



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
• страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть
$$\begin{cases} ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc = \sqrt{2k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{\frac{2k_1 k_2}{k_3}} \cdot 2^5 \cdot \frac{1}{7^5}$$

$$a = \sqrt{\frac{2k_1 k_3}{k_2}} \cdot 2^8 \cdot 7^{15}$$

$$c = \sqrt{\frac{2k_2 k_3}{k_1}} \cdot 2^{11} \cdot 7^{22}$$

$\Rightarrow$ каждое из полученных выражений - вб. член, если $\frac{2k_1 k_2}{k_3} \geq 7^{10}$,

иначе б - не член и $\frac{2k_1 k_2}{k_3}$ - член, тогда б не член:

1) $\frac{2k_1 k_2}{k_3} = 2 \cdot 7^{10} \Rightarrow k_1 k_2 = k_3 \cdot 2 \cdot 7^{10}$

$$k_1 k_2 k_3 = k_3^2 \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$\frac{k_1 k_3}{k_2} = \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \cdot 2 \cdot 7^{10} \Rightarrow \frac{2k_1 k_3}{k_2} = 2^2 \cdot 7^{10} \cdot \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \text{ - вб. член}$$

или $k_3 : k_2$

аналогично $\frac{2k_2 k_3}{k_1} = \left(\frac{k_3}{k_1}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot 7^{10}$

$\Rightarrow$ или $k_3 : k_1$ - вб. член и $\frac{2k_1 k_2}{k_3} = 2^2 \cdot 7^{10}$

Пусть ~~каждое~~ ~~выражение~~, ~~полученное~~, или $k_1 = k_2 = k_3 = 2 \cdot 7^{10}$

$$b = 2^5 \cdot \frac{1}{7^5} \cdot 2 \cdot 7^5 = 2, \quad a = 2^8 \cdot 7^{15} \cdot \frac{1}{2 \cdot 7^{10}} = \frac{2^8 \cdot 7^5}{k_2}$$

$k_1 k_2 k_3 \geq 2 \cdot 7^{10}$ 1) Другими, т.е. $k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$. Тогда $b = \frac{2^6}{k_3}$,
 $a = \frac{2^5 \cdot 7^{10}}{k_2}, c = \frac{2^{12} \cdot 7^{24}}{k_1}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Подберём такие k_1, k_2, k_3 , что a, b, c — целые и $k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$.

$k_1 = 7^5, k_3 = 2, k_2 = 1$. Тогда a, b, c — целые и упр. задачи выполняется.

$$\Rightarrow abc \geq \sqrt{2 \cdot 7^{10}} \cdot 2^5 \cdot 7^{10} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Итак: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Р.5: $a = 2^9 \cdot 7^{10}$
 $b = 2^{12} \cdot 7^{14}$ ← при $k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$
 $c = 2^5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a \equiv k \pmod m$, тогда $b \equiv m-k \pmod m$, иначе из
условия $a+b$ нельзя получить m , так как $k \not\equiv 0 \pmod m$,
иначе $\frac{a}{b}$ сократится на m .

$$\left. \begin{aligned} a^2 &\equiv k^2 \\ -6ab &\equiv -6k(m-k) \\ b^2 &\equiv m^2 (m-k)^2 \end{aligned} \right\} + \quad \begin{aligned} a^2 - 6ab + b^2 &\equiv k^2 - 6km + 6k^2 + m^2 - 2mk + k^2 \equiv \\ &\equiv 8k^2 - 8mk + m^2 \equiv 8k^2 \end{aligned}$$

Итак, $a^2 - 6ab + b^2$ должно быть сравнимо с 0 по модулю m , иначе
нельзя из этого получить m , но $8k^2 \equiv 0 \pmod m$ и $k^2 \not\equiv 0 \pmod m$,
то $8 \equiv 0 \pmod m \Rightarrow m \leq 8$.

Пример на $m=8$: $k=7, b=1$: $\frac{7+1}{49-42+1} = \frac{8}{8} = 1$.

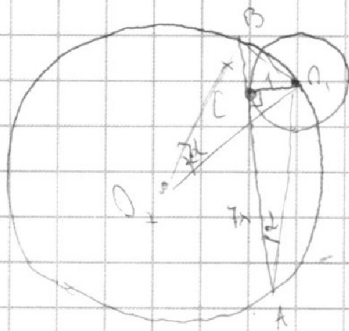
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \text{ по } \Delta_{\text{окр}} \text{ по } \Delta O, C: \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$; \cos \alpha = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}; \text{ ч.к. } AB \text{ кас. } \omega, \text{ мд}$$

$\angle O, C A = 90^\circ$; AB - касательная

$$2) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{8x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

уменьшение при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$ (справедливо для $\sin$), значит, не найдем

$$3) \text{ по } \Delta_{\text{окр}} \text{ по } \Delta B O, O_2: \frac{B O_2}{\sin 2\alpha} = 2R = 10 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{B O_2}{10} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{10} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}} \Rightarrow 140x = \sqrt{x^2+1} \cdot (\sqrt{4x^2+1})^2$$

$$140^2 x^2 = (x^2+1)(4x^2+1)$$

$$x^2 = t; 140^2 t = 49t^2 + 50t + 1; 49t^2 + t(50 - 140^2) + 1 = 0$$

$$2) \text{ по } \Delta_{\text{окр}} \text{ по } \Delta A O, B: \frac{B O}{\sin \alpha} = 10 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$t = x^2; t+1 = \frac{100}{49t+1} \Rightarrow 49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$t = 1 - \text{корень}; (t-1)(49t+99) = 0$$

$$2 - \text{й корень } < 0 \Rightarrow \text{не подходит} \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow AB = 8.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad | \cdot (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = -(7x - 2)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$-7x + 2$$

$$-(7x - 2) + (7x - 2)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0$$

$$7x - 2 = 0$$

(1)

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 \quad (2)$$

(1) p -на $x = \frac{2}{7}$

(2) ~~рассм.~~ $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$; $D = 4 - 4 \cdot 2 = -4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_0 = -\frac{D}{4a} = \frac{-4}{4 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

(2) Рассмотрим графики функций $2x^2 - 5x + 3$ и $2x^2 + 2x + 1$.

