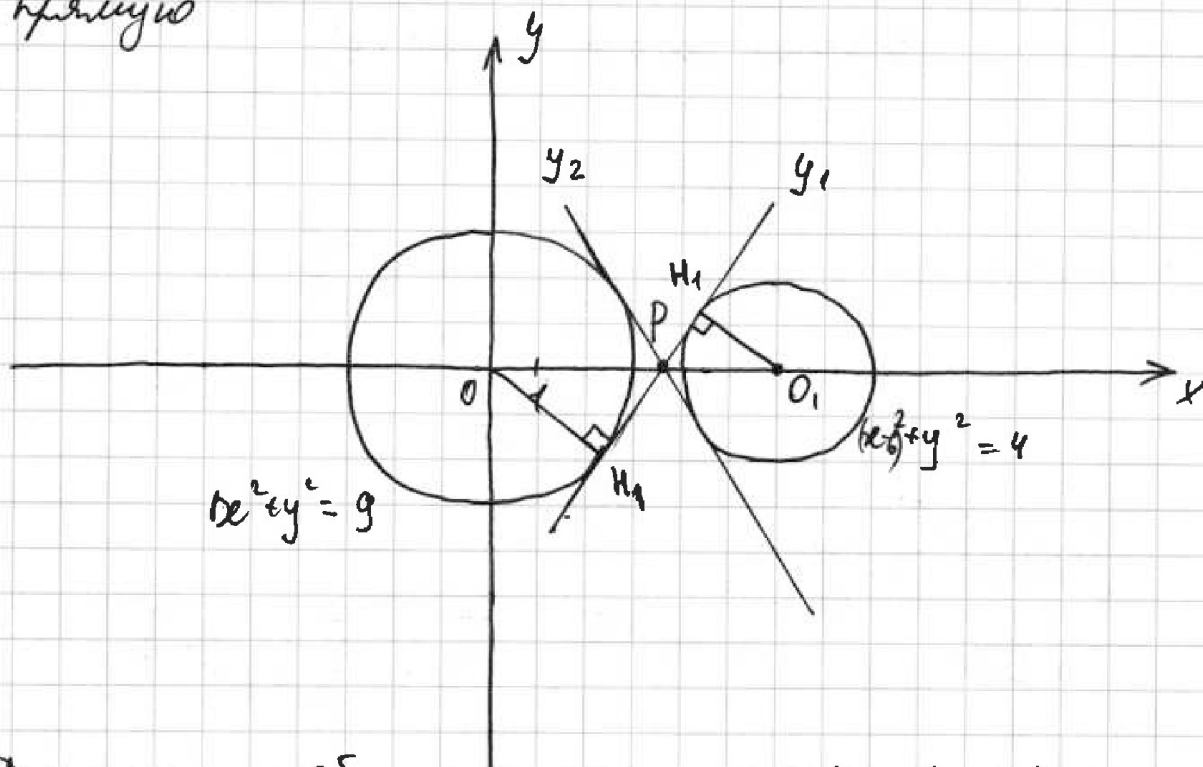
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b & (1) \\ x^2 + y^2 = 9 & (2) \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

В плоскости Oxy уравнения 2 и 3 задают окружности; 1 — произвольную прямую



Для того чтобы система имела 4 решения, прямая должна пересекать обе окружности. Заметим, что всякая прямая координатных

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

найти к-у прямой y_1 и y_2 и
координаты точки меньшего k_2 и
большого k_1 имеет не более 2х точек
пересечения с окружностью.

Для остальных же прямых можно
выбрать так свободной тем, что
будет и точка.

Найдём k_1 и k_2 . Проведём радиус
 $OH \perp y_1$; $OH_1 \perp y_1$; пусть $y_1 \cap O\omega = P$

$$\triangle OPH \sim \triangle O_1PH_1 \Rightarrow \frac{OP}{O_1P} = \frac{OH}{O_1H_1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Но } OO_1 = 6 \Rightarrow OP = \frac{3}{5} \cdot 6; \quad O_1P = \frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5}$$

$$H_1P = \sqrt{O_1P^2 - O_1H_1^2} = \sqrt{\frac{12^2}{5^2} - 2^2} =$$

$$= \frac{1}{5} \sqrt{12^2 - 10^2} = \frac{1}{5} \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{11}}{5}$$

$$k_1 = \frac{O_1H_1}{H_1P} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{11}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

