



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть k_1, k_2, k_3 - это натур. число, где

$$\begin{aligned} 1) \quad ab &= k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \\ 2) \quad bc &= k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \\ 3) \quad ac &= k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{29} \end{aligned}$$

Перемножив (1), (2) и (3), получаем:

$$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

слева квадрат натур. число,
т.е. и справа квадрат натур.

Тогда степени всех простых
должны быть четными.

~~тогда, так как~~
~~тогда, так как~~
~~тогда, так как~~
~~тогда, так как~~

Перемн. (1) и (2):

$$ac \cdot b^2 = k_1 k_2 \cdot 2^9 \cdot 7^{29} = k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{29} \cdot b^2$$

$$k_1 k_2 \cdot 2^9 = k_3 \cdot 7^{10} \cdot b^2$$

$$k_1 k_2 : 7^{10}$$

$$k_3 \cdot b^2 : 2^9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $a, p, c \in \mathbb{N}$

Черновик

$$ap = 2^{15} \cdot 7^2$$

$$pc = 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Пусть $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$:

$$ap = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^2$$

$$pc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = k_3$$

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 7^{10}$$

$$k_3 = 2$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

$$b = 2^4$$

$$a = 2^4$$

$$ap = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^2$$

$$a \cdot 2^4 = 2^{15} \cdot 7^2$$

$$a = 2^{11} \cdot 7^2$$

$$ac = 2^{15} \cdot 7^4 \cdot 2$$

$$k_1 k_2 = 7^{10}$$

$$k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$$

$$ap = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^2$$

$$pc = k_2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~решение задачи~~
~~а) $a = k_1 \cdot 2^{11} \cdot 7^{11}$~~
~~б) $c = k_2 \cdot 2^{13} \cdot 7^{13}$~~
~~в) $ac = 2^{24} \cdot 7^{24}$~~
~~г) $k_1 k_2 = 7^{10}$~~

$$a = k_1 \cdot 2^{11} \cdot 7^{11}$$

$$c = k_2 \cdot 2^{13} \cdot 7^{13}$$

~~а) $ac = 2^{24} \cdot 7^{24}$~~

$$ac = 2^{24} \cdot 7^{24}$$

$$k_1 k_2 = 7^{10}$$

~~решение задачи~~

$$ac = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Например,

~~а) $a = 7^{16} \cdot 2^{11}$~~

~~б) $c = 7^{23} \cdot 2^{13}$~~

$$k_1 = k_2 = 7^5$$

$$a = 7^{16} \cdot 2^{11}$$

$$c = 7^{23} \cdot 2^{13}$$

$$b = 2^4$$

$$\text{Orbit: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 2 \\ \hline 578 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 578 \\ \times 109 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 33 \\ \hline 57 \\ + 57 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\cancel{x \cdot \sqrt{17^2 x^2 + 7^2}} \quad \sqrt{x^2 + 1} = 26$$

$$(17^2 x^2 + 7^2)(x^2 + 1) = 26^2$$

$$|x^2 = a|$$

$$(17^2 a + 7^2)(a + 1) = 26^2$$

$$17^2 a^2 + 17^2 a + 7^2 a + 7^2 - 26^2 = 0$$

$$17^2 a^2 + a(17^2 + 7^2) + 19 \cdot 33 = 0$$

$$D = (17^2 + 7^2)^2 + 17^2 \cdot 4 \cdot 19 \cdot 33$$

$$D = 17^4 + 2(7 \cdot 17)^2 + 7^4 + 17^2 \cdot 4 \cdot 19 \cdot 33$$

$$\cancel{D = 17^4 + 2(7 \cdot 17)^2 + 7^4 + 17^2 \cdot 4 \cdot 19 \cdot 33}$$

$$D = 17^2(17^2 + 4 \cdot 19 \cdot 33) + 7^2(7^2 + 2 \cdot 17^2)$$

$$D = 17^2(17^2 + 4 \cdot 627) + 7^2 \cdot 627$$

$$D = 17^4 + 4 \cdot 627 \cdot 17^2 + 7^2 \cdot 627 =$$

$$= 627(4 \cdot 17^2 + 7^2) + 17^4 =$$

$$= 627 \cdot 1405 + 17^4$$

$$x^2 = a = \frac{\sqrt{17^4 + 627 \cdot 1405} - (17^2 + 7^2)}{2 \cdot 17^2}$$

$$x = \frac{\sqrt{17^4 + 627 \cdot 1405} - (17^2 + 7^2)}{2} \cdot \frac{1}{17}$$

Ответ:

$$AB = 24x = \frac{24}{17} \cdot \frac{\sqrt{17^4 + 627 \cdot 1405} - (17^2 + 7^2)}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(9) \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (1 - 9x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0, & (3) \\ 3x^2 - 6x + 2 \geq 0, & (2) \\ 3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 + & (4) \\ \quad + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}, & (1) \end{cases}$$

$$1) \quad 3x^2 - 6x + 2 = x - 18x + 81x^2 + 3x^2 + 3x + 1 + \\ + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-9x + 81x^2 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$9x(9x - 1) - 2(9x - 1)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$(9x - 1)(9x - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$

$$x = \frac{1}{9},$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \quad (*)$$