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$D = 1 \Rightarrow y_0 = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}; \quad f(0) = 3$$

$$x_0 = -\frac{-5}{4} = \frac{5}{4}$$

$$g(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

$$D = -4 \Rightarrow y_0 = -\frac{-4}{2} = 2; \quad g(0) = 1$$

$$x_0 = -\frac{2}{2} = -1$$

$$\Rightarrow \text{при } x > 0 \quad g(x) > 1 \Rightarrow \sqrt{g(x)} > 1 \Rightarrow \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x)} > 1$$

$$\text{при } x < 0 \quad f(x) > 3 \Rightarrow \sqrt{f(x)} > \sqrt{3} > 1 \Rightarrow \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x)} > 1$$

где x из любого из двух промежутков



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{при } x=0: \sqrt{3} + \sqrt{1} = 4 - \text{не верно}$$

$\Rightarrow$ ур-ние 2 не имеет корней

$$\Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$\text{Проверка: } \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - 2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3} = \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{40}{49} + 3} = \sqrt{3 - \frac{62}{49}} =$$

$$= \sqrt{\frac{85}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{4}{7} + 1} = \sqrt{\frac{8 + 49 + 28}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = 0 = 2 - 4 \cdot \frac{2}{7} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} - \text{верно}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

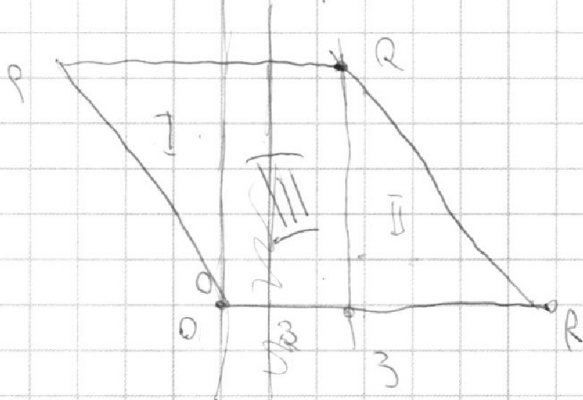
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Геометрически изобразим эти параллельные и перпендикулярные на 2 чертежах

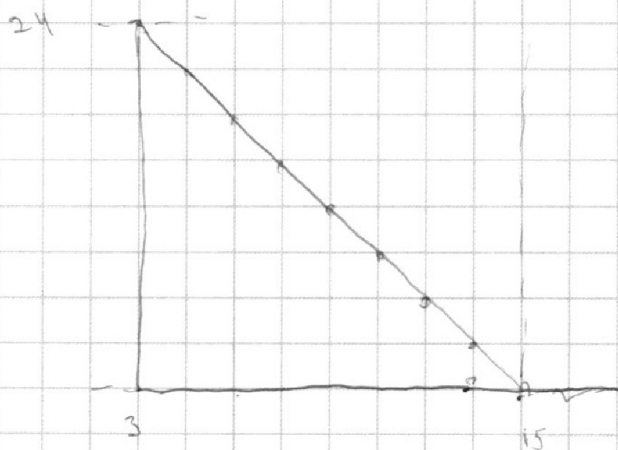


Всего имеем 2 части:

I и II.

Для начала будем считать только парк в 1 час. Дело, что в
другой стороне нас - из р. саба аутри и пол. парк в зонах парка и т.д.,
- и.е. и т.д. Итого имеем парк из I и II.

Будем для удобства считать парк из 2-ой части:



Итак, что QR и RP -

- и т.д. и т.д.

$$\angle ORQ = \angle ORQ = 45^\circ$$

Парк в 15 минут
решение задачи

и т.д.

Будем считать парк в 15 минут, а также на 15 и 24 мин.

Итого имеем парк, 8 мин. X и 8 мин. Итого имеем парк

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Посмотрим раскл. мн-во из точек и их длины. справа начеб.



Значит, самая левая точка, к. нам будет 1. хм, на 1. у, 1. у.

$$(3; 0), \text{ где } (3; 0) - 2; \text{ где } (11; 0)$$

$$\text{где } (3; 0) - 2; \text{ где } (7; 0) - 3 \text{ и т.д. до } 7, \text{ и т.д. до } 7$$

Всего точек из мн-ва, что на канале перес. будет 1.

мн-во из 7 точек

$$\Rightarrow \text{На мн-ве, где } 1+...+7+7 \cdot 3 = 10 \text{ точек}$$

$$\text{на } y_1: 1+...+7+7 \cdot 2 = 9 \text{ точек}$$

$$\text{на } y_2: 1+...+7+7 = 8 \text{ точек}$$

$$\text{на } y_{10}: 1 \text{ точка}$$

на линии будет 10 точек $\Rightarrow$ и т.д.

$$1+1+2+1+2+...+(1+2+3+...+7)+7 \cdot 6 =$$

$$= 1+3+6+10+15+21+28+42 = 70+31+25 = 95+31 = 126 \text{ точек}$$

$$\Rightarrow \text{в } 2\text{-х точках } 126 \cdot 2 = 252 \text{ точек}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Мы считаем, что все пары, т.е. пары "1" - "2" и "2" - "1" допустимы.

$$\Rightarrow x_2 \geq x_1$$

$$y_2 \geq y_1$$

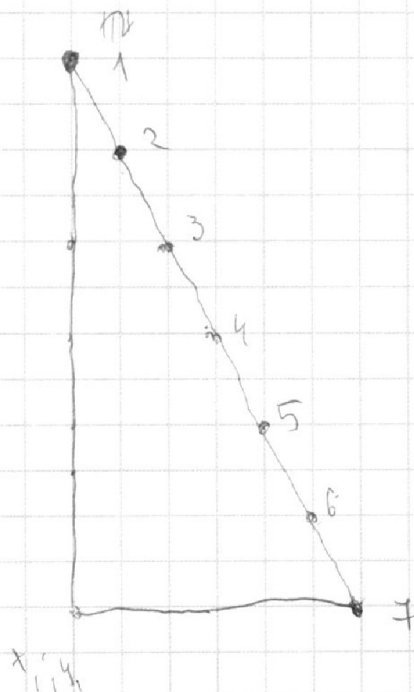
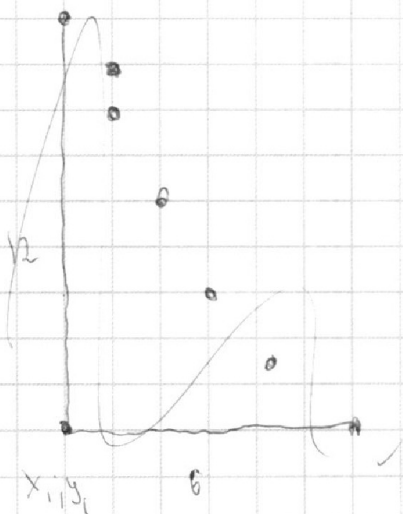
Получим решение ур-в $2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

