



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$n1 \quad ab : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}; \quad bc : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}; \quad ac : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33};$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 : 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}; \quad \text{Поэтому } abc : \sqrt{2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}};$$

- поскольку  $a^2 b^2 c^2 = (abc)^2$ ,  $\Rightarrow$  все его делители - также квадраты;

Значит,  $abc : 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$ ; - в силу натуральности  $a, b, c$  берём большую степень для тройки;

Подберём степени "2", "3", "5" для  $a, b, c$ ;

Для "2": т.к.  $bc : 2^{12}$ ,  $ac : 2^{14}$ ,  $ab : 2^8$ ,  $\Rightarrow$

$$\frac{ac}{bc} : \frac{2^{14}}{2^{12}} = 2^2; \Rightarrow \frac{a}{b} : 2^2; \quad \text{Пусть пусть } b : 2^x, \Rightarrow a : 2^{x+2};$$

$$\Rightarrow ab : 2^{2x+2} \geq 2^8; \quad (\text{из-за того, что } ab : 2^8), \Rightarrow x \geq 3;$$

$$\text{Тогда } x_{\min} = 3 \Rightarrow \text{или } x_{\min} : a : 2^5, b : 2^3, c : 2^3;$$

Для "3" проделаем аналогичные действия:

$$bc : 3^{20}, ac : 3^{21}, \Rightarrow \frac{a}{b} : 3^1; \quad \text{Пусть } b : 3^y, \Rightarrow a : 3^{y+1};$$

$$\Rightarrow ab : 3^{2y+1} \geq 3^{14}, \Rightarrow y \geq \frac{13}{2} - \text{в силу натуральности } a, b, c \text{ возьмём } y = 7; \Rightarrow a : 3^8, b : 3^7, \Rightarrow c : 3^{13};$$

Аналогично для "5": Пусть  $b : 5^z, \Rightarrow a : 5^{2z+2}$ ;  $ab : 5^{2z+2} \geq 5^{12}$ ;  
 $\Rightarrow z \geq 0$ ; Возьмём  $z_{\min} = 0$ ;  $b : 5^0 = 1$ ,  $a : 5^{12}$ ,  $\Rightarrow c : 5^{27}$ ;

$$\text{Значит, } a : 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}, b : 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^0, c : 2^3 \cdot 3^{13} \cdot 5^{27};$$

$$\Rightarrow \text{для минимизации пусть } a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}, b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^0, c = 2^3 \cdot 3^{13} \cdot 5^{27}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}; \quad (\text{это делится на } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34});$$

$$\text{Ответ: } abc_{\min} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39};$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

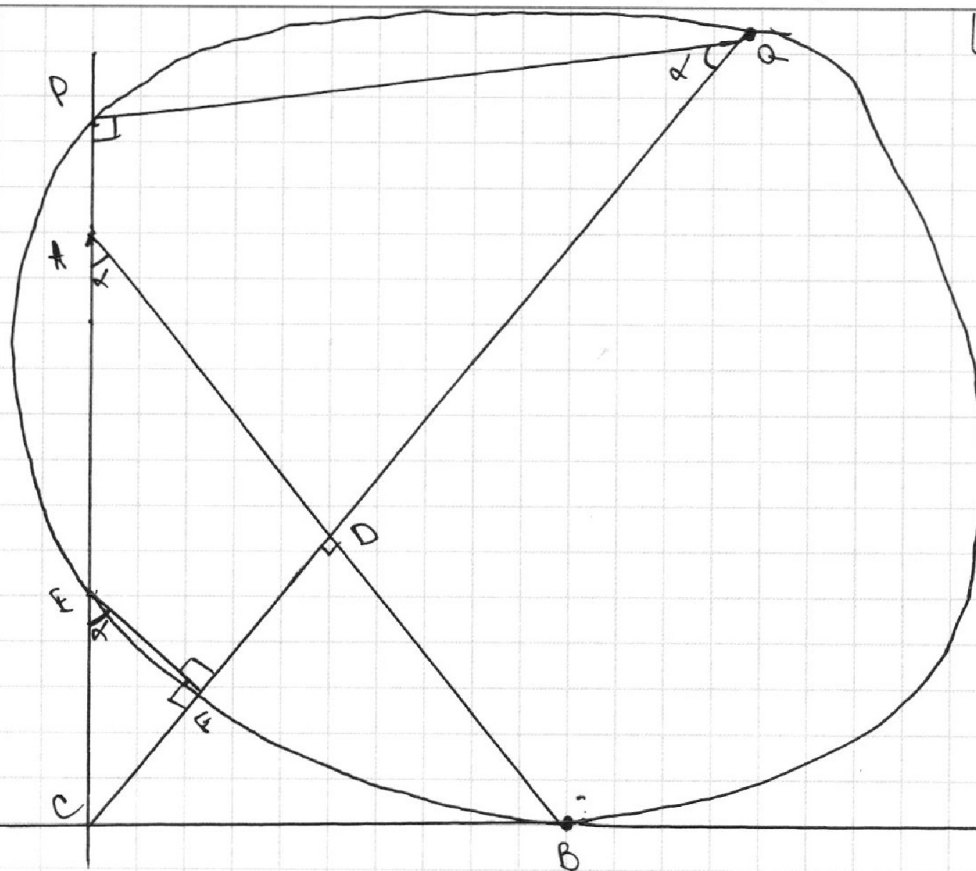
|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



