



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x , y , z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab \geq 3^{14} \cdot 7^{14}, bc \geq 3^{16} \cdot 7^{16}, ac \geq 3^{21} \cdot 7^{38}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 \geq 3^{50} \cdot 7^{65}$$

$$ab = k \pi \cdot 3^{14} \cdot 7^{14}$$

$$bc = y \cdot 3^{16} \cdot 7^{16}$$

$$ac = z \cdot 3^{21} \cdot 7^{38}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 3^{50} \cdot 7^{65} \cdot \pi y z$$

$$\Rightarrow abc = 3^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{\pi y z}$$

$$a, b, c - \text{нечетн.} \Rightarrow abc - \text{нечетн.}$$

$$\Rightarrow \pi y z - \text{нечетн.}; \pi, y, z - \text{нечетн.}$$

$$\Rightarrow \pi y z = 7^2$$

$$abc \geq 3^{25} \cdot 7^{32}$$

$$\text{значит, что } b \text{ равно } \frac{abc}{ac} = \frac{3^{25} \cdot 7^{32}}{7^6}$$

$$b - \text{нечетн.} \Rightarrow \sqrt{\pi y z} : 7^6$$

$$\Rightarrow \pi y z : abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$$

$$abc = 3^{25} \cdot 7^{38} \text{ достигаема, например,}$$

$$\text{при } b = 3^4, c = 3^{14} \cdot 7^{20}, a = 3^{17} \cdot 7^{18}$$

$$\text{Ответ: } 3^{25} \cdot 7^{38}, \text{ достигаема, например, при}$$

$$a = 3^7 \cdot 7^{18}, b = 3^4, c = 3^{14} \cdot 7^{20}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} \stackrel{N2}{=} \frac{a+b}{a(a-8b)+b \cdot b} = \frac{a+b}{a(a-8b)+b(a-8b)-ab+9b^2} =$$
$$= \frac{a+b}{(a+b)(a-8b)-ab+9b^2}$$

$$a+b : m \text{ и } (a+b)(a-8b)-ab+9b^2 : m$$

$$\Rightarrow -ab+9b^2 : m$$

$$\Rightarrow b(9b-a) : m \text{ и } a+b : m$$

Это значит $\frac{a}{b}$ нецелая $\Rightarrow a$ и b взаимнопросты

$\Rightarrow b$ и $a+b$ взаимнопросты, иначе у a и b есть общий дел. (но нет, в противном случае b и $a+b$).

b и $a+b$ взаимнопросты $\Rightarrow b$ и m взаимнопросты,
т.к. $a+b : m$.

$$\Rightarrow 9b-a : m \text{ и } a+b : m$$

$$\Rightarrow 9b-a+a+b = 10b : m$$

b и m взаимнопросты

$$\Rightarrow 10 : m$$

$$\Rightarrow m \leq 10; m=10 \text{ делится, например, при}$$

$$a=1, b=9$$

Следств: 10; делится, например, при $a=1, b=9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

Пусть $a = \frac{1}{2} - 2x$; $b = \frac{a^2}{2} + \frac{27}{8} = 2x^2 - x + \frac{29}{8}$

Перепишем уравнение.

$$\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} = 2a$$

$$\Rightarrow (b+a) + (b-a) - 2\sqrt{b^2 - a^2} = 4a^2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{b^2 - a^2} = 2b - 4a^2$$

$$\Rightarrow 4b^2 - 4a^2 = (2b - 4a^2)^2$$

$$\Rightarrow 16a^4 - 16a^2b + 4a^2 = 0$$

$$a^2(16a^2 - 16b + 4) = 0$$

$$a^2(16a^2 - 8a^2 - 54 + 4) = 0$$

$$a^2(8a^2 - 50) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = 0 \text{ или } 4a^2 = 25$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ или } 2a = 5 \text{ или } 2a = -5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - 2x = 0 \text{ или } 1 - 4x = 5 \text{ или } 1 - 4x = -5$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ или } -1 \text{ или } \frac{3}{2}$$

