



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Так как $ab : 2^{15} \cdot 7^{17}$ то $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{17}$

где k - натуральное число. Так как

$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$ то $bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$ где m - натуральное

число. Так как $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$ то $ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$

где n - натуральное число:

$$\begin{cases} ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{17} \\ ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \\ bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 7^{58} \cdot k \cdot n \cdot m \\ (abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{58} \cdot k \cdot n \cdot m \end{cases}$$

так как квадрат натурального числа
содержит в своём разложении все делители
в чётных степенях то $(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{58} \cdot \frac{k \cdot n \cdot m}{2}$

если abc наименьшее то и $(abc)^2$ - наимень-
ший, а значит $\frac{1}{2} \cdot 2^{56} \cdot 7^{58} \cdot \frac{k \cdot n \cdot m}{2}$ - наименьшее.
а наименьшее оно при $k \cdot n \cdot m$ равно 1 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{58} \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{29} \text{ так как по} \\ \text{условию } a, b, c - \text{натуральны} \Rightarrow abc > 0$$

Ответ: ~~$abc = 2^{28} \cdot 7^{58}$~~ $2^{28} \cdot 7^{29}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 4x$$

~~возведем в кв~~

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

Задача 2

Если дробь $\frac{a}{b}$ - несократима то у

a и b нет общих простых делителей, а
это означает что $a+b$ и ab - взаимнопросты

так как ab - делится ровно на те простые
делители в которые входят в состав a и b , а
 $a+b$ не может делиться ни на 1 простое число что
входило в состав a или b так как в
обратном случае будет следовать что если
1 число делится и их сумма делится то и
2 число обязательно делится, тогда $\frac{a}{b}$ можно
будет сократить. Поэтому $a+b$ и ab -
взаимнопросты. пусть $a+b=k$ $ab=n$

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 4ab} = \frac{k}{k^2 - 4n}$$

если эту

дробь можно сократить то k делится на то
на что делится $k^2 - 4n$. Попробуем это сделать.
Эти числа могут делиться только на 1
так как k и n - взаимнопросты. Пусть k и $k^2 - 4n$
кратно какому то числу x отличному от 1. $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 > 1$.
тогда $k \div x$ $k^2 - 4n \div x$ тогда $4n \div x$ $4/x \Rightarrow n \div x$ тогда
 k и n не взаимнопросты $\Rightarrow$ не может быть больше 1 числа x

Ответ: $n=9$ Корресп.

$a=2$ $b=7$ $\frac{9}{4-9+49} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$
2 из 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

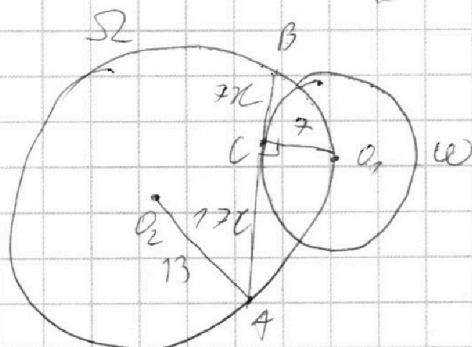
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3



Дано:
радиус $W = 7$

радиус $S_2 = 13$

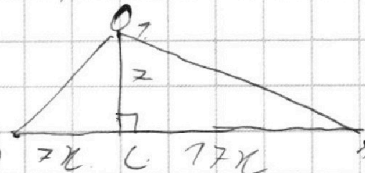
$$\frac{AC}{CB} = \frac{17x}{7}$$

AB - касательная
к W

O_1 - центр окружности W $AB \perp O_1B$

$O_1C \perp AB$ так как как угол между касательной
и радиусом проведенным к точке касания.