стр. 1 решение



1. ~~AB~~  $CD^2 = AD \cdot BD = 10t^2$  — при  $BD = 2t$ ,  $AD = 5t$ ;

$CD = t\sqrt{10}$ ;

$AC = t\sqrt{35} = \sqrt{AB \cdot \frac{AD}{BD}}$ ,  $BC = 4\sqrt{14} = \sqrt{AB \cdot BD}$ ;

2. Пусть  $\angle A = \alpha$ ,  $\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$ ;  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{35}}{7}$ ;  $\tan \alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$ ;

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ABE}}{S_{ACD}} \cdot \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{10t}{\sqrt{35}t}\right)^2 \cdot \frac{EF^2}{AD^2} = \frac{20}{7} \cdot \left(\frac{EF}{AD}\right)^2$ ;

Пусть  $EF = 5z$ ,  $\Rightarrow \frac{EF}{AD} = \frac{z}{t}$ ;

3. Продлим CA до перес. с окруж. в P, CD до перес. с окр. в Q;

т.к.  $\angle EFD = 90^\circ$ , ~~и~~ четырех. FEPQ — вписанный,  $\Rightarrow \angle EPQ = 90^\circ$ ;

4. По теореме об отрезках секущих и отрезке касат.:  $CE \cdot CB = CB^2 = 14t^2$ ;

$\sqrt{35}t \cdot CP = 14t^2$ ;  $\Rightarrow CP = t \cdot \frac{14}{\sqrt{35}}$ ; Заметим, что  $\triangle CPQ \sim \triangle CEF$  (и  $\triangle ABC$ )  
 $\angle PQC = \alpha$ ; (см. решение на стр. 2 решения)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. П.н.  $\lg \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$  и  $\lg \alpha = \frac{PC}{PQ}$ ,  $\infty$   $PC = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot 2\sqrt{14}t = 2 \cdot \sqrt{\frac{28}{5}}t =$  сп. 2 решения  
 $= \frac{14t^2}{\sqrt{35}z}$   $\sqrt{28}t = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{t}{z}$ ;  $\frac{t}{z} = 2, (\Rightarrow zt = \frac{1}{2})$

Ответ:  $\frac{20}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{9}$ ;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x;$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{1}{10}(\pi - 2x);$$

$$(I) \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \right. \text{ для левой части};$$

$$(II) \left\{ -1 \leq \cos x \leq 1 \right. \text{ для правой части}$$

(II) - ограничение выполняется всегда;