~~Проверка: $x = \frac{1}{4}$; $\frac{3}{2}$~~

Остаток проверить, но по нормам не считаем

отр. числа, но если $b \geq -a$ и $b \geq a$

$b > 0$, т.к. всегда "верно", т.е. $a >$

нуль проверить, но $b \geq |a|$.

$$x = \frac{1}{4}$$

$$a = 0$$

$$b = \frac{27}{8}$$

$$x = -1$$

$$a = \frac{5}{2}$$

$$b = \frac{52}{8} = \frac{13}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{5}{2}$$

$$b = \frac{52}{8} = \frac{13}{2}$$

Ответ: $-1; \frac{1}{4}; \frac{3}{2}$



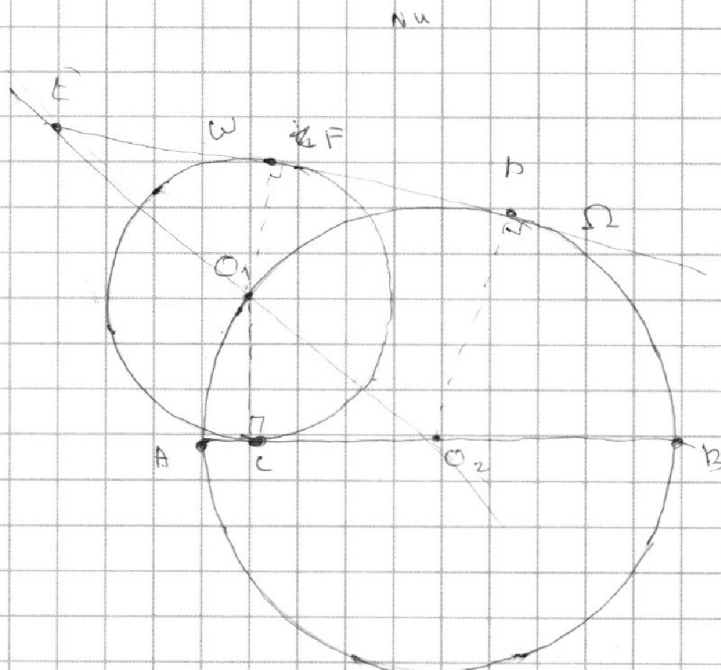
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O_1 - центр окружности $\Omega \Rightarrow OC$ - ее радиус; $O_1C \perp AB$.

AB - диаметр $\Omega \Rightarrow A, O, B$ - диаметральной хорды.
Высота из вершины прямого угла в гипотенузу равна высоте, опущенной на формулу
 $\sqrt{AC \cdot BC} = 4$. $AB = 17 \Rightarrow$ радиус Ω равен 8,5.

$$O_1F \parallel O_2D \Rightarrow \triangle O_1EF \sim \triangle O_2ED \Rightarrow \frac{EO_2}{EO_1} = \frac{O_2D}{O_1F}$$

$$O_1O_2 \perp \frac{EF}{ED} = \frac{O_1O_2}{EO_2} \quad (EO - общая гипотенуза)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{8,5}{EO_1} = \frac{8,5}{4} \\ DF = 8,5 \cdot \frac{\sqrt{6,5^2 + EO_1^2} - \sqrt{EO_1^2 + 6,5^2}}{EO_1 + 8,5} \end{cases}$$

$$EO_1 = 8,5 + \frac{8}{9} \Rightarrow EO_1 + 8,5 = 8,5 + \frac{17}{9} = \frac{17^2}{18}$$

$$DF = 8,5 \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{64}{81}} - \sqrt{\frac{17^2}{9} + 1}}{\frac{17^2}{18} + 8,5} = \frac{\sqrt{145}}{2}$$

$$DF = \frac{18}{4} \cdot \sqrt{\frac{17^2}{9^2} + 1} = \frac{\sqrt{370}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right)(3x+2y) = \frac{2}{z} \cdot z \end{cases}$$

$$x, y, z \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{9x}{x} + \frac{2y}{y} + \frac{3x}{y} + \frac{6y}{x} = \frac{2z}{z} \Rightarrow \frac{3x}{y} + \frac{6y}{x} = -9 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{н.к. } x, y, z \neq 0,$$