*) Заметим, что дискриминант

$$3x^2 + 3x + 1 \text{ равен } 9 - 3 \cdot 4 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 > 0 \quad \forall x.$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} D &= 144 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = (4 \cdot 3)^2 + 4^2 \cdot 69 = \\ &= 4^2 (9 + 69) = 4^2 \cdot 78 \end{aligned}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{78}}{2 \cdot 3 \cdot 23}$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

Таким образом, 1) имеет 3 решения:

$$\begin{aligned} x &= \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}, \\ x &= \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

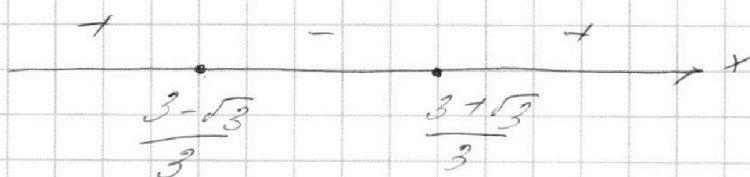
$$2) 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} D &= 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 - 2^2 \cdot 2 \cdot 3 = \\ &= 2^2 \cdot 3 (3 - 2) = 2^2 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$3 \left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \right) \left(x - \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \right) \geq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$3) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x - 1$$

Если $9x - 1 \leq 0$, кр-во выполняется.
~~при $x \leq \frac{1}{9}$~~

В-и случай, когда $9x - 1 \geq 0$.

Поскольку левая и правая части
кр-ва неотриц., возведём в
квадрат без переноса знака.

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 81x^2 - 18x + 1$$

$$78x^2 - 21x \leq 0$$

$$x(78x - 21) \leq 0$$

$$3x(26x - 7) \leq 0$$



$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$④ \quad x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$x \in [0; \frac{7}{26}]$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{9} \\ x = \frac{6 \pm 2\sqrt{48}}{69} \end{array} \right.$$



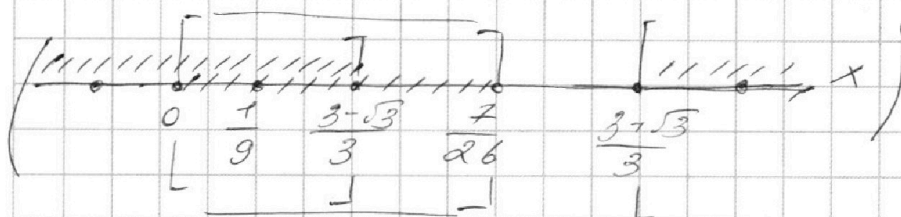
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

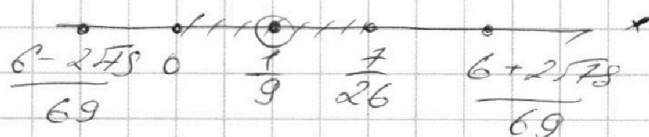
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Итого:



Ответ: $x = \frac{1}{9}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$ab = 7^{12} \cdot 2^{18}$~~
 ~~$bc = 7^{27} \cdot 2^{17}$~~
 ~~$ac = 2^{24} \cdot 7^{39}$~~

$a \cdot 2^4 = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $2^4 \cdot c = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$
 $ac = 2^{24} \cdot 7^{39}$
 $k_1 k_2 = 7^{10}$

$k_1 k_2 = 7^{10}$

~~$k_1 = 7$~~
 ~~$k_2 = 7^9$~~
 ~~$k_3 = 2$~~

~~$ab = 2^{15} \cdot 7^4$~~
 ~~$bc = 7^{27} \cdot 2^{17}$~~
 ~~$ac = 2^{24} \cdot 7^{39}$~~

~~$bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$~~

~~$c = k_2 \cdot 2^{13} \cdot 7^{18} = 7^{23} \cdot 2^{13}$~~
 ~~$k_2 = 7^5 \quad k_1 = 7^5$~~

~~$a = 7 \cdot 2^{26}$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Реш $k_1 k_2 = 7^{10}$, тогда $k_3 k^2 = 2^9$

$$b = 2^4$$

$$k_3 = 2$$

(1)

$$b = 2^3$$

$$k_3 = 2^3$$

(2)

$$b = 2$$

$$k_3 = 2^7$$

(3)