Возьмём синус от левой и правой частей:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right);$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \Rightarrow$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right); \text{ Пусть } t = \frac{\pi}{5} - x; \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\sin 5t = \sin t;$$

$$\sin 5t - \sin t = 0;$$

$$2 \sin 2t \cos 3t = 0;$$

$$\begin{cases} 2t = \pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ 3t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6};$$

$$\begin{cases} t = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; \text{ и } \frac{\pi}{6};$$

Вернёмся к переменной  $x$ :

$$\frac{\pi}{5} - x = -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6};$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{5} - x = -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{\pi}{5} - x = 0; \\ \frac{\pi}{5} - x = \frac{\pi}{2}; \\ \frac{\pi}{5} - x = -\frac{\pi}{6}; \\ \frac{\pi}{5} - x = \frac{\pi}{6}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = -3\pi; \\ -x = -\frac{\pi}{2}; \\ -x = 2\pi; \\ -x = -\frac{4\pi}{3}; \\ -x = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3\pi, \\ x = \frac{\pi}{2}, \\ x = -2\pi, \\ x = \frac{4\pi}{3}, \\ x = -\frac{\pi}{3}; \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi;$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$нч \begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 - 20y + 100 < 36; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2; \end{cases} \end{cases}$$

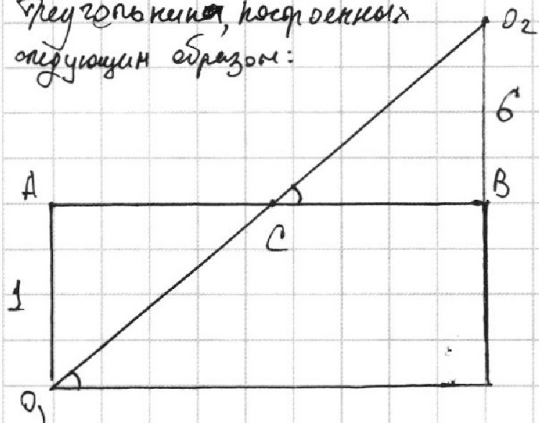
Совокупность задаёт окружности с центрами  $O_1(0;0)$  и  $O_2(0;10)$  и соответствующими радиусами  $R_1=1$  и  $R_2=6$ ;

Прямая  $m: ax - 3y + 4b = 0$ ; — должна для выполнения условия пересечь окружности ровно дважды. Для этого найдём крайние положения касательной общей обоим окружностям;

Точки касания  $A$  и  $B$ , точка пересечения  $O_1O_2$  с  $AB$  —  $C$ ;

Рассмотрим два верт. треугол.

Треугольнички, построенные следующим образом:



$$O_1O_2 = 10, AO_1 + O_2B = 7;$$

$$\Rightarrow AB \text{ по П. Пиф.} = \sqrt{100 - 49} = \sqrt{51};$$

Нам нужен тангенс угла  $\angle CO_2B$ , он равен:

$$\frac{AB}{AO_1 + O_2B} = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow \text{коэффициент}$$

Угла наклона касательной должен быть по модулю

большее  $\tan \frac{\sqrt{51}}{7}$ :

$$\left| \frac{a}{b} \right| > \tan \frac{\sqrt{51}}{7};$$

$$\begin{cases} a > 3 \tan \frac{\sqrt{51}}{7} \\ a < -3 \tan \frac{\sqrt{51}}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 3 \tan \frac{\sqrt{51}}{7} \\ a < -3 \tan \frac{\sqrt{51}}{7} \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty; -3 \tan \frac{\sqrt{51}}{7}) \cup (3 \tan \frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x} 625 - 3, \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3; \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y \neq 1, \\ x \neq \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 2x} - 3; \\ \log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 y} - 3; \end{cases}$$

Пусть  $\log_5(2x) = \alpha$ ,  $\log_5 y = \beta$ :

$$\begin{cases} \alpha^4 - \frac{3}{\alpha} = \frac{4}{3\alpha} - 3; \\ \beta^4 + \frac{4}{\beta} = -\frac{1}{3\beta} - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^4 - \frac{13}{3\alpha} + 3 = 0, \\ \beta^4 + \frac{13}{3\beta} + 3 = 0; \end{cases}$$

$$(I) \quad 3\alpha^5 + 9\alpha - 13 = 0,$$

$$(II) \quad 3\beta^5 + 9\beta + 13 = 0; \text{ Обе функции монотонны, при } \alpha = -\beta$$