В итоге на графике получаем: $(0; 12); (1; 10); (2; 8); (3; 6); (4; 4);$

$(5; 2); (6; 0)$.

Три из них будут идти по верхнему краю многоугольника.

Изобразим эти точки графиками:



Все 7 вариантов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решать будем методом перебора для $I - II$, $II - III$, $I - III$. И выберем из III .

из III .

Важно, что такие же числа для $III - II$ и I и III мы-то уже определили.

Для $III - II$:

Для первого 12 разов переберем варианты: $4 \cdot 7 \cdot 11$ и т.д. или переберем.

Все можно. Для каждого варианта переберем варианты на 1.

$$4 \cdot 7 \cdot 11 + (6 + 1) = 4 \cdot 7 \cdot 11 + 21 \text{ и т.д.} - \text{для } III - II$$

$$\Rightarrow \text{для } II - III + III + III - I: 2(324) = 648 \text{ штук}$$

Сложнее для $I - II$:

$\Delta y = 0, 1, 2, 3, \Delta y \geq 4$. Δy может быть только 0, 1, 2, 3, 4, 5.

$-1; 0; 1; 2; 3; 4$

$\Rightarrow$ все варианты $I - II$ лежат на $y = 0, y = -1, y = -2$

для $x_2 > x_1$,

и
 $x_2 > y$,

и 4 варианта на 2.

каждый вариант 2

каждый вариант 1

$$23 \cdot 2 + 1 - 2$$

$$46 - 1 = 45$$

$$25 - 2 =$$

$$23$$

$$\text{Итого: } (45 + 23) \cdot 2 = 68 \cdot 2 = 136$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для начала разберемся со 2 пер-ми:

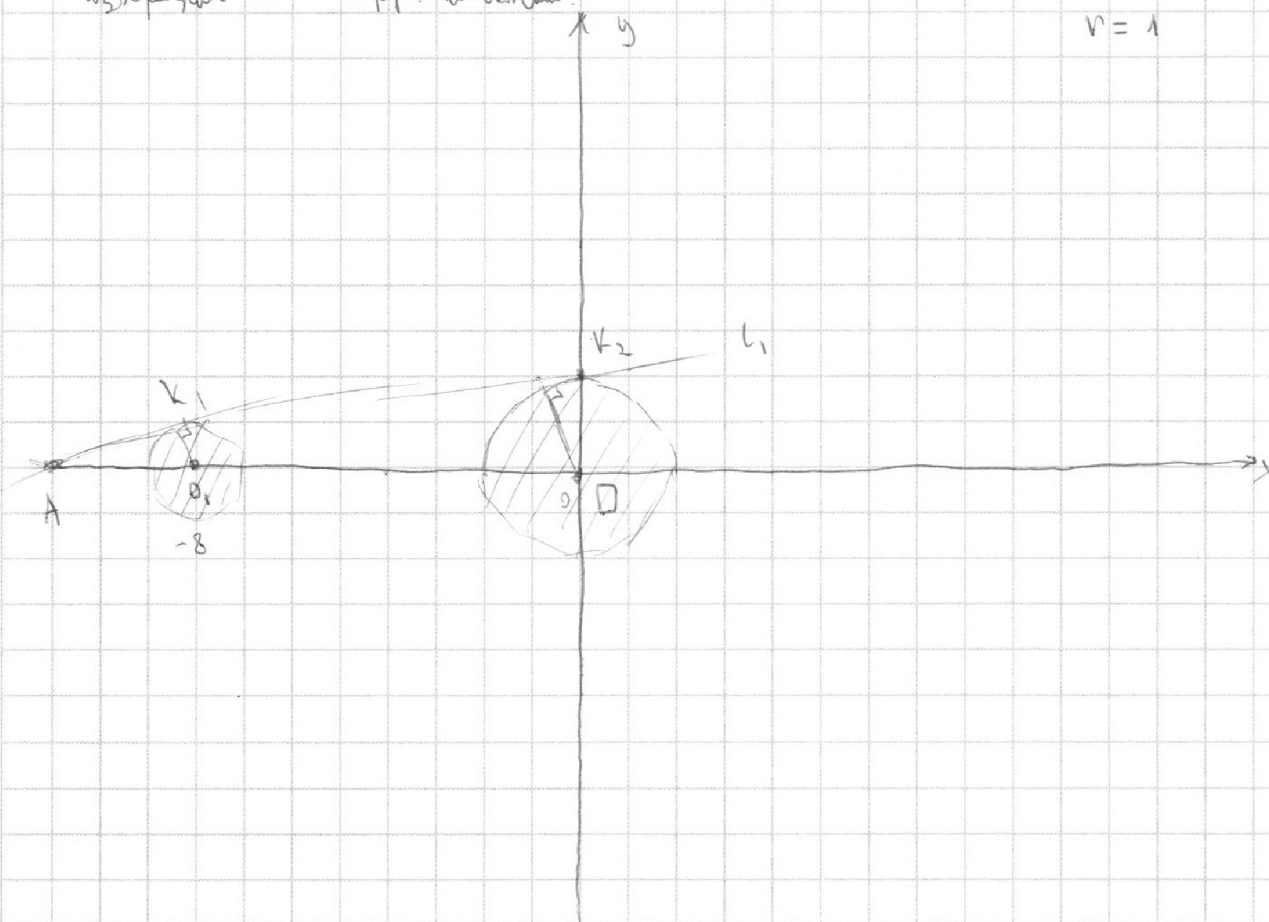
то 2-е уравнение эквивалентно

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \\ (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

р-на ГМТ 2-го пер-го, с
внутри, с
 $r=2$.

