



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть: $a = \alpha \cdot 3^{k_1} \cdot 7^{m_1}$; $b = \beta \cdot 3^{k_2} \cdot 7^{m_2}$; $c = \gamma \cdot 3^{k_3} \cdot 7^{m_3}$

$ab: 3^{11} \cdot 7^{11}$; $bc: 3^{16} \cdot 7^{16}$; $ac: 3^{27} \cdot 7^{38}$

$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2: 3^{11+16+27} \cdot 7^{11+16+38}$

$\Rightarrow (abc)^2: 3^{54} \cdot 7^{65}$ - степень нечетная, но т.к.

$\Rightarrow abc: 3^{25} \cdot 7^{33}$ слева квадрат целого числа +1 к степени 7

Однако $ac: 7^{38}$ (цел.) $\Rightarrow abc: 7^{38}$ $\Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$ оценка 9

$abc = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 3^{k_1+k_2+k_3} \cdot 7^{m_1+m_2+m_3}$, т.к. нужно наименьшее

натур. число $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 1$

Подберём $k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3$, чтобы условия выполнялись.

$a = 3^7 \cdot 7^{11}$; $b = 3^4 \cdot 7^4$; $c = 3^{14} \cdot 7^{27}$

Не трудно проверить, что все условия выполняются, т.к:

$\begin{cases} 7+4 \geq 11 \\ 4+14 \geq 16 \\ 7+14 \geq 21 \\ 11+0 \geq 11 \\ 11+27 \geq 38 \\ 0+27 \geq 16 \end{cases}$ все выполняется.

Причем $abc = 3^{7+4+14} \cdot 7^{11+0+27} = 3^{25} \cdot 7^{38} \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$

Оценка доказана выше.

Ответ: $abc = 3^{25} \cdot 7^{38}$ - наименьшее произведение

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a \nmid b$; $b \nmid a$, т.к. $\frac{a}{b}$ - несократима
 $\text{НОД}(a, b) = 1$

Если $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$ можно сократить на $m \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b, a^2-2ab+b^2) = m$$

$$\text{НОД}(a+b, (a+b)^2-10ab) = m$$

$$\text{НОД}(a+b, -10ab) = m$$

Заметим, что $m \nmid a$, т.к. $a+b \nmid a$ т.к. $b \nmid a$ т.к. $\frac{a}{b}$ несократ.

Заметим, что $m \nmid b$, т.к. $a+b \nmid b$, т.к. $a \nmid b$, т.к. $\frac{a}{b}$ несократ.

$\star m \leq 10$, т.к. одно из слог.: $-10ab$, причем в НОД от него идёт не a и не b , а значит 10 - макс. дел.

$\star$ Оценка: $m \leq 10$

Найдем $m=10$: при $a=7; b=3$, дробь $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ - несократима

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{7+3}{49+9-2 \cdot 21} = \frac{10}{58-168} = \frac{10}{-110}, \text{ видно, что на } m=10 \text{ можно сократить}$$

Пример дан для $m=10$

Ответ: $m=10$ - наибольшее число, на которое можно сократить дробь $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$, при $\frac{a}{b}$ - несократ. дроби.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(D) \sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

Замеча: $t = 2x^2 + x + 3$; $k = 1-4x$

$$\sqrt{t+k} - \sqrt{t} = k$$

$$\sqrt{t+k} = k + \sqrt{t} \quad |^2$$

1) Разложим (*):

$$(H) \begin{cases} t+k = k^2 + 2k\sqrt{t} + t & (*) \\ t \geq 0 \\ t+k \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k+k = k^2 + 2k\sqrt{t} + k \\ k=0 \\ k+2\sqrt{t}-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} k=0 \\ k-1=2\sqrt{t}=1-k \quad |^2 \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} k=0 \\ 4t = k^2 - 2k + 1 \\ t \geq 0; 1-k \geq 0 \end{cases}$$

2) Возвращаемся в (H):

$$\begin{cases} k=0 \\ t+k \geq 0 & (*)1 \\ t \geq 0; 1-k \geq 0 \\ 4t = k^2 - 2k + 1 \\ t+k \geq 0 & (*)2 \\ t \geq 0; 1-k \geq 0 \end{cases}$$

2.1) Решим (*)1 с обратной заменой:

$$\begin{cases} 4x=1 \\ 2x^2-3x+4 \geq 0 \\ 2x^2+x+3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ 2 \cdot \frac{1}{16} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \geq 0 - \text{Верно} \\ 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3 \geq 0 - \text{Верно} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{4}}$$