1) $k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 7^{10}$

$$b = 2^4$$

~~Или~~

~~$$2c = k_1 \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$~~

~~$$ac = 2^{24} \cdot 7^{39}$$~~

~~$$ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$~~

~~$$a \cdot 2^4 = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$~~

~~$$a = \frac{2^{24} \cdot 7^{39}}{2^4} = 2^{20} \cdot 7^{39} k_1$$~~

~~$$2^{13} \cdot 7^{28} = 2^{24} \cdot 7^{39} k_1 c$$~~

~~$$2^{13} \cdot 7^{28} = k_1 c$$~~

~~или~~

Если такой
случай us
построится,
то gr
рассм. не
обяз, $k_1 k_2$
на отлени,
так как
при $min(ac)$
получит $\uparrow$
 $min(k_1 k_2 k_3)$.

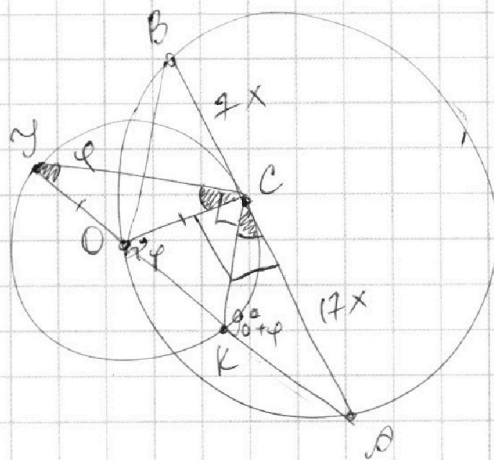
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle YAC$:

$$\frac{17x}{\sin \varphi} = \frac{YC}{\cos 2\varphi}$$

~~ошибка~~

$\triangle YOC$:

$$\frac{YC}{\sin 2\varphi} = \frac{2}{\sin \varphi}$$

$$YC = \frac{2 \sin 2\varphi}{\sin \varphi} = 4 \cos \varphi$$

$$\frac{17x}{\sin \varphi} = \frac{4 \cos \varphi}{\cos 2\varphi}$$

$\triangle OBA$:

$$\frac{OB}{\cos 2\varphi} = 2R$$

$$\frac{7\sqrt{x^2+1}}{\cos 2\varphi} = 26$$

$$\cos 2\varphi = \frac{7\sqrt{x^2+1}}{26} = 2\cos^2 \varphi - 1$$

Т. Пиф.

для $\triangle OBC$:

$$OB^2 = 7^2 + 17^2 - 2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot \cos \varphi$$

$$OB = 7\sqrt{x^2+1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

$$3) \quad 1-9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

Поскольку левая и правая части
выражений неотрицательны, возведем
квадраты без перемены знака.

~~Следует~~

(7)

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right) \\ x = \frac{1}{9} \pm 2\sqrt{\frac{3}{27}} \\ x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{69} \end{array} \right.$$

$$\frac{81 \pm 3}{21}$$

$$54-17=44-7=40-3=37$$

$$\sqrt{\frac{4}{27} - \frac{18}{27} + \frac{54}{27}} =$$

$$= \sqrt{\frac{37}{27}}$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2}$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{9}{27} + \frac{27}{27}} = \sqrt{\frac{37}{27}}$$

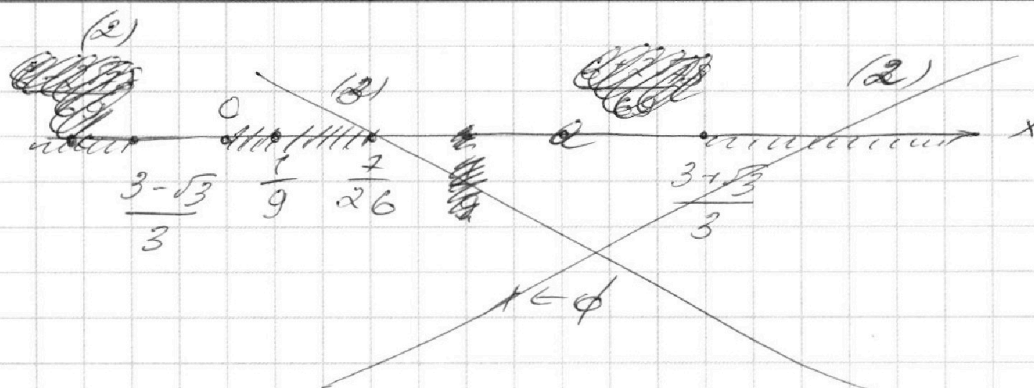
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2 = \frac{37}{27}$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 6 = 36 - 24 = 12 = 4 \cdot 3$$