Изображение на коор. плоскости:

р-на ГМТ 1-го пер-го, с
 $r=1$



Пл.х. прикоснется кривая или кривые (круги либо 1, либо 2, либо обе).

или - координаты, то $ax + y + 10b = 0$ - касательная к внешней окружности;

или другая касательная. Всего у 2-х окруж. имеют либо 1 касательная.

2 внешние и 2 внутренние.

Для начала найдем 1 внешнюю. - l_1

Прямая на перес. ox и oy . Прямая

$$\frac{AO_1}{AO} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}; AO_1 + 8 = AO$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

значит, $AO = 16$; $AO_1 = 8 \Rightarrow m. (-16; 0) \in \text{прямой}$

$$-a \cdot (-16) - 0 + 10b = 0$$

$$10b = 16a \Leftrightarrow 5b = 8a.$$

По т. Пифагора: $AK_1 = \sqrt{64^2 - 1^2} = 3\sqrt{41} \Rightarrow \text{tg } K_1AO = \frac{1}{3\sqrt{41}} = \frac{OK_2}{16} \Rightarrow OK_2 = \frac{16}{3\sqrt{41}}$

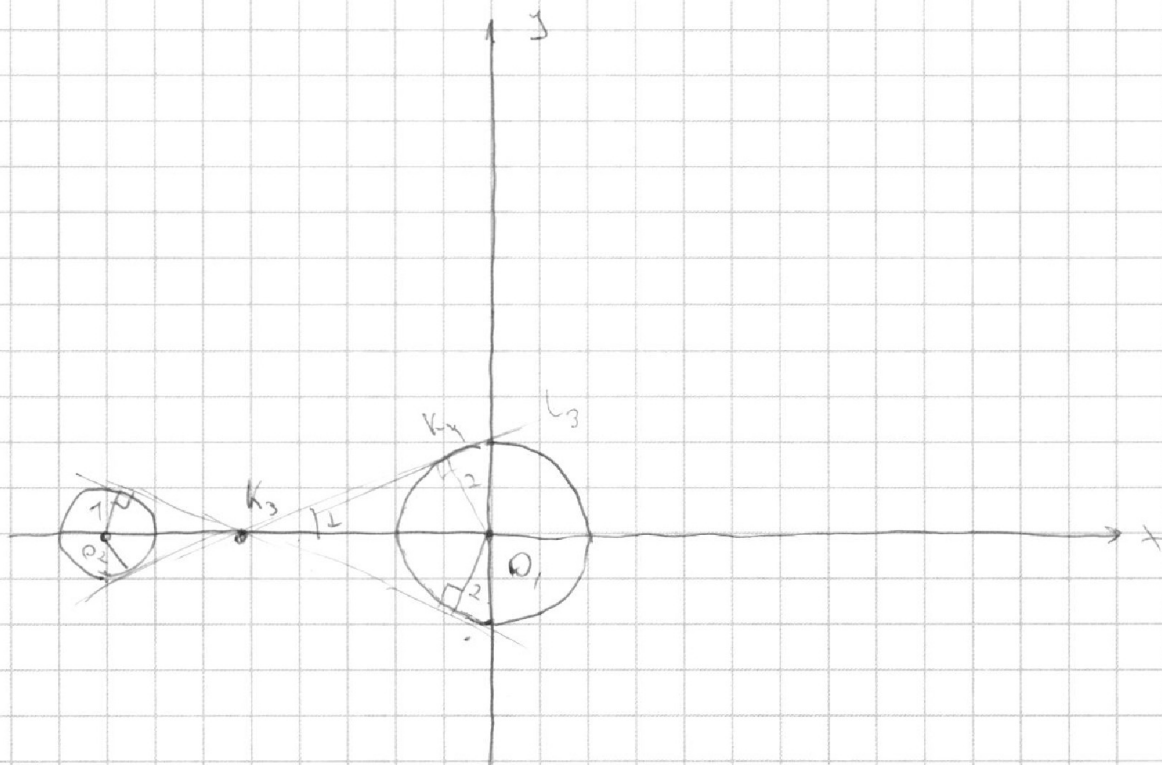
$$\Rightarrow a \cdot (0) - \frac{16}{3\sqrt{41}} + 10b = 0$$

$$10b = \frac{16}{3\sqrt{41}}$$

$$b = \frac{16}{30\sqrt{41}} = \frac{8}{15\sqrt{41}} \Rightarrow a = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{15\sqrt{41}} = \frac{1}{3\sqrt{41}}.$$

Таким образом и "книжной" вышн. кас. $\Rightarrow a = \pm \frac{1}{3\sqrt{41}}.$

Случай с "выпукл." вышн. кас.:



из условия $\frac{O_2K_3}{O_1K_3} = \frac{1}{2}$; $O_2K_3 + O_1K_3 = 8 \Rightarrow O_1K_3 = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow m. \left(-\frac{16}{3}; 0\right) \in \text{центр } L_3$$

$$a \cdot \left(-\frac{16}{3}\right) - 0 + 10b = 0$$

$$10b = \frac{16a}{3} \Leftrightarrow 5b = \frac{8a}{3}$$

$$\text{По т. Пифагора } K_3 X_1 = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4} = \sqrt{\frac{16^2 - 12}{9}} = \sqrt{\frac{161}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{161} \Rightarrow \lg 2 = \frac{3}{\sqrt{161}} = a.$$

$$\text{Значения } a \text{ и координаты центр. точки } y=0 \Rightarrow a = \pm \frac{3}{\sqrt{161}}$$

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{3}{\sqrt{161}}; a = \pm \frac{1}{3\sqrt{41}}$$