аналогично $k_2 = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$

Получим условия знаков удовл. прямые,
т.е. что

$$-\frac{5\sqrt{11}}{11} \leq -\frac{a}{2} \leq \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$-\frac{10\sqrt{11}}{11} \leq -a \leq \frac{10\sqrt{11}}{11}$$

$$a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right) \quad \text{Ответ: } \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$\bullet \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0; x \neq 1$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_3^5 x^2} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{1}{\frac{2}{5} \log_3 x} - 8$$

$$\log_3 x = t$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8 \quad | \cdot 2t \neq 0$$

$$\text{Итого } 2t^5 + 12 = 5 - 16t$$

$$2t^5 + 16t = -7$$

$$\bullet \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^2) - 8$$

$$\text{ОДЗ: } y > 0; y \neq \frac{1}{5}$$

$$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{1}{\frac{2}{11} \log_3(5y)} - 8$$

$$\log_3(5y) = z$$

$$z^4 + \frac{2}{z} = \frac{11}{2z} - 8 \quad | \cdot 2z \neq 0$$

$$2z^5 + 16z = 11$$

$$\bullet \text{Итого } 2t^5 + 16t + 2z^5 + 16z = 0$$

$$t^5 + z^5 + 8(t+z) = 0$$

$$(t+z) p\left(\frac{t+z}{2}\right) + 8(t+z) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

где $p(t, z)$ - некоторый многочлен
4-й степени > 0 где $\forall t, z$

Можно +.к. $p(t, z) + 8 > 0$ и

$t + z = 0$ - единств. решение

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0$$

$$\log_3 5xy = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

Задача 1

$$ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}; \quad bc = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13};$$

$$ac = p \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}, \text{ где } k, m, p \in \mathbb{N}$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = \frac{k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}}{p \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}}$$

$$b^2 = \frac{km}{p} \cdot 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^{-7}$$

~~$$b = \frac{\sqrt{km}}{\sqrt{p}} \cdot 2^2 \cdot 3^{\frac{5}{2}} \cdot 5^{-\frac{7}{2}}$$~~

$$\frac{bc \cdot ac}{ab} = \frac{m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot p \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}}{k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}}$$

$$c^2 = \frac{mp}{k} \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = \frac{k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot p \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}}{m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}}$$

$$a^2 = \frac{kp}{m} \cdot 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^{27}$$

$$a^2 b^2 c^2 = \frac{kp}{m} \cdot 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^{27} \cdot \frac{km}{p} \cdot 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^{-7} \cdot \frac{mp}{k} \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$

$$a^2 b^2 c^2 = mpk \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$abc \in \mathbb{N} \Rightarrow (mpk)_{\text{н.ч.}} = 3 \cdot 5 \text{ и тогда}$$

$$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, так же, что степени
каждого множителя не могут быть
меньше чем в ab , bc , ac

Поэтому $(abc)_{\min} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{30}$

Приведем пример:

пусть $a = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{15}$
 $b = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0$
 $c = 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^{15}$

Поэтому $abc = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{30}$

$ab = 2^9 \cdot 3^9 \cdot 5^{15}$

Также заметим, что



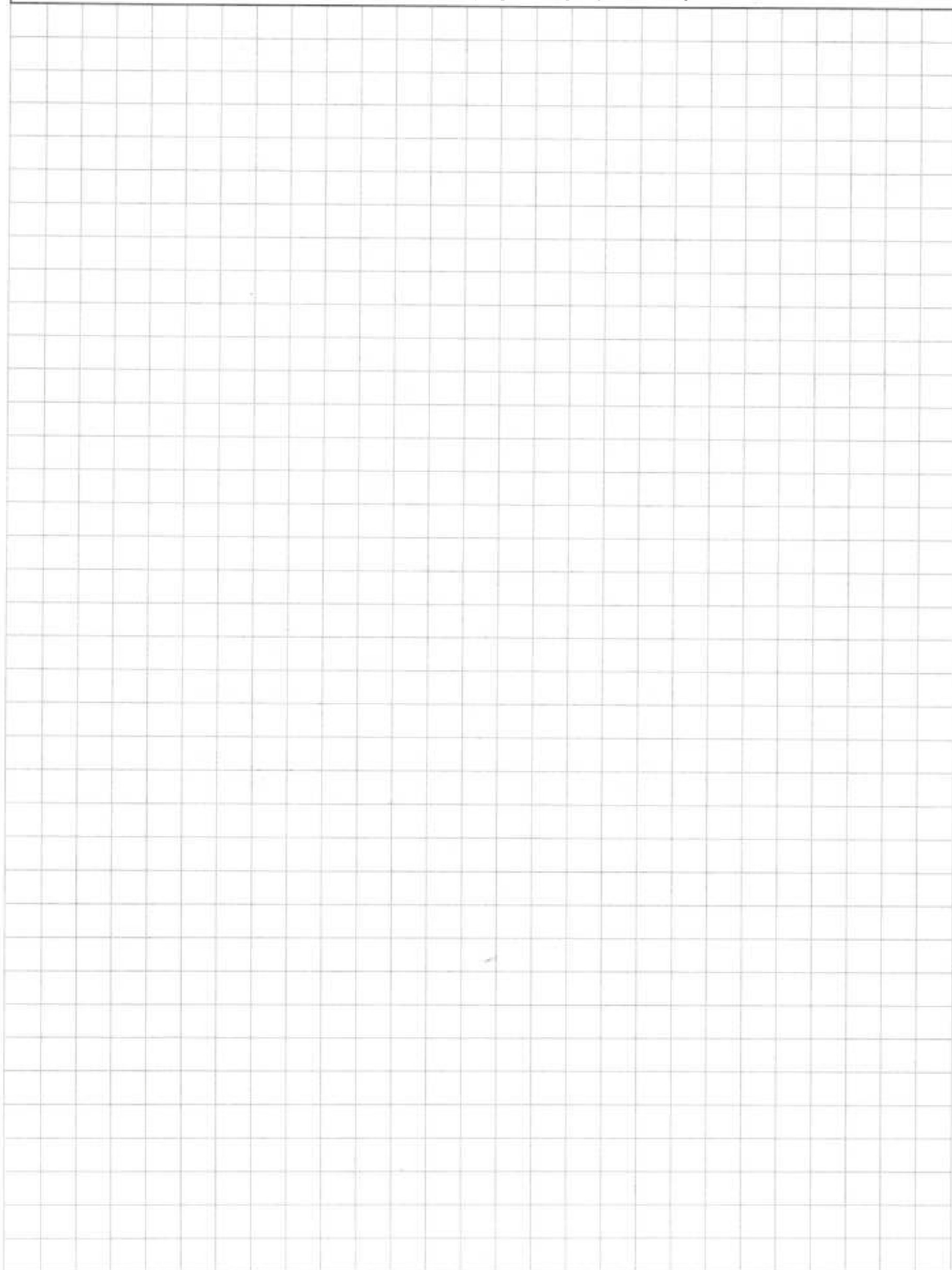
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$(y_2 - y_1) \div 3$$