2.2) Решим (*)2 с обратной заменой:

$$\begin{cases} 8x^2+4x+12 = 16x^2-2x \\ 2x^2-3x+4 \geq 0 \\ 2x^2+x+3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2-x-3=0 \\ 2x^2-3x+4 \geq 0 \\ 2x^2+x+3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{-1}{2} \\ x=\frac{3}{2} \\ 2x^2-3x+4 \geq 0 \\ 2x^2+x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 4 \geq 0 - \text{Верно} \\ 2 \cdot (-1)^2 - 1 + 3 \geq 0 - \text{Верно} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ 2 \cdot \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \geq 0 - \text{Верно} \\ 2 \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 3 \geq 0 - \text{Верно} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}}$$

3) Проверим каждый из найденных корней подстановкой:

3.1) $x=\frac{1}{4} \rightarrow (D): \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 4} - \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3} = 1 - \frac{1}{4}$
 $\sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{3}{8}} = 0 - \text{Верно} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{4}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

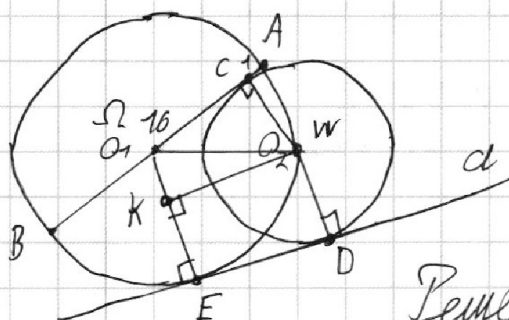
$$3.2) x = -1 \rightarrow (\square): \sqrt{2(-1)^2 - 3(-1) + 4} - \sqrt{2(-1)^2 + 3(-1)} = 1 - 4(-1) \\ \sqrt{9} - \sqrt{4} = 5 \\ 1 = 5 - \text{неверно} \Rightarrow x = -1 - \text{не корень}$$

$$3.3) x = \frac{3}{2} \rightarrow (\square): \sqrt{2 \cdot \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4} - \sqrt{2 \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 3} = 1 - 4 \cdot \frac{3}{2} \\ \sqrt{4} - \sqrt{9} = 1 - 6 \\ -1 = -5 - \text{неверно} \Rightarrow x = \frac{3}{2} - \text{не корень}$$

Ответ: $x = \frac{1}{4}$ - корень уравнения.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

- 1) AB -диаметр. в $\Omega_1 (O_1; R_1) \Rightarrow R_1 = \frac{AB}{2} = \frac{AC+BC}{2} = 8,5$.
- 2) $\Phi. n. O_2 D; O_1 E; O_1 O_2. O_1 E \perp \alpha$ (по св. касательной)
 $O_2 D \perp \alpha$
- 3) $O_2 \in \Omega_1 (O_1; R_1) \Rightarrow O_1 O_2 = R_1 = 8,5$
- 4) $E \in \Omega_1 (O_1; R_1) \Rightarrow O_1 E = R_1 = 8,5$
- 5) $BO_1 + O_1 C = BC \Rightarrow O_1 C = BC - BO_1 = BC - R_1 = 7,5$.
- 6) $\Phi. n. O_2 C$, причем $O_2 C \perp AB$, т.к. AB -касается Ω_2 в C .
- 7) Касат. $\Delta O_1 O_2 C$ -прямоуг. (т.к. $O_2 C \perp AB$ по пункту 6)
 $\Rightarrow O_1 O_2^2 = O_2 C^2 + O_1 C^2$ (по т. Пифагора)
 $O_2 C^2 = O_1 O_2^2 - O_1 C^2 = 8,5^2 - 7,5^2 = 10$
 $O_2 C = 4 = R_2$, т.к. C -точка касания $\Rightarrow O_2 C = R_2$.
- 8) $O_2 D = R_2 = 4$ (по т.к. $D \in \Omega_2 (O_2; R_2)$).
- 9) $\Phi. n. K \in O_1 E$, причем $O_2 K \perp O_1 E$
- 10) $O_1 E \perp \alpha$ (п. 2)
 $O_2 D \perp \alpha$ (п. 2) $\Rightarrow O_1 E \parallel O_2 D$ (по св. 2 парал. прям. в одной плоскости)
- 11) $O_1 E \perp \alpha$ (п. 2)
 $O_1 E \perp KO_2$ (п. 9) $\Rightarrow KO_2 \parallel ED$ (по св. 2 парал. прям. перпенд. третьей)
- 12) $ED \parallel KO_2$ (п. 11)
 $O_1 E \parallel O_2 D$ (п. 10) $\Rightarrow EKO_2 D$ -пар./мн (по опр.)
- 13) $EKO_2 D$ -пар./мн (п. 12) $\Rightarrow EK = O_2 D = 4$ (по св. 2 парал. отрезков)
- 14) $O_1 K + KE = O_1 E \Rightarrow O_1 K = O_1 E - KE = 8,5 - 4 = 4,5$