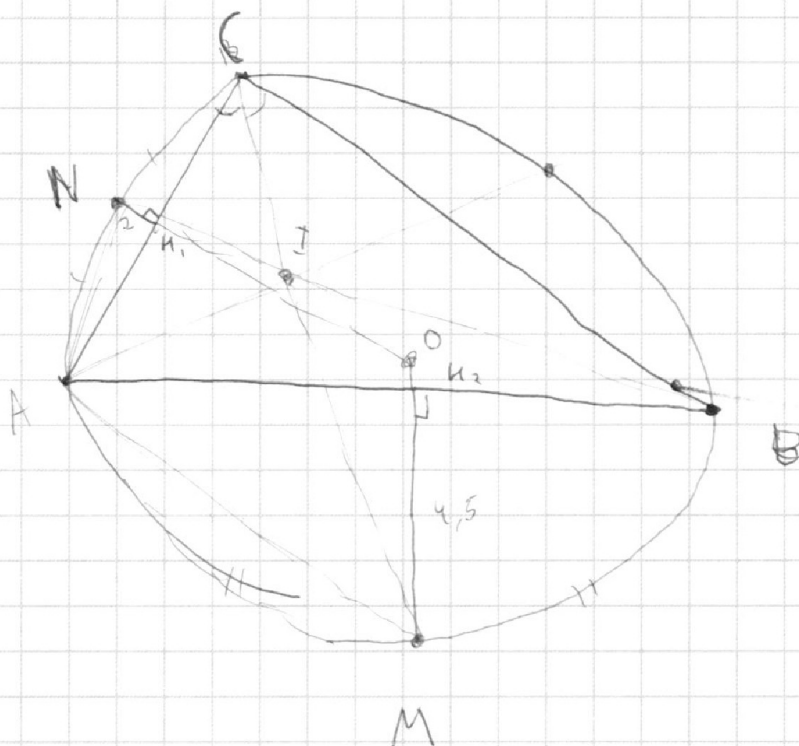
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) BN и CM пересекаются в I . Вспомогательные, и.к.

BN и CM - бис-сы : на равн. кр. при равном угле

2) по лемме о треугольнике : $AN = NI$ и $AM = MI$.

3) $AN = NC \Rightarrow NH_1$ - сер. пер. к AC

аналогично MH_2 - сер. пер. к $AB \Rightarrow$ они пересекутся в центре

опис. окружности $ABC \Rightarrow OH_1 = OH_2 + 2,5$, и.к. $ON = OM$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

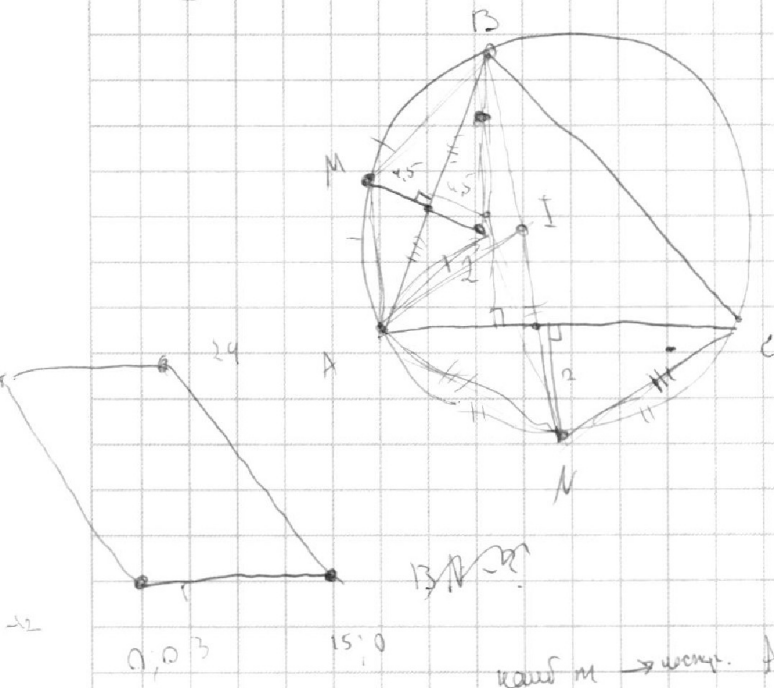
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

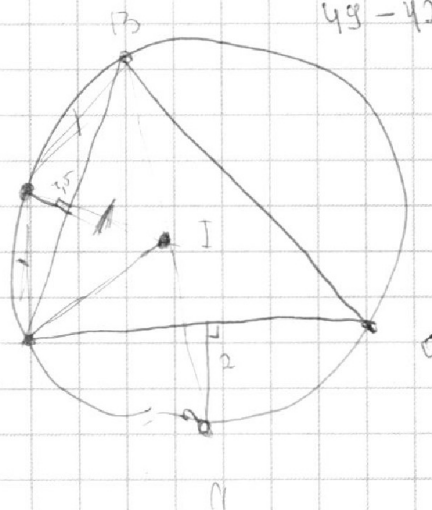


BI - ?

$$m \equiv 8$$

$$a = 7 \quad b = 1$$

$$\frac{49 - 42 + 1}{8}$$



$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$m \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} \right)$$

$$2+3$$

$$\frac{a+b}{(a-b)^2 - 3ab}$$

$$a \equiv k$$

$$b \equiv m-k$$

mod m.

$$a \equiv b$$

$$k \neq 0$$

$$\begin{cases} a^2 \equiv k^2 \\ 6ab \equiv 6k(m-k) \\ b^2 \equiv (m-k)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= k^2 + 6k(m-k) + (m-k)^2 = \\ &= k^2 + 6km - 6k^2 + m^2 - 2mk + k^2 = \\ &= m^2 + 4mk - 4k^2 \equiv \end{aligned}$$

$$k \equiv 0 \pmod{m}$$

$$k \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\equiv 8k^2 \pmod{m}$$

$$8k^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Пусть $ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14}$
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{62} \cdot 7^{64}$$

$$abc = \sqrt{2 k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$\Rightarrow 2k_1 k_2 k_3$ - квадрат ком. числа, иначе abc - не целое, что противоречит условию

1) $k_1 k_2 k_3 = 2$: $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$, $b = 2^6 \cdot 7^{-5}$ - не целое
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

2) $k_1 k_2 k_3 = 8$: $abc = 2^{27} \cdot 7^{32}$, $b = 2^6 \cdot 7^{-5}$ - не целое
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

3) Значит, $k_1 k_2 k_3$ простое 7 , иначе b - не целое: $k_1 k_2 k_3 = 7^2 \cdot 2$