$$y_2 - y_1 = 3$$

$$x_2 - x_1 = 10$$

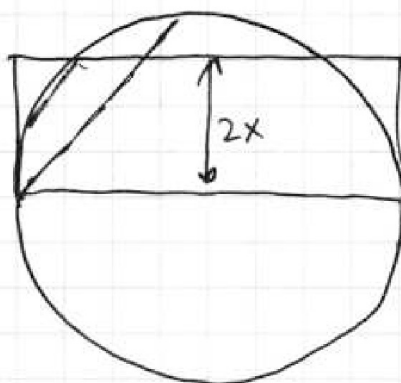
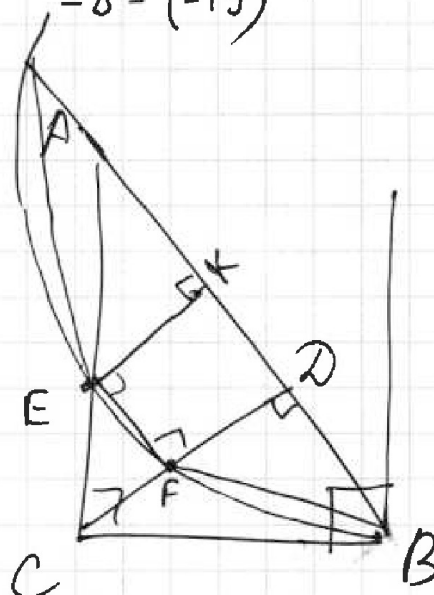
$$y_2 - y_1 = 6$$

$$x_2 - x_1 = 9$$

$$y_2 - y_1 = 9$$

$$x_2 - x_1 =$$

$$\begin{array}{cc} -19 & -8 \\ -8 - (-19) \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

☐ 1
 ☐ 2
 ☐ 3
 ☐ 4
 ☐ 5
 ☐ 6
 ☐ 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

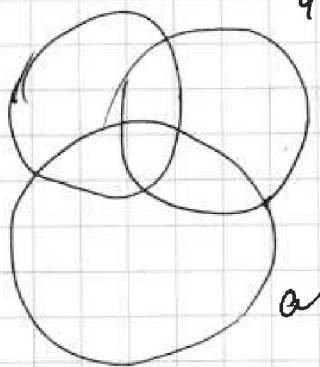
$$2^9 \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} = ab \cdot c$$

$$2(a_1 + b_1 + c_1) = 9 + 14 + 19$$

$$a = \frac{10}{13} \cdot \frac{18}{18} \cdot \frac{4}{4} = 1$$

$$b = a^6 \cdot b^5$$

$$a = \frac{28}{14} \cdot \frac{4}{2} = 8$$



	a	b	c
2	9		10
3			
5			

$$k = -\frac{1}{2} \cdot 8 = -4$$

$$25 - 19 = 6$$

$$10 + 13 - 18 = 5$$

$$10 + 13 - 30 = -7$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2$$

$$\frac{2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}}{2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}} =$$

$$b^2 = \frac{k \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}}{9 \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}} = 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{36}$$

$$b^2 = 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{36}$$

$$b = (2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{18})$$

$$\frac{2^{24}}{2^{12}} = 2^{12}, \frac{3^{21}}{3^{11}} = 3^{10}, \frac{5^{36}}{5^{18}} = 5^{18}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