уравнение (I) становится уравнением (II),

$\Rightarrow$  Единственное решение -  $\alpha = -\beta$ ; Возвращаясь к замене:

$$\log_5(2x) = -\log_5 y; \Rightarrow \log_5(2xy) = 0 \Rightarrow 2xy = 1,$$

$\Rightarrow xy = \frac{1}{2}$  - единственное возможное значение; Ответ:  $\frac{1}{2}$ ;

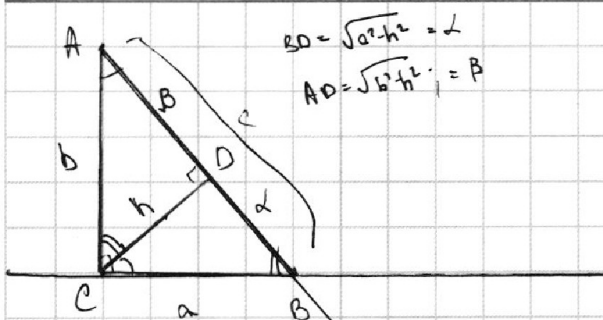
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$BD = \sqrt{a^2 + h^2} = 2$$

$$AD = \sqrt{b^2 + h^2} = 3$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CED}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

$$\frac{a}{c} = \frac{h}{b} = \frac{BD}{a}$$

$$\begin{cases} a^2 = c \cdot BD \\ a^2 = c \cdot \alpha \end{cases}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{p}{b}$$

$$b^2 = c \cdot p$$

$$36t^4 + 14t^2 = (5t + 2t)^2 = t^2(25 + 22.5 + 4)$$

$$= t^2(28 + 20) = 48t^4$$

$$48t^4 = 48t^4$$

$$\frac{1}{2} \cdot h \cdot c = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

$$h = \frac{ab}{c}$$

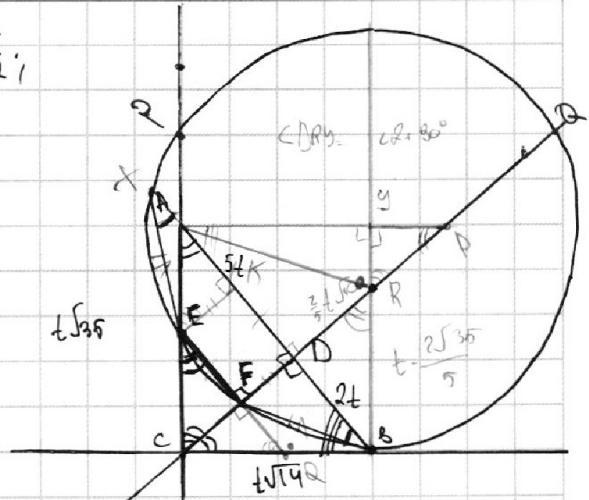
$$xk = BD$$

$$\triangle RBC \sim \triangle ABC, \frac{BC}{AC} = \frac{BR}{BC}, BC^2 = AC \cdot BR$$

$$BR = \frac{14}{\sqrt{35}} = t \cdot \frac{14}{35} = \frac{2}{5} \sqrt{35}$$

$$CR = \sqrt{14t^2 + \frac{t^2 \cdot 4 \cdot 35}{25}} = \sqrt{t^2(14 + \frac{4 \cdot 7}{5})} = \sqrt{t^2 \frac{70 + 28}{5}} = t \sqrt{\frac{98}{5}} = 7t \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$DR = 7t \sqrt{\frac{2}{5}} - t \sqrt{10} = \frac{7}{5} t \sqrt{10} - t \sqrt{10} = \frac{2}{5} t \sqrt{10}$$



$$\triangle ADC \sim \triangle CBD$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CD$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BCD}} = \frac{5}{2}$$