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = 0 \quad (\text{добавим второе уравнение на } xy)$$

$$4x^2 + 12xy + 8y^2 = 0$$

$$(2x+3y)^2 = y^2$$

$$\Rightarrow 2x+3y = y \quad \text{или} \quad 2x+3y = -y$$

$$x = -y \quad \quad \quad x = -2y$$

$$3x+2y=z$$

$$\Rightarrow \text{либо } x=-y, z=x; \text{ либо } x=-2y, z=\frac{z}{2}$$

Для выполнения одной из пар равенств оба уравнения одновременно выполняются верно, поэтому можно выразить в одной системе y и z через x и подставить в третье уравнение.

$$y=-x, z=x$$

$$y=-\frac{x}{2}, z=2x$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{x^2}{x^2} \left(\frac{3-4-1}{1-6} \right) = \frac{2}{5},$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{x^2}{x^2} \left(\frac{3-1-4}{1-1,5} \right) = \frac{4}{0,5},$$

$$\text{н.к. } x \neq 0$$

$$\text{н.к. } x \neq 0$$

$\Rightarrow$ наиб. возможное значение равно $\frac{4}{5}$ и достигается

$$\text{при } y=-\frac{x}{2}, z=2x. \text{ Например, } x=2, y=-1, z=4.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{5}; \text{ достигается, например, при } x=2, y=-1, z=4.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

Пусть y — скорость света, x — скорость звука, $y \gg x$;
 t_1 — время, которое свет проходит расстояние S ;
 t_2 — время, которое звук проходит расстояние S ;
 S — расстояние от источника до наблюдателя.

$$\begin{cases} x(t_1 + t_2) = y t_1 = S \\ y(t_1 + t_2) - x t_1 = g b \\ (x + b)(t_2 + \frac{g}{y}) = (y + b) t_2 = S \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

Окружность с центром O касается вращающегося
треугольника $\Rightarrow BFE$ - вписан
 $\Rightarrow \angle FOE = 90^\circ$. Так как не требуется решать
по $\angle FFE \Rightarrow \angle FFE = \frac{\angle FOE}{2} = 45^\circ$
 $\Rightarrow \angle YXE = 135^\circ \Rightarrow \sin \angle YXE = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\Rightarrow \frac{YE}{\sin \angle YXE} = \frac{XE}{\sin \angle YEX} = \frac{XY}{\sin \angle YEX}$



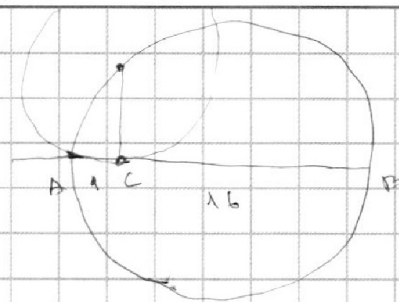
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

$$\text{Пусть } a = \frac{1}{2} - 2\pi.$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2} = 2\pi^2 - \pi + \frac{1}{8}$$

$$\frac{a^2}{2} - a = 2\pi^2 + \pi - \frac{3}{8}$$

$$\frac{a^2}{2} + a = 2\pi^2 - 3\pi + \frac{5}{8}$$

Перемножим данное уравнение.

$$\sqrt{\frac{a^2}{2} + a + 4 - \frac{5}{8}} - \sqrt{\frac{a^2}{2} - a + 3 + \frac{3}{8}} = 2a$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{27}{8} + a} - \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{27}{8} - a} = 2a$$

$$\text{Пусть } \frac{a^2}{2} + \frac{27}{8} = b.$$

$$\text{Тогда } \sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} = 2a$$

$$\Rightarrow (b+a) + (b-a) - 2\sqrt{b^2 - a^2} = 4a^2$$

$$2b - 2\sqrt{b^2 - a^2} = 4a^2$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 - (a-b)^2 + 2\sqrt{(a+b)(b-a)} + 2a^2 - 2b^2 - 2b = 0$$