$\triangle AO_1B$ - вписан в S_2



Пусть $BC = 7x$ тогда $AC = 17x$

Из теоремы Пифагора $BO_1 = \sqrt{49x^2 + 49}$ $O_1A = \sqrt{289x^2 + 49}$

$$\sin \angle BO_1C = \frac{BC}{BO_1} \quad \sin \angle AO_1C = \frac{AC}{O_1A} \quad \cos \angle BO_1C = \frac{CO_1}{BO_1} \quad \cos \angle AO_1C = \frac{CO_1}{O_1A}$$

$$\sin \angle BO_1A = \sin(\angle BO_1C + \angle AO_1C) = \frac{7x}{\sqrt{49x^2 + 49}} \cdot \frac{17}{\sqrt{289x^2 + 49}} +$$

$$+ \frac{17x}{\sqrt{289x^2 + 49}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49x^2 + 49}} \quad \sin \angle BO_1A = \frac{24x}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{289x^2 + 49}}$$

O_2 - центр S_2

$$2O_2A = \frac{BA}{\sin \angle BO_1A} \quad 26 = \frac{24x}{\frac{24x}{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{289x^2 + 49}}} \quad 26 = \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{289x^2 + 49}$$

$$676 = 289x^2 + 49x^2 + 289x^2 + 49 \quad t = x^2 \Rightarrow 626$$

$$626 = 289t^2 + 49t + 289t + 49 \quad t = 1 \quad t = -1 - \frac{38}{289} \quad \text{т.к. } t \geq 0 \quad t = 1$$

$$t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad x \geq 0 \quad \text{т.к. это расстояние}$$

$$AB = 24x = 24. \quad \text{Ответ: } 24.$$

3439

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \neq 0 \\ 1 - 9x = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ 1 - 9x \neq 0 \\ 1 - 9x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} 1 - 9x = 0 \\ 1 = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \neq \frac{1}{9} \\ 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \neq \frac{1}{9} \end{cases} 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \neq 3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 = 8x + 2$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \neq \frac{1}{9} \end{cases} \begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{12}}{6} + 1 \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \neq \frac{1}{9} \end{cases} \begin{cases} -2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = -9x \\ 4(3x^2 + 3x + 1) = -81x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{12}}{6} + 1 \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \neq \frac{1}{9} \end{cases} 12x^2 - 69x + 4 = 0$$

$$D = 69^2 - 4 \cdot 12 \cdot 4 = 4569$$

$$x_{1,2} = \frac{69 \pm \sqrt{4569}}{24}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{12}}{6} + 1 \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{12}}{6} \\ x \neq \frac{1}{9} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{69 + \sqrt{4569}}{24} \\ x = \frac{69 - \sqrt{4569}}{24} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{69 + \sqrt{4569}}{24}$
4. из 9

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

Заметим что каж. пара точек принадлежащих 2 разным
прям. может принадлежать им 2 разным
букв. $y = -2x + b$ или b этих 2 прямых
отличаются. равно на 7. (любые 2 точки
на прямой так как если y их одинаковы
 y координаты то x y их отличаются
равно на 7 а следовательно $2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 7$
 $2 \cdot 7 + 0 = 14$, ну а если мы идем по этой
прямой то с добавлением 2 y (а x увели-
чивается на 7) ~~значит количество~~
при этом B всегда есть на прямой
с координатой b . Значит количество
пар точек пар точек это количество
способов выбрать пару точек на
2 прямых умноженное на число
способов выбрать пару прямых.

Всего в нашей сетке параллельно
10 пар точек прям. y или x
выбрав на 7 пар точек B по y
на 7 пар точек B по x
на 7 пар точек B по x и 13 или 14 способов
а на другой прямой для точек x
по 13 или 14 точек, но если на
одной 13 точек то на другой будет
только 14 точек так как в отрезке
на 7 значит всего 13 способов
это: $14 \cdot 13 \cdot 10 + 13 \cdot 13 \cdot 10$