$$BC^2 = 7t \cdot 2t = 14t^2$$

$$BC = t\sqrt{14}$$

$$AC^2 = 7t \cdot 5t = 35t^2$$

$$AC = t\sqrt{35}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot t\sqrt{35} \cdot t\sqrt{14} = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sqrt{490}$$

$$S_{ADC} = \frac{7}{2} t^2 \cdot \sqrt{10}$$

$$CD = \frac{t\sqrt{14} \cdot t\sqrt{35}}{7t} = \frac{t^2 \cdot 7 \cdot \sqrt{10}}{7t} = t\sqrt{10}$$

$$CD = t\sqrt{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}; \quad bc: 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{12}; \quad ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}; \quad ? \min abc;$$

$$abc: 5^{33} \cdot 3^{21} \cdot 2^{14}; \quad - \text{произведение } ac \text{ также делится на } 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}.$$

Тогда для минимизации  $abc = ac, b = 1$ . Но тогда  $a = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}, b = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{12};$

- возможно, не минимальное значение;

$$\text{и } \arcsin(\cos x) = \pi - 2x;$$

$$\cos x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \Rightarrow \cos x > 0$$

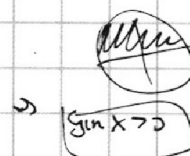


$$\arcsin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = \pi - 2x;$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \sin x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leq -\sin x \leq 0$$

$$\pi > \sin x \geq 0$$



$$\arcsin(\cos x) = \sqrt{1-x^2};$$

$$\text{и } \sqrt{1-x^2} = \pi - 2x;$$

$$\text{и } (1-x^2) = \pi^2 - 4\pi x + 4x^2;$$

$$100 - 100x^2 = \pi^2 - 4\pi x + 4x^2;$$

$$\text{и } \arcsin(\cos x) = \pi - 2x;$$

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{(2x)^3} 625 - 3 \\ \log_5^4 9 + 4 \log_9 5 = \log_{9^2} \frac{1}{5} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1/2 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ (2x)^3 > 0 \\ (2x)^3 \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \\ y^3 > 0 \\ y^3 \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{1}{3} \log_{2x} 5^4 - 3 \\ \log_5^4 9 + 4 \log_9 5 = -\frac{1}{3} \log_9 5 - 3 \end{cases}$$

$$\log_3 3 = \log_9 9 = 2 \log_3 3 = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 - \frac{1}{3} \log_{2x} 5 + 3 = 0$$

$$\log_5^4 9 + 4 \log_9 5 + \frac{1}{3} \log_9 5 + 3 = 0$$

$$\log_5^4(2x) - 4 \frac{1}{3} \log_{2x} 5 + 3 = 0;$$

$$\log_5^4 9 + 4 \frac{1}{3} \log_9 5 + 3 = 0;$$

$$\log_5 2 = a, \log_5 5 = b, \log_{2x} 5 = d, \log_9 5 = \beta;$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5 2 = \alpha; \quad \log_5 3 = \beta; \quad 2 = 5^\alpha, \quad 3 = 5^\beta; \quad 2xy = 5^{\alpha+\beta}; \quad xy = 2 \cdot 5^{\alpha-\beta}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^5 + 8 \cdot 2 - 13 = 0, \\ 3 \cdot 3^5 + 8 \cdot 3 - 13 = 0; \end{cases}$$

$$N3) \quad 10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}; \quad \text{или } -1 \leq \cos x \leq 1 \leq \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right); \quad x = t; \quad \text{! ограничения!}$$

$$\cos 5t = \sin\left(\frac{\pi}{10} - t\right);$$

або при обмеженнях:

$$x \in (-2\pi; -\frac{\pi}{3}); \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi;$$

N5) 1. Внести степени переписать логарифмы  $\rightarrow$  записать логарифмов

! Для  $2x$ : замена (везде с коэффициентом);

2. Упростить ур-е, выходящее из логарифмов - система; Менее  $(a \text{ и } b)$  или  $(a \text{ и } -b)$  - одно ур-е ~~привести~~ в форму!