Страница 7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15) В треугольнике O_1KO_2 - прямоугольный (т.к. $O_2K \perp O_1E$ по п. 9)

$$\nrightarrow O_1O_2^2 = O_1K^2 + O_2K^2 \text{ (по т. Пифагора)}$$

$$O_2K^2 = O_1O_2^2 - O_1K^2 = 8,5^2 - 4,5^2 = 4 \cdot 13$$

$$O_2K = 2\sqrt{13}$$

16) $\square EKO_2D$ - параллелограмм (п. 12)

$$\nrightarrow O_2K = ED \text{ (по св. вы паралл. гр.)}$$

$$= 2\sqrt{13}$$

Ответ: $ED = 2\sqrt{13}$

Страница 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x+2y=z; \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}; \text{Найти: Максимум } \frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$$

$$\frac{3y+x}{xy} = \frac{2}{3x+2y} \Rightarrow \frac{6y^2+3x^2+3xy+2xy-2xy}{xy(3x+2y)} = 0$$

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ 3x+2y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)(x+2y)=0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ 3x+2y \neq 0 \end{cases}$$

1) Если $x \neq y = 0$:

$$\Rightarrow x = -y \Rightarrow 3x+2y = -3y+2y = -y = z$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = \frac{3y^2-4y^2-y^2}{y^2-6y^2} = \frac{-2y^2}{-5y^2} = 0,4$$

2) Если $x+2y=0 \Rightarrow 3x+2y = -6y+2y = -4y = z$

$$\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = \frac{12y^2-4y^2-16y^2}{4y^2-6y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$$

3) И.к. $y > 0,4$ (научерчены в 1 и 2 пунктах)
и рассмотрены все случаи $\Rightarrow$

Ответ: $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ максимум равно 4, с выполнением

условий $3x+2y=z$ и $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$c \cdot \frac{x-y}{xy} = 2 \text{ - первое условие}$$

$$c \cdot \frac{30-18}{30 \cdot 18} = 2 \Rightarrow c \cdot 12 = 2 \cdot 18 \cdot 30$$

$$c = \frac{36 \cdot 30}{12} = 90 \text{ км. - расстояние между}$$

А и В.

Ответ: расстояние АВ = 90 км.

Страница 11

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть скорость велосипедиста y км/ч; скорость мотоциклиста x км/ч; расстояние $AB = \ell$ км

Тогда: $\frac{\ell}{y} - \frac{\ell}{x} = 2$, т.к. велосипедист приезжает на 2 часа позже мотоциклиста

$$\ell \frac{x-y}{xy} = 2$$

$\ell \frac{x}{y} - y \frac{\ell}{x} = 96$, т.к. мотоциклист проехал бы на 96 км больше, чем велосипедист, если бы они ехали со скоростью y км/ч в AB , а x км/ч - столько же, сколько велосипедист.

$$\ell \frac{x^2 - y^2}{xy} = 96$$

$$\frac{\ell}{y+6} - \frac{\ell}{x+6} = \frac{5}{y} \quad (\text{потом из условия})$$

$$\ell \frac{x-y}{xy+6(x+y)+36} = \frac{5}{y}$$

$$\begin{array}{r} x \ 48 \\ 6 \\ \hline + 288 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell \frac{x-y}{xy} = 2 \\ \ell \frac{(x-y)(x+y)}{xy} = 96 \end{array} \right\} \Rightarrow (x+y) \cdot \frac{\ell(x-y)}{xy} = 96 \Rightarrow x+y = \frac{96}{2} = 48 \quad (*)$$

$$y = 48 - x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell \frac{x-y}{xy+6(x+y)+36} = \frac{5}{y} \\ \frac{8xy}{xy+6(x+y)+36} = 5 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{8xy}{xy+324} = 5$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8xy = 5xy + 324 \cdot 5 \\ 3xy = 3 \cdot 108 \cdot 5 \end{array} \right. \Rightarrow xy = 540 \quad (**)$$