$$(a+b+b-a)^2 + 2a^2 - 2b^2 - 2b = 0$$

$$4b^2 + 2a^2 - 2b^2 - 2b = 0$$

$$a^2 = -b^2 + b$$

$$a^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{27}{8} - \left(\frac{a^2}{2} + \frac{27}{8}\right)$$

$$\frac{a^2}{2} - \frac{27}{8} = -\frac{(a^2)^2}{4} + \frac{27}{8} - a^2 - \frac{27^2}{8^2}$$

$$\text{Пусть } a^2 = c$$

$$\frac{c^2}{4} + \frac{27}{8}c + \frac{27^2}{8^2} = 0$$

$$\left(\frac{c}{2} + \frac{27}{8}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{c}{2} + \frac{27}{8}\right)$$

$$\begin{aligned} a^2 - 9ab + b^2 &= a(a-9b) + b^2 = \\ &= a(a-9b) + b(a-9b) - ab + 9b^2 = \\ &= (a+b)(a-9b) + ab - 9b^2 \end{aligned}$$

перемножим

$$a^2 - 9ab + b^2$$

получим

$$(4a^2 - 27b)^2 = 4b^2 - 4a^2$$

$$a^2(16a^2 - 16b + 4a^2) = 0$$

$$a^2(16a^2 - 16b + 4) = 0$$



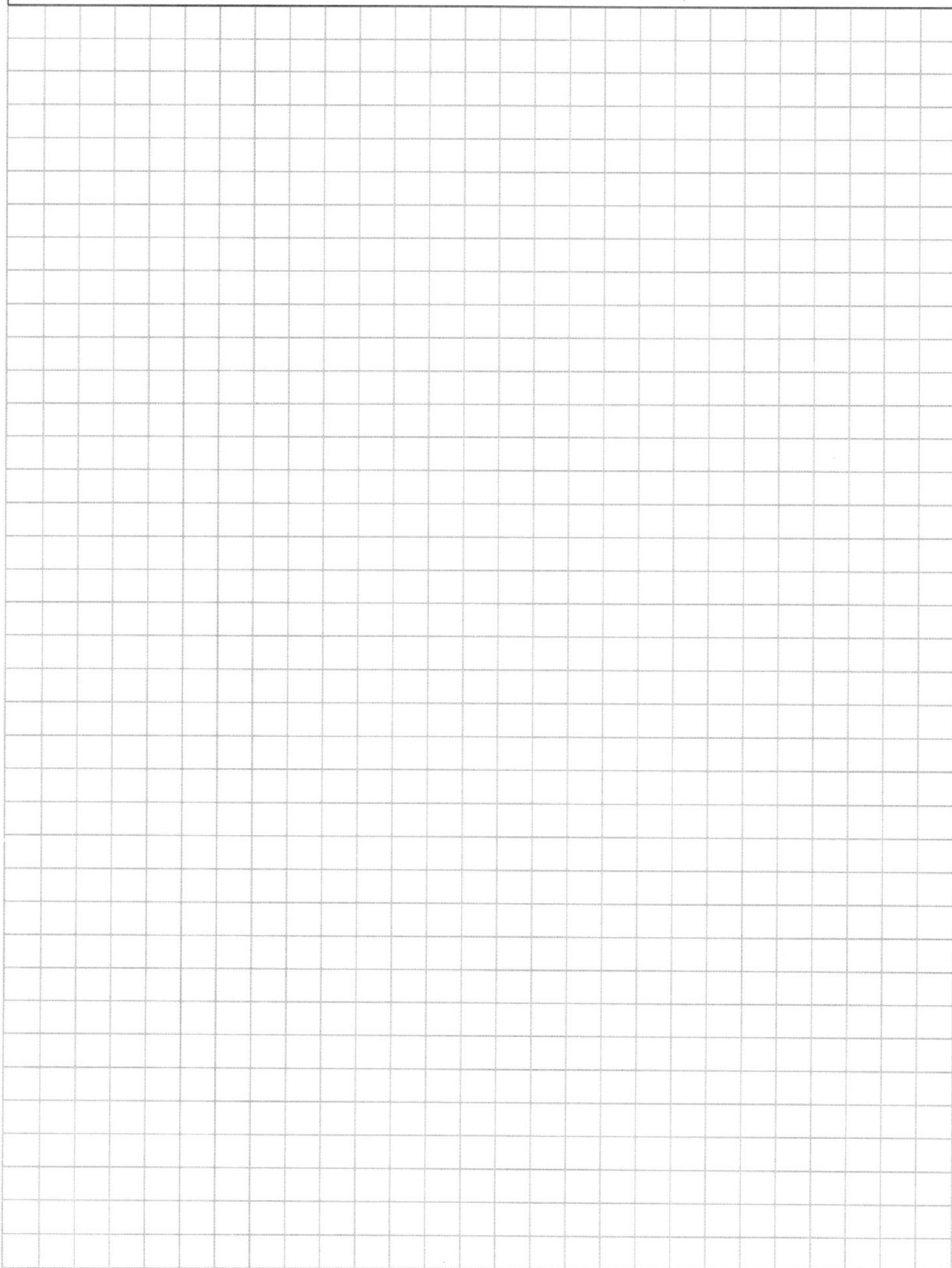
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