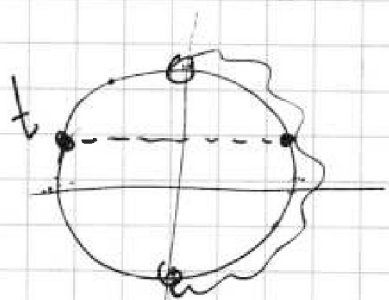
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \arcsin t \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\arcsin\left(\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$k \in \mathbb{Z}, \text{ если } \frac{\pi}{2} - x \in \text{I или IV четверти, то}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$10\pi k + 2\pi = 6x$$

$$x = \frac{5\pi k}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$-3\pi \leq$$

$$\pi \leq$$

$$k \in \mathbb{Z}, \text{ если } \frac{\pi}{2} - x \in \text{II или III четверти, то}$$

$$5\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n\right) = x + \frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

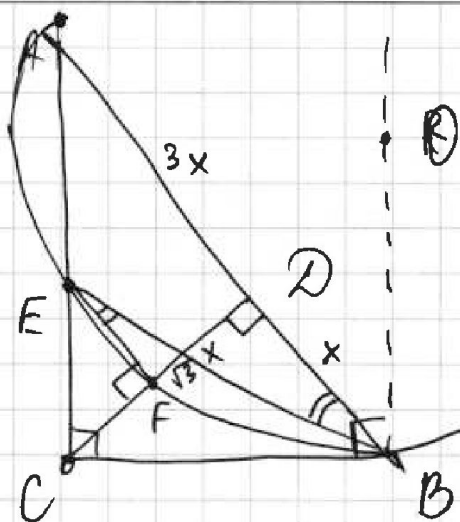
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

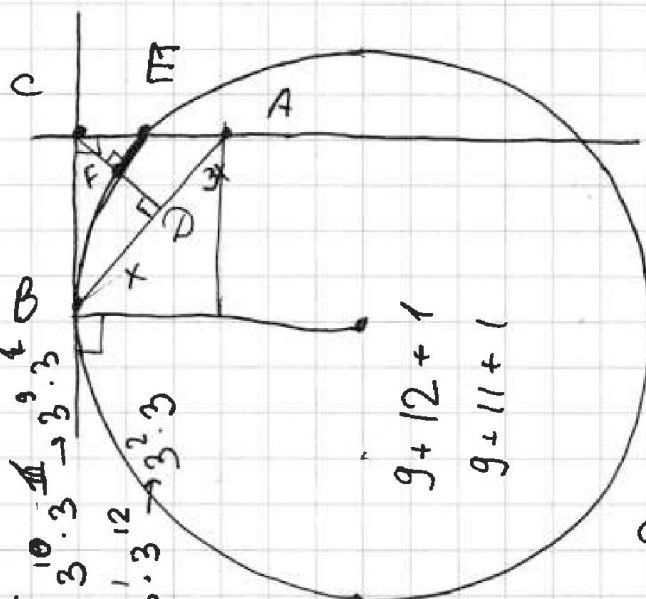
МФТИ

$$\begin{aligned}a &= 2^7 \cdot 3^9 \cdot 5^0 \\b &= 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \\c &= 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^5\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}3^2 &\rightarrow 3^{10} = 3^8 \cdot 3^2 \\&\rightarrow 3^{13} = 3^8 \cdot 3^5 \\&\rightarrow 3^{18}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ab &= 2^9 \cdot 3^9 \cdot 5^0 \\bc &= 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \\ac &= 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^5\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}2^1 &\rightarrow 2^9 = 2^8 \cdot 2^1 = 2^7 \cdot 2^2 \\&\rightarrow 2^{14} = 2^1 \cdot 2^{13} = 2^2 \cdot 2^{12} \\&\rightarrow 2^{19}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2^{10} &\rightarrow 3^{10} \rightarrow 3^9 \cdot 3 \\&\rightarrow 3^{13} \rightarrow 3^{12} \cdot 3 \\&\rightarrow 3^{18}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_a b} &= \log_b a \\ \log_a b \cdot \log_b a &= 2 \cdot \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ab &= 2^9 \cdot 3^9 \cdot 5^0 \\bc &= 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \\ac &= 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^5\end{aligned}$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = \frac{2^9 \cdot 3^9 \cdot 5^0 \cdot 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0}{2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^5}$$

$$\begin{aligned}b^2 &= 2^4 \cdot 3^0 \\b^2 &= 2^4\end{aligned}$$