$xy + 324 \neq 0$ верно, т.к. скорости > 0

Решим систему из (*): $\begin{cases} x+y=48 \\ xy=540 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=48 \\ x^2-48x+540=0 \quad (*) \end{cases}$

Решим (*):

$$D = 48^2 - 4 \cdot 540 = 4(24^2 - 540) = 16(12^2 - 135) = 16 \cdot 9 > 0; \text{ 2 действ. реш.}$$

$$x_{1,2} = \frac{48 \pm 12}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \text{ км/ч} \\ x = 18 \text{ км/ч} \end{cases}$$

Если $x = 30$ км/ч - скорость мотоциклиста, то $y = 18$ км/ч - скорость велосипедиста, не трудно проверить, что все условия выполнены.

Если $x = 18$ км/ч $\Rightarrow y = 30$ км/ч; но тогда $\ell \frac{x-y}{xy} = \ell \frac{-12}{30 \cdot 18} = 2$, что не возможно, т.к. расстояние AB - неотрицательное. $\neq$ эта пара скоростей не подходит.

Ответ. Скорость мотоциклиста - 30 км/ч;
Скорость велосипедиста

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- 15) Д.п. $XK \perp a$; $K \in a$; $XL \perp BC$; $L \in BC$
- 16) Рассм. $\triangle XKY$ - *прямоуг. треугол.* ($XK \perp a$)
 $\angle CYF = 45^\circ \Rightarrow \angle YXK = 45^\circ$ (по т. о сдв. углов. треугол.)
 $\Rightarrow XK = KY = XY \cdot \sin 45^\circ = \frac{XY}{\sqrt{2}} = x$
- 17) $LC = XK = x$, т.к. $\angle YCB = 90^\circ = \angle CLX = \angle CKX$, а значит *прям.*
 (по доп. построениям и угл.) $CLXK$ - *паралл. гр.*
 (по отрез.)
- 18) $BL = 4x$
 $BL = XF$
- 18) Докажем, что XF - диаметр:
 методом координат. Пусть $F(0; r)$;
 $E(r; 0)$, где r - радиус $w(0; r)$
 $\angle CFK = \angle FKC = 45^\circ$ (уже было доказано) (пункт 14)
 $O(r; r)$
 Уравн. w : $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$
 XF : $y = r + x$, т.к. угол наклона 45° (угл. $\angle FKC$)
 $\Rightarrow$ коэф. перед x , $k=1$; $F \in XF \Rightarrow y = 0 \cdot 1 + b \Rightarrow b=r$
 $\begin{cases} y = r+x \\ (x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = r+x \\ x^2 + (x-r)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = r+x \\ 2x^2 - 2xr = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} x=0 & \text{точка } F \\ y=r & \\ x=r & \text{точка } X \\ y=2r & \end{cases}$ *пересек* $EX = \sqrt{(r-0)^2 + (r-r)^2} = 2r$ - диаметр.
- 19) $BL = XF = 4x$, т.к. $OE \perp AB$ (по пункту 7)
 т.к. $OF \perp BC$ (по п. 4)
 т.к. $XL \perp BC$ (п. 15)
 т.к. $\angle ABC$ - *прямой*
 $\Rightarrow BEXL$ - *прямоуг.*
 $\Rightarrow BL = XF = 4x$
 $BE = XL = r = 2x$
 (по св-ву пер. чл.)
- 20) $XL = 2x$, т.к. $FO = 2x$ (как радиус)
 (к п. 19) - они равны, как *против. ст. паралл. чл.*
- 21) $BC = CL + BL = x + 4x = 5x$
- 22) Пусть $AE = y$, тогда $AD = y$ (по пункту 3); 23) $AB = AE + BE = y + 2x$
- 24) $S_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AB}{2} = \frac{5x \cdot (y+2x)}{2}$, по св-ву площадей
- 25) $S_{\triangle ABC} = \frac{P_{\triangle ABC}}{2} \cdot r =$ (т.к. $\odot ABE$ описана $w(O; r)$)
 $= \frac{5x + y + 2x + y + 5x}{2} \cdot 2x = (2y + 10x) \cdot x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