Пусть: $abc = 2^{26} \cdot 7^{33}$, $b = 2^6 \cdot 7^{-5}$
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$\Rightarrow k_1 k_2 k_3 \geq 7^{10}$, иначе b не целое

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$, $b = 2^6$
 $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14}$
 $ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

$k_1 k_2 k_3 \geq 2 \cdot 7^{10}$

$k_1 k_2 k_3 =$

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$

$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$

$k_1 k_2 k_3 =$

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$2k_1 k_2 k_3 = 2^2 \cdot k_2 \cdot 7^{10}$

$k = 2 \cdot 7^{10}$

$2k = 2^2 \cdot 7^{10}$

$k_1 = k_2 = k_3$

$k_1 k_2 k_3 = k_3^2 \cdot 2 \cdot 7^{10}$

$b = \frac{2}{7^5} k_3$

$k_1 = k_2 = k_3$

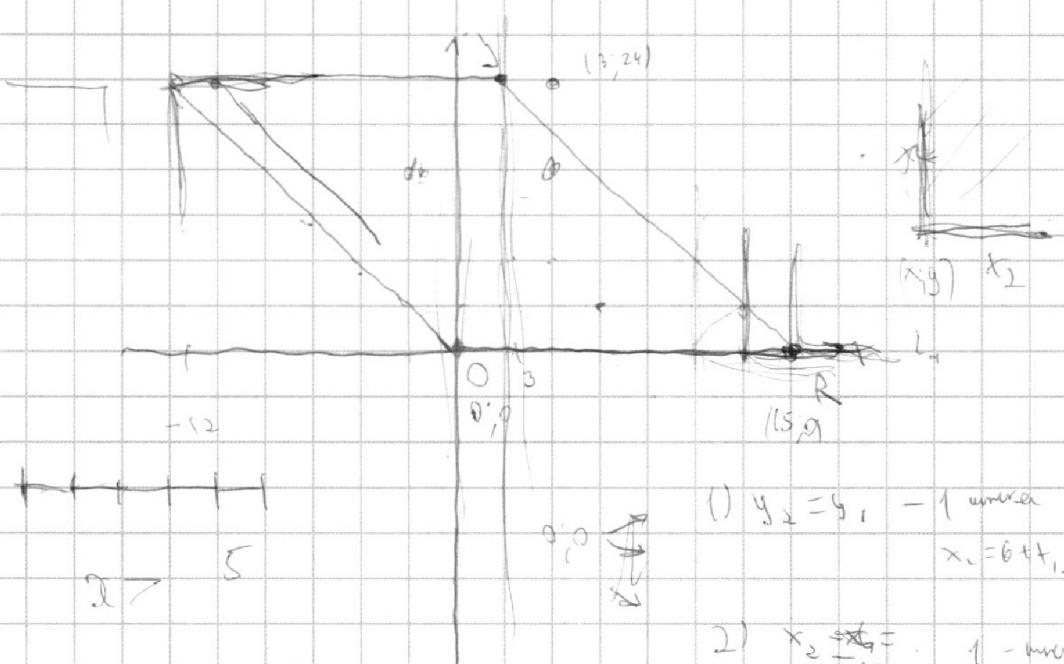
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

[illegible]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

(1) $y_2 = y_1 - 1$ unter
 $x_2 = 6 + t_1$

2) $x_2 \stackrel{\text{star}}{=} x_1$ 1 - max.

$x_2 \geq x_1$ (nicht möglich)

$$y_2 \rightarrow y_1$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12.$$

$$1) x_2 > x_1$$

2

C, A
W, A
S, 2
4, 7
3, 6
2, 4
1, 10
0, 12

1. 2. 3.

$$x_2 < x_1$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$(y_2 - y_1) = 12 + 2(x_1 - x_2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит, ответ:

$$252 + 658 + 182 = 260 + 180 + 660 - 2 = 440 + 660 - 2 = 1100 - 2 = 1098 \text{ мин}$$



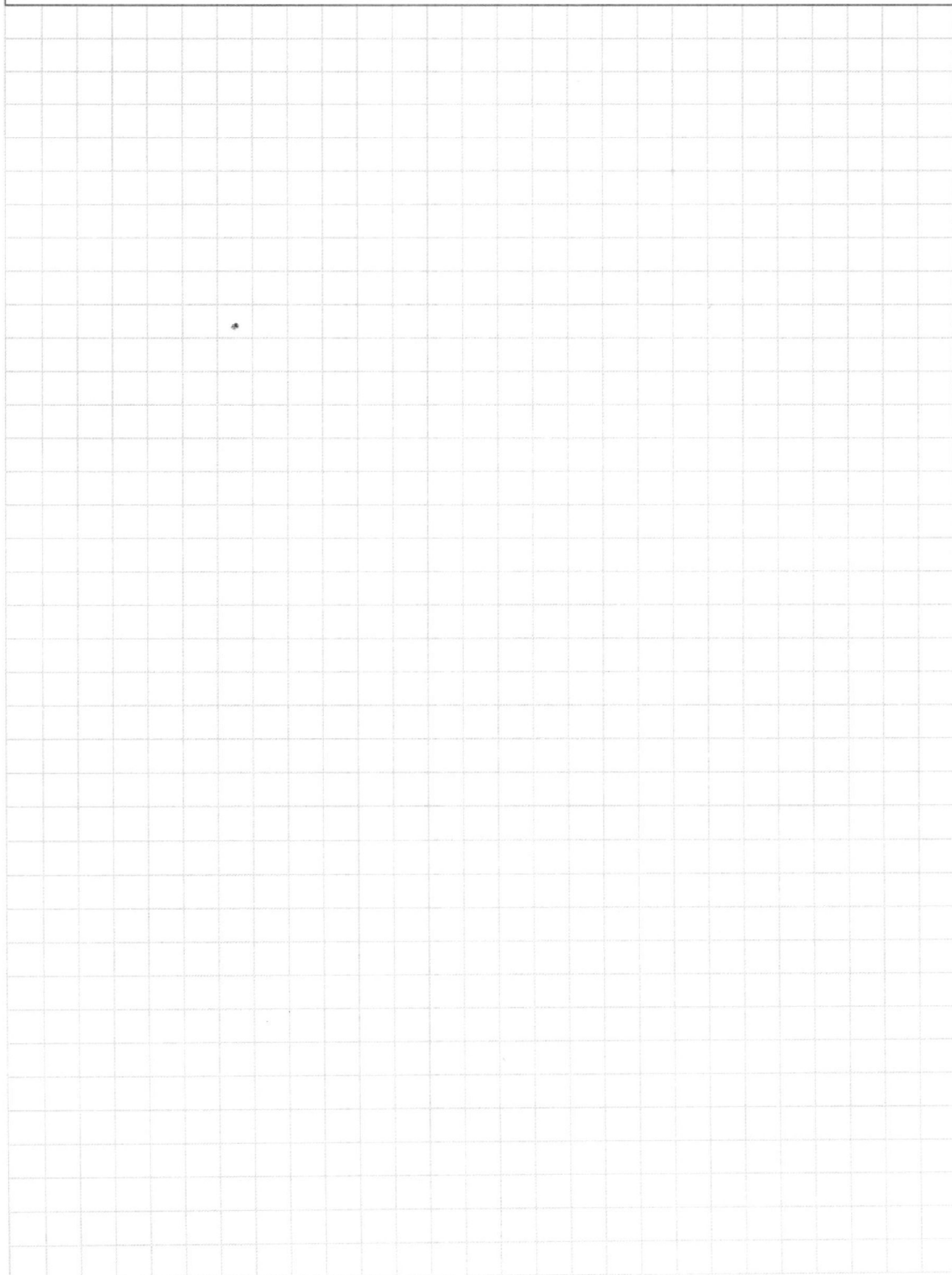
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 7^{12}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$\frac{a}{c} = 2^{32} \cdot 7^{27}$$