способов выбрать пару точек
прямых
 ~~$14 \cdot 13 \cdot 10 = 1820$ способов~~

Ответ: 1820 способов выбрать пару
 A, B

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

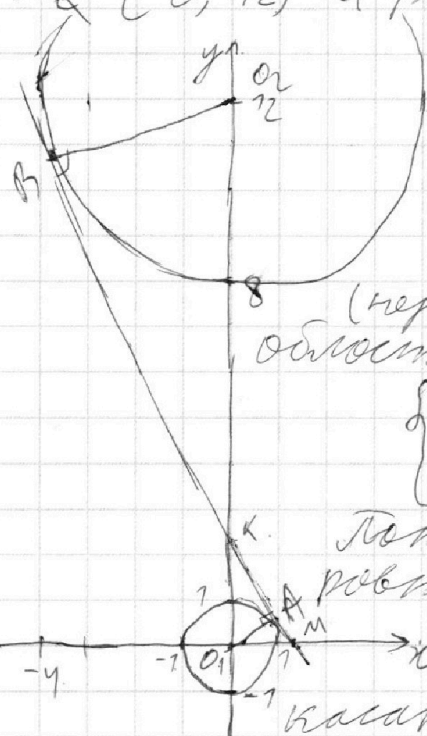
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$
Оно верно в 2 кругах на координатной

плоскости x, y первый круг с центром в $(0, 0)$
и радиусом 1, а второй круг с центром в
 $(0, 12)$ и радиусом 4. Пусть обозначим
с центром в $(0, 0)$ это Ω а
с центром в $(0, 12)$ это Ω_2



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

(неравенство выполняется в
областях ограниченных Ω и Ω_2)

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Понятно что у этой системы
ровно 2 решения когда прямая
 $y = -ax + 8b$ является общей

касательной к Ω и Ω_2

тогда: ~~какая эта система тогда имеет~~
самое малое ~~число решений~~ ~~первая система~~

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{вторая система}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ (y - 12)^2 + x^2 = 16 \end{cases}$$

у обеих этих систем дано по 1
решению. решения их по единственности
далее ни на образе. 5 из 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + a^2x^2 - 16abx + 64b^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2(1+a^2) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0 \quad 256(ab+b-a-1)$$

$$D = 256a^2b^2 - 256(b)(1+a) = 256a^2b^2 - 256b - 256ab =$$

$$= 256a^2b^2 - 256b - 256ab - 256(ab+b-a-1)$$

так как у системы должно быть 1 решение

$$D = 0 \quad 256a^2b^2 - 256b - 256ab = 0 \quad a^2b^2 - ab - b + a + 1 = 0$$

$$a^2b^2 - b - ab = 0$$

$b = 0$ очевидно при $b = 0$ у этой системы

Более 1 решение

$$a^2b^2 - a - 1 \neq 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (y-12)^2 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{8b-y}{a} \\ \frac{64b^2 - 16by + y^2}{a^2} + y^2 - 24y + 144 = 16 \end{cases}$$

$D = 0$ так как у системы одно решение

$$y^2(1 + \frac{1}{a^2}) - y(\frac{16b}{a^2} + 24) + \frac{64b^2}{a^2} + 144 - 16 = 0$$

$$(\frac{16b}{a^2} + 24)^2 - 4(1 + \frac{1}{a^2})(\frac{64b^2}{a^2} + 128) = 0$$

$$(\frac{16b}{a^2} + 24)^2 = 4(\frac{a^2+1}{a^2})(\frac{64b^2}{a^2} + 128)$$

$$a^2b^2 - ab - b + a + 1 = 0$$

$$a^2b^2 - ab - b + a + 1 = 0 \quad a^2b^2 - a(b-1) - b + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 2b + 1 - 4b^2(-b+1)$$

Пусть эта касательная касается. Ответ

и.с. в. В пусть O_1 - центр ω и O_2 - центр Ω

$AO_1 = 4$ как радиус $BO_2 = 4$ как радиус

Пусть K - точка пересечения AB и OY

Пусть $O_2K = x$ тогда $O_1K = 12 - x$ (Потому

что A, O_1, B

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle O_2 BK = 40$ (как между касательной и радиусом
к точке касания).