3. Подстановка каждого ур-е  $\Rightarrow$  имеет 1 корень  $a = b$   $\rightarrow$  он;

4. Обратная замена, находим одну логарифмов  $\rightarrow x, y$ ; (она только одна)

$$N11) \quad ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2; \quad 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14} = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}; \quad \frac{1}{2}(14+20+21) = \frac{1}{2}(12+14+39) = \frac{-5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} - \frac{8\pi}{6} = -\frac{16\pi}{6} = -\frac{8\pi}{3}$$

$$O_1 O_2 = 10, \quad AO_1 \perp O_2 B = 7$$

$\Rightarrow AB = \sqrt{100 - 49} = \sqrt{51}$ ; Как найти тангенс угла  $\angle BO_2 B$ , он равен

$$\frac{AB}{AO_1 \perp O_2 B} = \frac{\sqrt{51}}{7};$$

$\rightarrow$  коэффициент угла наклона касательной  $a = \frac{\sqrt{51}}{7}$ ;  $|a| > \arctg \frac{\sqrt{51}}{7}$ ;

$$\Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| > \arctg \frac{\sqrt{51}}{7}; \quad \begin{cases} a > 3 \arctg \frac{\sqrt{51}}{7}, \\ a < -3 \arctg \frac{\sqrt{51}}{7}; \end{cases}$$



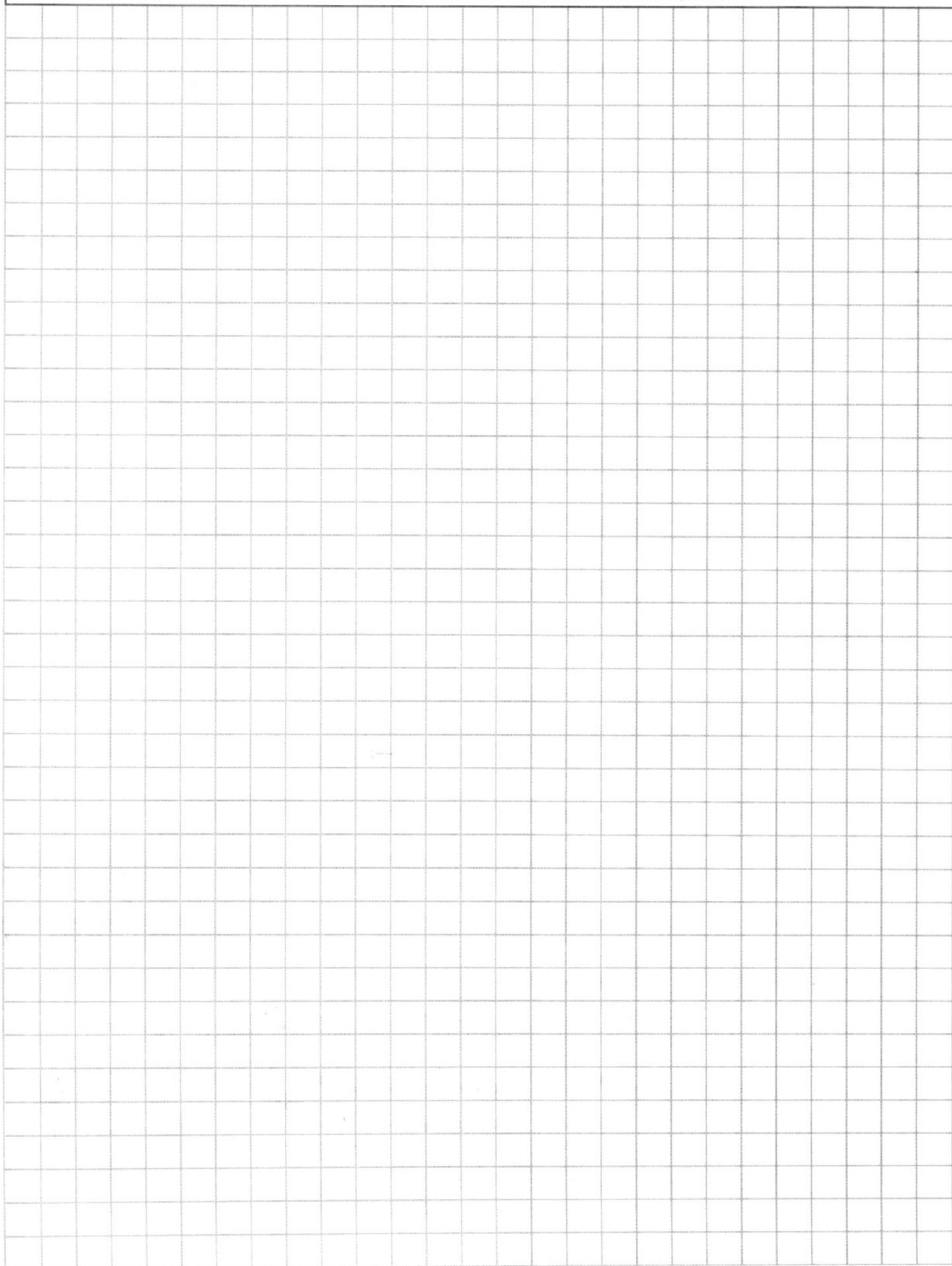
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5 y + 4\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 y} + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} \int \alpha^4 - 4\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\alpha} + 3 &= 0, \\ \int \beta^4 + 4\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\beta} + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \alpha^5 + 3\alpha - 4\frac{1}{3} &= 0, \\ \beta^5 + 3\beta + 4\frac{1}{3} &= 0; \end{aligned}$$