26) $\frac{1}{2} n. 24 + 25 = \frac{5x(y+2x)}{2} = x(2y+10x)$

$$\begin{aligned} 5y+10x &= 4y+20x \\ y &= 10x \end{aligned} \Rightarrow \frac{y}{x} = 10 \Rightarrow \frac{y}{3x} = 3\frac{1}{3}$$

27) $AD = AE = y$ (n. 22)

$$DC = CF = \cancel{3x} BC - FL = \cancel{4x} - FL = 3x$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{y}{3x} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ (по n. 26)}$$

$2x$, т.к. $OX = 2x$; $OX \parallel FL$ (по перпендикулярам к BC).
 $FO \parallel AX$ (т.к. они перпендикулярны к BC).

Ответ: $AD:DC = 10:3$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

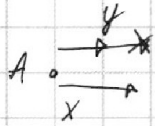
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.



$$\frac{l}{y} - \frac{l}{x} = 2 \quad \text{or} \quad l \cdot \frac{x-y}{xy} = 2$$

$$\frac{l-y}{x-y} = l$$

$$\frac{xl}{y} - \frac{yl}{x} = 96$$

$$\frac{x^2 - y^2}{xy} l = 96 \quad (x+y) \cdot 2 = 96 \quad x+y = 48 \quad y = 48 - x$$

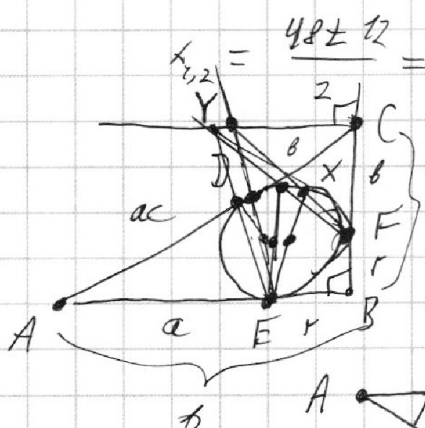
$$\frac{l}{y+6} - \frac{l}{x+6} = 1,25 \quad l \cdot \frac{x-y}{xy+6x+6y+36} = 1,25$$

$$\frac{2xy}{xy+324} = \frac{5}{4}$$

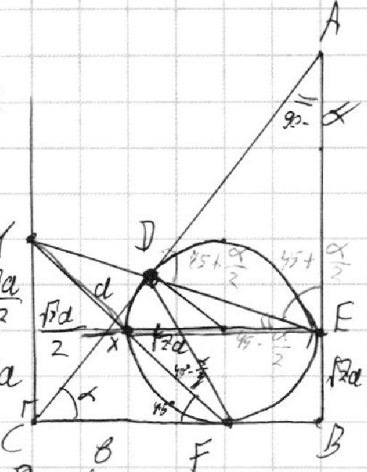
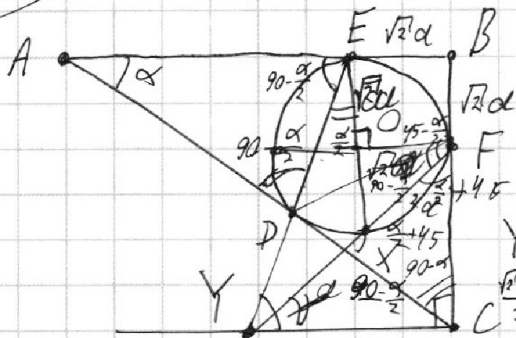
$$8xy = 5xy + 5 \cdot 324$$

$$\begin{cases} xy = 540 \\ x+y = 48 \end{cases} \quad 48x - x^2 = 540 \quad x^2 - 48x + 540 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{48 \pm 12}{2} = \begin{cases} x = 30 \rightarrow y = 18 \\ x = 18 \rightarrow y = 30 \end{cases} \quad D = 48^2 - 4 \cdot 540 = 16(12^2 - 135) = 16 \cdot 9 = 144$$



$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 2ab &= a^2 + 2ar + r^2 + b^2 + 2br + r^2 \\ ab &= ar + br + r^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \\ a + b &= c + 2r \end{aligned}$$



$$B+A = c+2\sqrt{2}a \quad (A+B)\cos\alpha = B+\sqrt{2}a^2$$

$$A+B = \frac{B+\sqrt{2}a^2}{\cos\alpha} - B = \frac{3\sqrt{2}a^2}{2} - a \quad \text{См. рисунок 9}$$