$\angle O_1 AK = 40$ (как между касательной и радиусом
к точке касания)

Из теоремы Пифагора укл. $\triangle O_2 BK \triangle O_1 AK$.

$$AK^2 = (12-x)^2 - 1$$

$$BK^2 = x^2 + 16$$

Вычисляем. Сперва точки К. Вычисляем OK .

$$BK^2 = (KO_2 - 4)(KO_2 + 4)$$

$\triangle BO_2 K$ подобен $\triangle AOK$ ($\angle O_2 BK = \angle O_1 AK$
 $\angle BKO_2 = \angle AOK$ как вертикальные).

$$\frac{BO_2}{AO_1} = \frac{OK}{OK} \quad \frac{4}{1} = \frac{x}{12-x} \quad x = 4.8 - 4x$$

$$5x = 48 \quad x = 9.6 \text{ точки.}$$

координаты К это $(0, 2.4)$. Пусть это бы
прямая $y = -ax + 8b$ проходила через
касательной к ω и OK она должна проходить через
 $(0, 2.4)$ и касаться ω в точке К.

если $y = -ax + 8b$ касательная к ω то
система $\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет 1 решение.

$x^2 + (8b - ax)^2 - 1 = 0$ так как $y = -ax + 8b$ проходит
через $(0, 2.4)$ то $2.4 = 8b \quad b = 0.3$

$$x^2 + (8b - ax)^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1 = 0$$

$$x^2(1+a^2) - 16abx + (64b^2 - 1) = 0$$

$D = 0$ т.к. у системы 1 решение

$$D = 256a^2b^2 - 4(1+a^2)(64b^2 - 1) = 0$$

$$64a^2b^2 = 64b^2 - 1 + 64a^2b^2 - a^2$$

$$64 \cdot 0.09 \cdot a^2 = 64 \cdot 0.09 - 1 + 64 \cdot 0.09 \cdot a^2 - a^2$$

$$a^2(64 \cdot 0.09 + 1 - 64 \cdot 0.09) = 64 \cdot 0.09 - 1$$

$$a^2 = \frac{64 \cdot 0.09 - 1}{64 \cdot 0.09 + 1 - 64 \cdot 0.09} \quad a^2 = \frac{64 \cdot 0.09 - 1}{64 \cdot 0.09 + 1 - 64 \cdot 0.09}$$

7 из 9

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Тогда из теоремы Пифагора.

$$KA = 25 \quad KA^2 = 5,76 - 1 \quad KA = \sqrt{4,76}$$

$\triangle O_1AK$ подобен $\triangle MO_1K$. (где K - точка пересечения AB с OX). $\angle KO_1M = \angle O_1AK = 90^\circ$ ($\angle O_1AK$ - острый).

$$\frac{O_1A}{MO_1} = \frac{AK}{O_1K} \quad \frac{1}{MO_1} = \frac{\sqrt{4,76}}{2,4} \quad MO_1 = \frac{2,4}{\sqrt{4,76}}$$

Угол наклона прямой $y = -ax + 68$.
Угол наклона касательной этой прямой равен $-a$. Также эта прямая совпадает с AB поэтому с другой стороны угла наклона этой прямой это $\frac{O_1K}{O_1M}$.

$$-a = \frac{1 \cdot \sqrt{4,76}}{2,4} \quad a = -\frac{\sqrt{4,76}}{2,4}, \text{ но так}$$

как AB может быть симметрична относительно OX a может быть равно $\frac{\sqrt{4,76}}{2,4}$.

$$\text{Ответ: } a = \frac{\sqrt{4,76}}{2,4} \quad a = -\frac{\sqrt{4,76}}{2,4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