$$\alpha^{15} + 3\alpha - \frac{13}{3} = 0$$

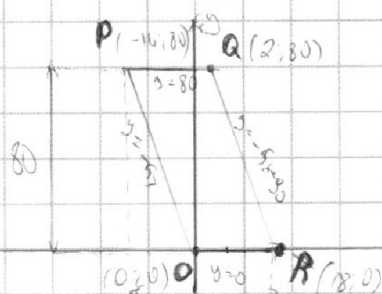
$$\begin{cases} 3x^5 + 9x - 13 = 0 \\ 3x^5 + 9x + 13 = 0 \end{cases}$$

$$P(13): 13^5 - 3 + 9 \cdot 13 - 13 \neq 0$$

$$P(15) = -3 \cdot 15^5 - 8 \cdot 13 - 15 \neq 0$$

34

дб)  $5(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1) = 45$ , по координате X макс. разница может быть 18,  
по координате y макс. разница может быть 30,



3b. 9.9a Es sei  $\vec{g}$  das vom  $P$  zu  $R$  gehende ~~Stück~~  $\vec{g} = \vec{r} - \vec{p} = 5 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 - 5 \cdot \vec{e}_3 = 5 \cdot 34 + 80 = 150 \cdot 20 + 40 = 250$   
~~Ein~~  $\vec{g} = 0$   $\vec{g} = -250$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{für } (x_2 - x_1) > 0 \quad \text{und} \quad y_2 - y_1 > 0$$

при переборе всевозможные комбинации

$$h_{\min} (x_2 - x_1) \max, \text{ so } \text{cost } t_2 - x_1 = 9$$

$y_2 - y_1 = 0, \Rightarrow$  равен на этом уровне

no 49

На <sup>дальней</sup> ~~на дальней~~ возмозной прямой

No

$$f(x)_1 = -5x + 90;$$

$$f(x)_2 = -5x;$$

$$\begin{aligned} y &\leq -5x + 80 \\ y &\geq -5x \\ y &\geq 0 \\ y &\leq 80 \end{aligned}$$

$$8(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$1 \leq x \leq 1$$

$$10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x;$$

$$\arcsin(\sin x) = x; \quad \arcsin(\cos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\boxed{-10 \leq \pi - 2x \leq 10} \quad -10 \leq 2x - \pi \leq 10 \quad \boxed{\pi - 10 \leq 2x \leq \pi + 10} \quad \boxed{\frac{\pi - 10}{2} \leq x \leq \frac{\pi + 10}{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