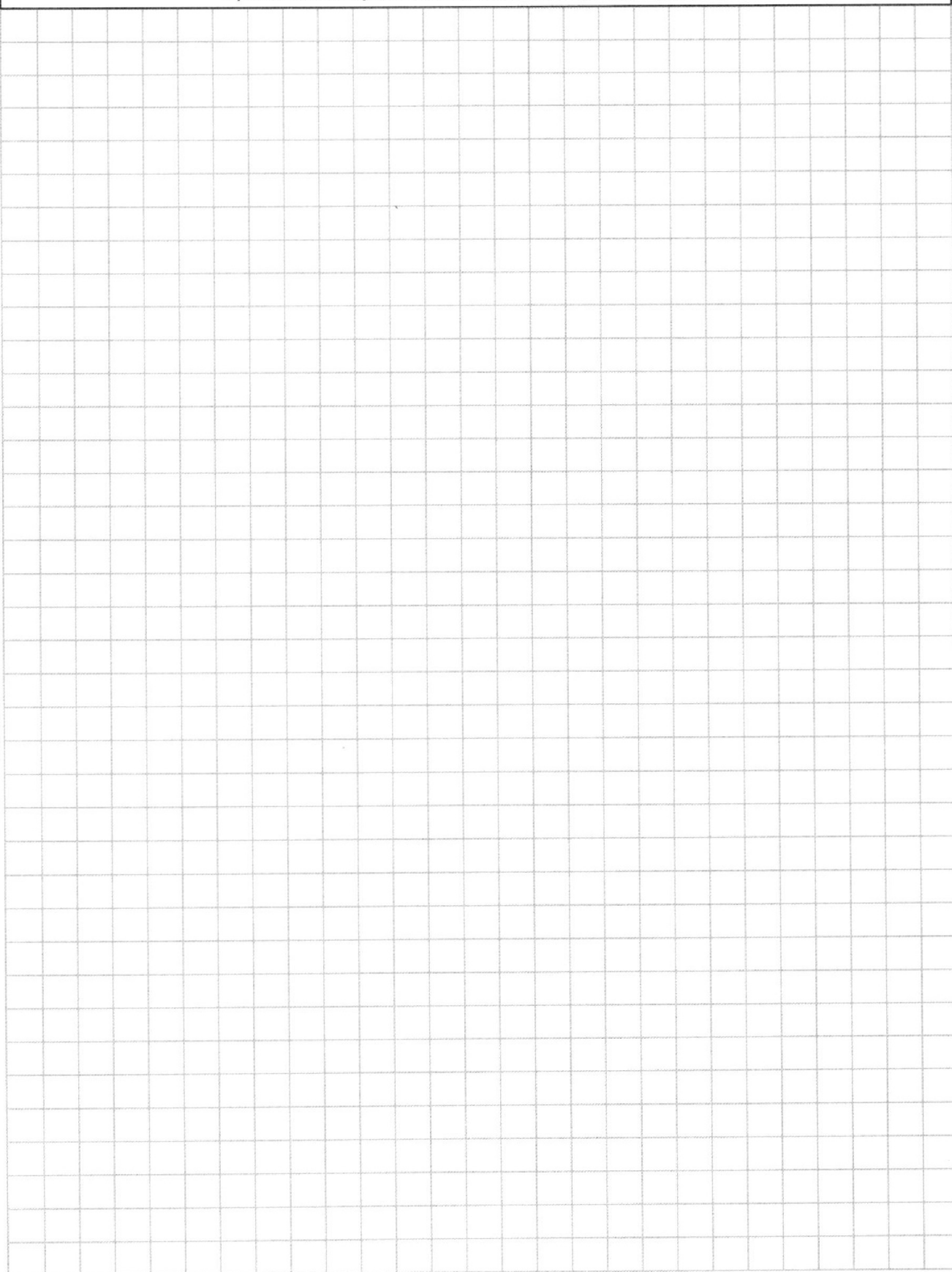
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x + 2y = 3 \Rightarrow 2y - 2 = -3x$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow 3zy = x(2y - 2) \Rightarrow x^2 = -2y$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - 2z^2}{x^2 - 6y^2} = 3 + \frac{14y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$3x^2 - 4y^2 - 2z^2$$