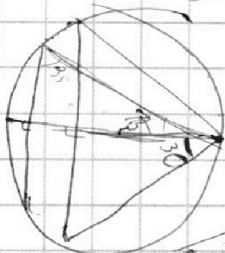
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4+4+5=13 \text{ ш}$$

8 ш

5 ш

24

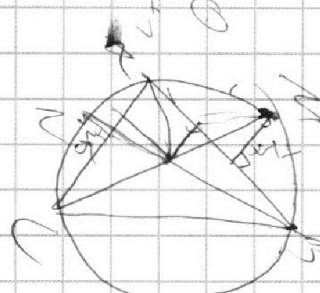
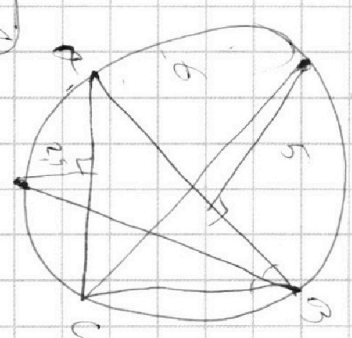


$$4(3x^2 + 3x + 1) = 87x$$
$$12x^2 + 12x + 4 = 87x$$
$$12x^2 - 68x + 4 = 0$$

$$1 - 9x = (1 - 9x) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right)$$
$$1 = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$
$$1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$
$$1 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 1 = 3x^2 + 3x + 1$$
$$2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x - 1$$
$$3 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x$$
$$3 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x(x + 1)$$
$$3 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x$$
$$3 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x$$
$$3 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x$$

$$6x^2 = 3x + 1$$
$$6x^2 - 3x - 1 = 0$$
$$6x^2 - 3x - 1 = 0$$

8 ш



$$1 - x = 1$$
$$x = 0$$

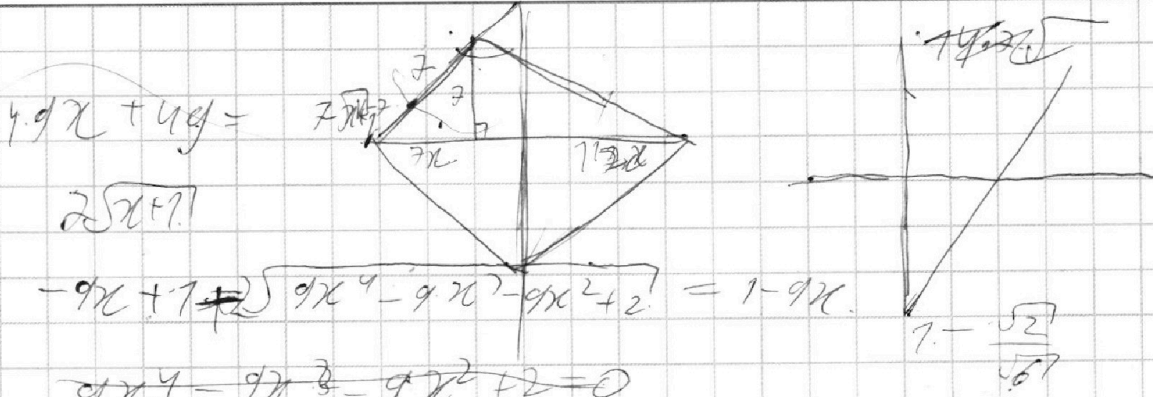
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{17}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a^2 b^2: 2^{30} \cdot 7^{58}$$

$$abc: 2^{28} \cdot 7^{29}$$

2

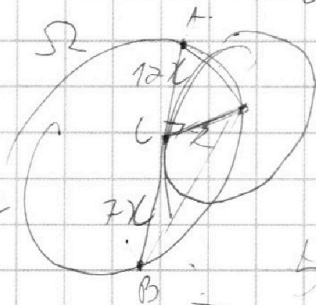
$$a+b=15$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

а...