$$\frac{c}{a} = 2^4 \cdot 7^7$$

$$c^2 = 2^{24} \cdot 7^{44}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{22}$$

$$a = 2^3 \cdot 7^{15}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^5$$

$$\frac{2k_1 k_2}{k_3} = 7^{10} \cdot 2$$

$$\frac{k_1 k_2}{k_3} = 7^{10}$$

$$k_1 k_2 = k_3 \cdot 7^{10} \mid k_3$$

$$2k_1 k_2 k_3 = k_3^2 \cdot 7^{10} \cdot 2 \mid k_3^2$$

$$\frac{2k_1 k_3}{k_2} = \left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$\frac{k_3}{k_2} = 2 \cdot 7$$

$$1-10$$

$$2-9$$

$$11-10$$

$$\frac{4-5}{2} = 10$$

$$\frac{5-6}{2} =$$



$$ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{13} \cdot 7^{12}$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$abc = \sqrt{2k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$c = \sqrt{\frac{2k_1 k_2}{k_3}} \cdot 2^5 \cdot 7^7$$

$$\frac{a}{b} = \text{целое}$$

$$(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$ab = 7^{10} \cdot 2^{11} \cdot 7^{10} = 2^{11} \cdot 7^{20}$$

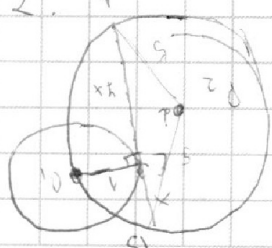
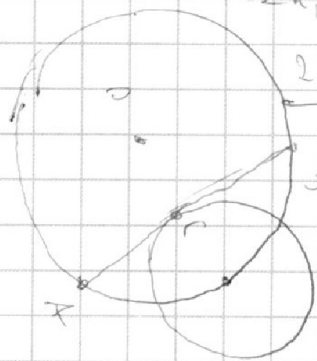
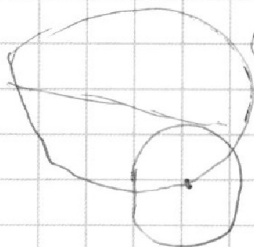
$$bc = 2^{13} \cdot 7^{12}$$

$$ac = 2^{21} \cdot 7^{34}$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{20}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{14}$$

$$b = 2^5$$



$$\frac{8x}{\sin x} = 10$$

$$\frac{4x}{\sin x} = 5$$

$$\frac{5x}{\sin x} = 10$$

18

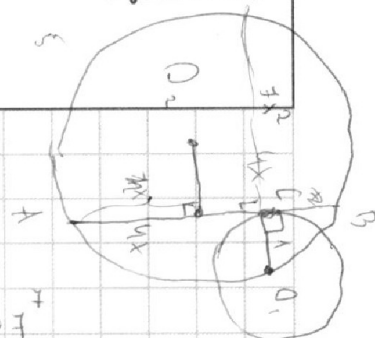
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\left. \begin{aligned} ab &= k_1 \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &= k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14} \\ ac &= k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{27} \end{aligned} \right\} *$$

$$\begin{aligned} 37 + 14 &= 51 \\ 27 + 17 &= 44 \end{aligned}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{k_2}{k_1} \cdot 2^3 \cdot 7^4$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 7^{27}$$

$$c^2 = \frac{k_2 k_3}{k_1} \cdot 2^{23} \cdot 7^{44}$$

$$a^2 b^2 c^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$abc = \sqrt{2 k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{40} \cdot 7^{32}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

$$\begin{aligned} ab &= 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{14} \end{aligned}$$

$$\frac{k_2 k_3}{k_1} \geq 2$$

$$\frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{c}{a} = \frac{k_2}{k_1} \cdot 2^3 \cdot 7^4; \quad c = a \cdot 2^3 \cdot 7^4 \cdot \frac{k_2}{k_1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{k_3}{k_2} \cdot 2^3 \cdot 7^{20}$$

$$c = a \cdot 2^3 \cdot 7^4 = 2^6 \cdot 7^{22} \cdot b$$

$$a = 2^3 \cdot 7^{20} \cdot b \cdot \frac{k_3}{k_2}$$

$$a = b \cdot 2^3 \cdot 7^{20}$$

$$k_1 k_2 k_3 \geq 2$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 2$$

$$a = 2 \cdot 7^2 \quad b = 2 \cdot 7^3$$

$$\frac{c}{b} = \frac{k_3}{k_1} \cdot 2^6 \cdot 7^{27} \quad | \cdot bc$$

$$c^2 = \frac{k_3 k_2}{k_1} \cdot 2^{14} \cdot 7^{44}$$

$$b = \frac{k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14}}{c}$$

$$a =$$

$$\begin{aligned} ac &= 2^{21} \cdot 7^{37} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ab &= 2^{14} \cdot 7^{10} \end{aligned}$$

$$a = 2 \cdot 7^2$$

$$\frac{a}{c} = \frac{k_1}{k_3}$$

$$b = \frac{2^{17} \cdot 7^{14}}{c}$$

$$b = \frac{2^{11} \cdot 7^{10}}{a} \Rightarrow ac = 2^8$$

$$\frac{k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{14}}{c} = \frac{2^{11} \cdot 7^{10}}{a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$-7x + 2 = (2 - 7x) S.$$