$$3x + 2y = 2$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$\Rightarrow 9 + 2 + \frac{6y}{x} + \frac{3x}{y} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{9}{x} = -9$$

$$x^2 = -2y$$

$$x^3 = z \Rightarrow y = \frac{-1}{x}, z = x^3$$

$$3x - \frac{2}{x} = x^3$$

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$\frac{2y}{x} - \frac{1}{y} = -3$$

$$-2y^2 + x^2$$

$$2a + \frac{1}{a} = -3$$

$$2a^2 + 3a + 1 = 0$$

$$(2a + 1)^2$$

$$\frac{3z}{x} + \frac{3}{y} = \frac{6x}{z} + \frac{4y}{z}$$

$$3x + 2y = 2$$

$$\frac{xy}{3y + x} = \frac{z}{2}$$

$$2xy = (3x + 2y)(3y + x)$$

$$2xy = 6y^2 + 3x^2 + 2xy - 9xy$$

$$3x^2 + 2y^2$$

$$\frac{2}{a} \mid \frac{2}{b}$$

$$\frac{2}{b+a} \mid \frac{2}{b-a}$$

$$\sqrt{b+a} = (b+a) - (b-a)$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y} \right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{z} \right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{x} \right)^2$$

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = \frac{1}{z} - \frac{2}{x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

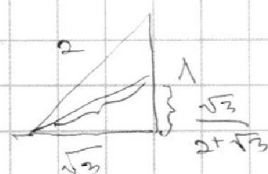
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3 + \frac{3}{10}(2 + \sqrt{3})} = \sqrt{3 + \frac{3}{10}(2 + \sqrt{3})}$$

через

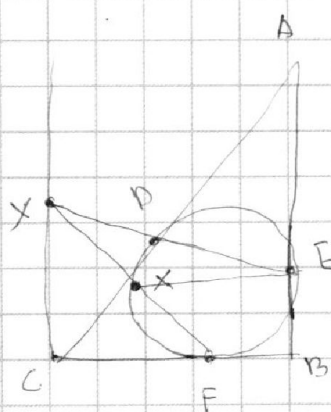
$$3^{11} \cdot 7^{11} \cdot 3^{12} \cdot 7^{16} \cdot 3^{24} \cdot 7^{38}$$



$$\sin \theta =$$

$$170 + 70 + 49 = 289$$

$$289 + 81 = 370$$



$$1 + \frac{8,5}{EO} = \frac{8,5}{u} \quad xy = 3 + 11$$

$$\frac{8,5}{EO} = \frac{4 + 5}{u}$$

$$EO = 8,5 \cdot \frac{8}{9}$$

$$\sin \theta =$$

$$2\sqrt{2} \sin \theta = \sin(45 - \theta)$$

$$\frac{xy}{xe} = \frac{\sin \theta}{\sin(45 - \theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{xe} = \frac{\sin \theta}{\sin(45 - \theta)}$$