$$\begin{array}{r} 64 \\ 64 \\ \hline 627 \\ 419 \\ \hline 9767 \end{array}$$



2

$$\begin{array}{r} 16 \\ 68 \\ \hline 544 \\ 408 \\ \hline 5444 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5444 \\ 77 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$\sqrt{3} \sqrt{3} \sqrt{3} \sqrt{3}$$

4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 7 - 9x$$

$$\sqrt{(\sqrt{3}x - \sqrt{3})^2 - 1} - \sqrt{(\sqrt{3}x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}}$$

N

$$15+40$$

$$75+15+23$$

$$77+18+39$$

1

$$\frac{76}{72}$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ 1767-70 \\ \hline 792 \\ 4369 \end{array}$$

4

$$15-23$$

$$6x$$

N 2

$$\frac{76}{72}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$7-9x \neq 0$$

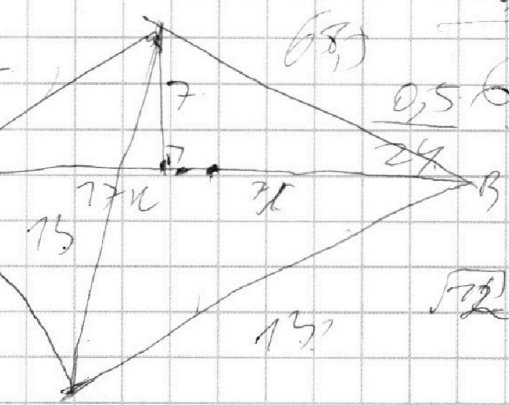
in

$$\frac{87}{24}$$

$$x - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 9x$$

$$12x^2 - 24x$$

$$\frac{87}{24}$$



1

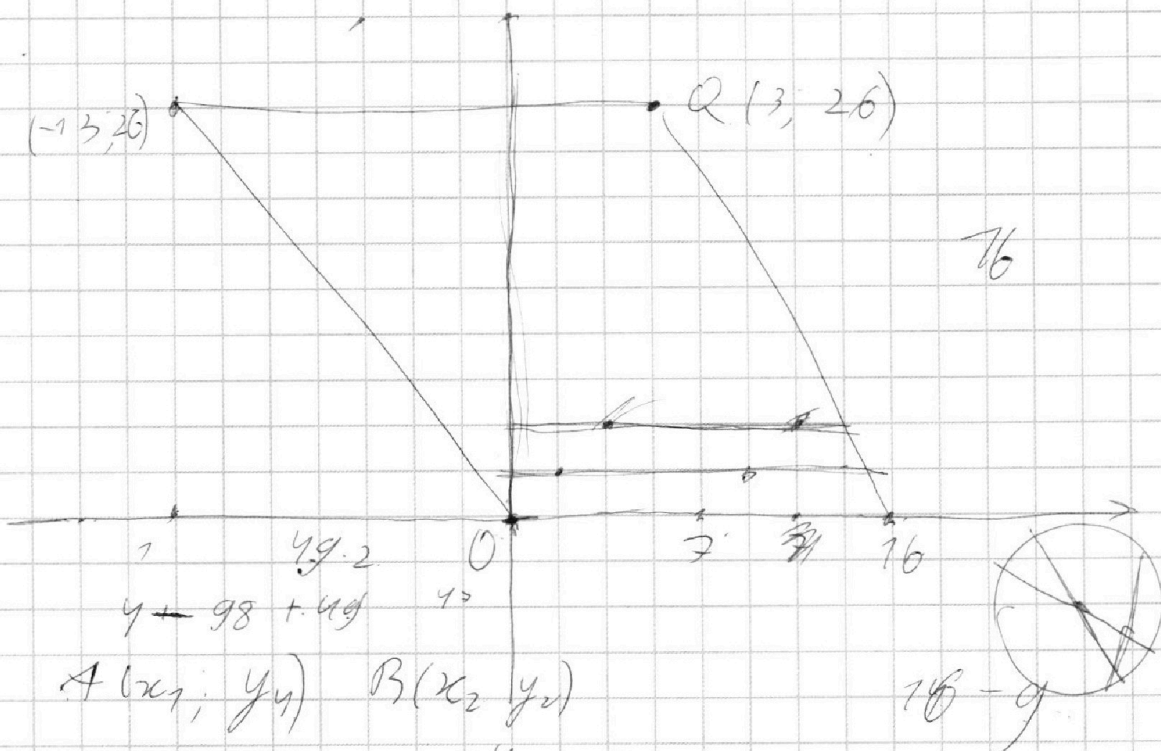
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