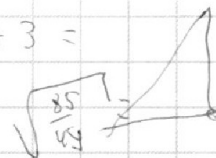
$$-(4x - 2)$$

$$-(4x - 2) + (7x - 2)$$

$$x = \frac{2}{3}$$

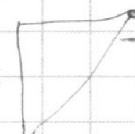
$$x = \frac{2}{3} \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\frac{8}{49} - \frac{10}{7} = \frac{-62}{49} + 3 =$$



$$\frac{5 \cdot 17}{49} = \frac{\sqrt{151}}{7}$$

$$3 \cdot 49 - 62 =$$



$$D = 4 - 4 \cdot 2 = -4$$

$$= \frac{85}{49}$$

$$y_0 = -\frac{4}{4} = -1$$

$$(50 - 1) \cdot 3 =$$

$$x_0 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$= 150 - 3 =$$

$$= 147 - 62 =$$

$$= 85$$

$$\frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$147 - 62 =$$

$$= 85$$

$$2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{13}{4}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$28$$

$$830 - 1 =$$

$$260 - 2 = 650$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$y_0 = -$$

$$2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$y^2 = 2x^2 - 5x + 3$$

$$2x^2 - 5x + 3 =$$

$$= (2x + 1)(x + 3) =$$

$$(2x + 3)(x + 1) = 0$$

$$= 2x^2 - 6$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$2x^2 - 2x - 3x + 3$$

$$\frac{28}{28} = \frac{28}{28}$$

$$\frac{30}{30} = \frac{30}{30}$$

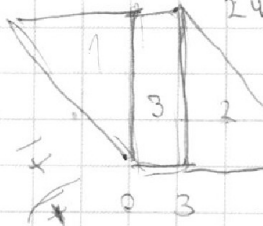
$$24$$

$$\frac{-5 \pm 1}{4} = -1$$

$$\frac{-5 \pm 1}{4} = -1$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$2x^2 - 2x - 3x + 3$$



$$17$$

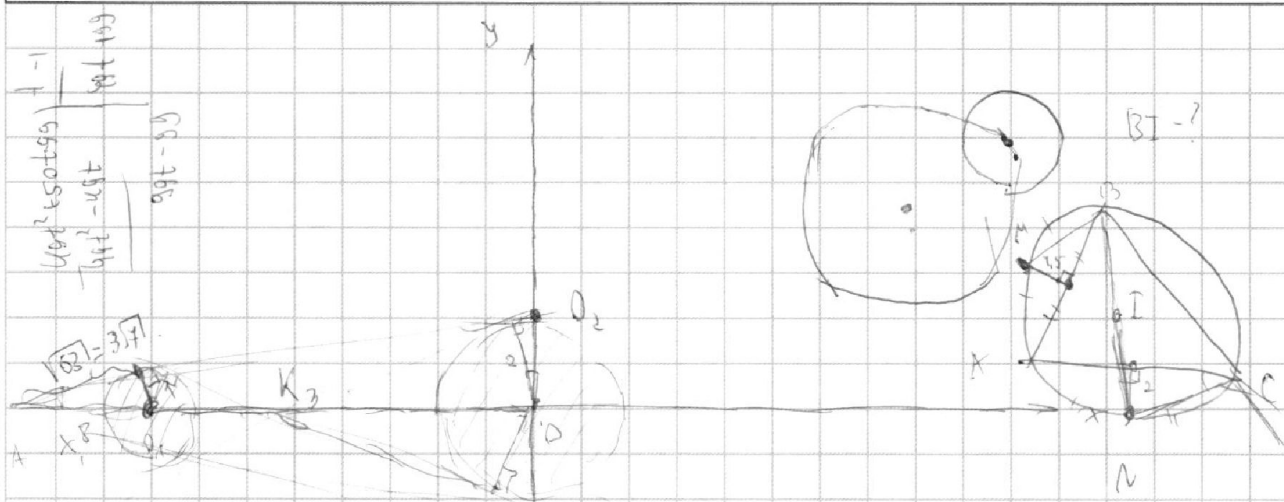
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AO_1 = 8$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AO_1}{AO} \Rightarrow AO_1 = AO \cdot \frac{1}{2}$$

$$AO_1 + 8 = AO$$

$$\frac{1}{2} AO + 8 = AO \Rightarrow AO = 16$$

$$2 \cdot 122 = 244$$

2 решения

$$\Rightarrow ax - y + 101 - \sqrt{a^2 + 1}$$

$$1) (x+3)^2 + y^2 \leq 1$$

линия окружности

$$x^2 + y^2 \geq 4$$

$$\frac{244 - 12}{9} = 24$$

$$x^2 + y^2 - 4 = ax - y + 101$$

$$\sin \frac{1}{2} \pi = 1$$

$$x^2 - ax + y^2 + y - 105 = 0$$

$$\lg 2 = \frac{1}{3.57} = \frac{0.02}{16}$$

$$AO_1 = \frac{1}{2} \cdot AO$$

$$AO_2 = \frac{16}{3.57}$$

$$AO = 16$$

$$AO_1 = 8$$

$$y = \frac{1}{3.57} x + \frac{80}{3.57}$$

$$\frac{1}{3.57} (x+16) = x^2 + y^2 - 4$$

$$\frac{16}{3} : \frac{8}{3}$$