$$3x^2 + 3x + 2 \geq 0$$

$$D = 9 - 12 = (3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 7) =$$

$$= 9x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2 =$$

$$= 9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

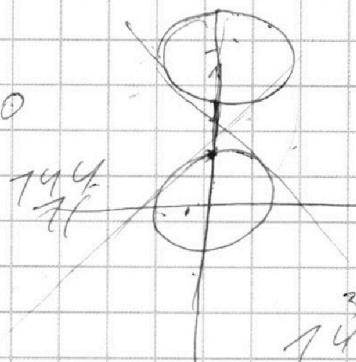
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 24 \\ \hline 90 \\ 118 \end{array}$$

$$123 x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$4 \quad 6 \quad 7$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ 144 \\ 26 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$570 \quad ax + y - 8b = 0 \quad ax - 8b = y$$

$$64a^2b^2 = (1 + a^2)(64b - 1) \quad y = -ax + 8b$$

$$64a^2b^2 = 64b - 1 + 64ba^2b^2 = a^2$$

$$64x^2 = 64b - 1 + 64bx + x$$

$$2,4 \quad 506$$

$$\sqrt{4,76}$$

$$1,1$$

$$2,4 = 8b$$

$$b = 0,3$$

$$(b - 1)(1 + a)$$

$$b + ab - 1 - a$$

$$ab + b - a - 1$$

$$14$$

$$64$$

$$281$$

$$19,2$$

$$18,2$$

$$\begin{array}{r} 426 \\ 4 \\ \hline 1719 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 2,4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 426 \\ 4 \\ \hline 1719 \end{array}$$

$$2 \sqrt{1719}$$

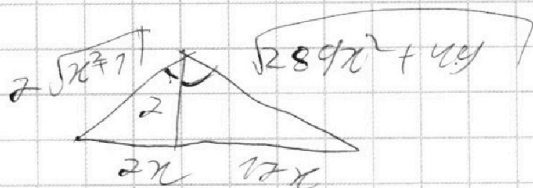
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \\ 24 \\ \hline 48 \\ 570 \end{array}$$

$$526x^2 = 49x^2 + 49 + 289x^2 + 49 - 2 \cdot \sqrt{49x^2 + 49} \cdot \sqrt{289x^2 + 49} - 2$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 26 \\ 289 \\ \hline 289 \\ 49 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$234x^2 = 98 - 2$$

$$60 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{17x}{\sqrt{289x^2+49}} \quad \frac{24}{289x^2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{289x^2+49}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{17x}{\sqrt{289x^2+49}}$$

$$= \frac{24x}{\sqrt{x^2+1} \sqrt{289x^2+49}} \quad \frac{24x}{24x} = 2R$$

$$\sqrt{x^2+1} \sqrt{289x^2+49} = 26$$

$$(x^2+1)(289x^2+49) = 676$$

$$289x^4 + 49x^2 + 289x^2 + 49 = 676$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 289 \\ 8338 \\ \hline 622 \end{array}$$

$$289t^2 + 338t = 622 - 338$$

$$\begin{array}{r} 622 \\ 51 \\ \hline 112 \end{array} \quad \begin{array}{r} 338 \\ 289 \\ \hline 102 \end{array}$$

$$1+x = -3$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ 17 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 17 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1520 \\ 120 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