$$x = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \text{ or } \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \text{ or } \frac{1}{9}$$

$$9 - 3\sqrt{3} \text{ or } 1$$

$$8 \text{ or } 3\sqrt{3}$$

$$64 \text{ or } 9 \cdot 3 = 27$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle OBC$:

$$\frac{OB}{\sin(90^\circ - 2\varphi)} = 2R$$

$$\frac{7\sqrt{1+x^2}}{\cos 2\varphi} = 26$$

$\triangle AOC$:

$$\frac{7}{\sin \varphi} = 2R$$

$$\frac{7}{\sin \varphi} = 14^2$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$14\sqrt{1+x^2} = 26$$

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{26}{14} = \frac{13}{7}$$

$$1+x^2 = \left(\frac{13}{7}\right)^2$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{13}{7}\right)^2 - 1}$$

$$x = \sqrt{\frac{169-49}{49}} = \sqrt{\frac{120}{49}} = \frac{2}{7}\sqrt{30}$$

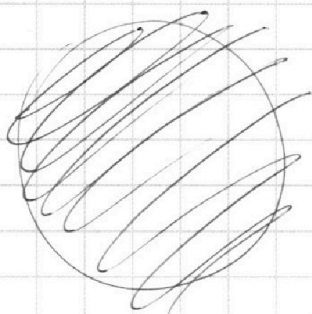
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Стенды лампы
в гал. окр. к:

$$7 \cdot CX = 171 \cdot 7x^2$$

$$CX = 17x^2$$

Т. секунд для

$\triangle OVB$:

$$\frac{BX}{\sin 24} = 2R$$

$$\frac{BX}{\sin 24} = 26$$

По к. Пир.
для $\triangle BSA$:

$$BX^2 = CX^2 + BC^2$$

$$BX^2 = 17^2 x^4 + 7^2 x^2$$

$$BX = x \sqrt{17^2 x^2 + 7^2}$$

$\triangle OCB$:

$$\sin 24 = \frac{BC}{OB} = \frac{7x}{7+KB}$$

По к. ~~к~~ Косинус КАС.

$$7^2 x^2 = KB^2 (14+KB)$$

$$KB^2 + 14KB - 7^2 x^2 = 0$$

$$D = 14^2 + 4 \cdot 7^2 x^2$$

$$= 14^2 (1+x^2)$$

$$KB = \frac{-14 + 14\sqrt{x^2+1}}{2}$$

$$KB = 7\sqrt{x^2+1} - 7$$

$$7+KB = 7\sqrt{x^2+1}$$

$$\sin 24 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$



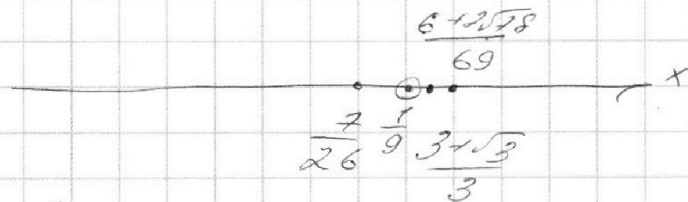
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{7}{26} < \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$$21 < 26 \cdot 3 + 26\sqrt{3}$$

$$21 - 26 \cdot 3 < 26\sqrt{3}$$

$$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$23 \cdot 3$

$$6+2\sqrt{78} < 23 \cdot 3 + 23\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{78} - 23\sqrt{3} < 23 \cdot 3 - 6 = 63$$

$$2 \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{3} - 23\sqrt{3} < \frac{63}{\sqrt{3}} \cdot 21$$

$$2\sqrt{26} - 23 < 21\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{26} - 21\sqrt{3} < 23$$

$$\frac{78}{6} \div \frac{3}{26}$$

$$\frac{7}{26} > \frac{1}{9}$$

$$63 > 26$$

$$2\sqrt{26} < 21\sqrt{3}$$

$$4 \cdot 26 < 21 \cdot 3$$

~~Handwritten scribbles~~

~~Handwritten scribbles~~

~~Handwritten scribbles~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6 - 2\sqrt{78} \approx 0$$

$$6 \approx 2\sqrt{78}$$

$$36 \approx 4 \cdot 78$$

$$\frac{7}{26} \triangleright \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$7 \cdot 69 \triangleright 26 \cdot 6 + 26 \cdot 2\sqrt{78}$$

$$7 \cdot 69 - 26 \cdot 6 \triangleright 26 \cdot 2\sqrt{78}$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \vee \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\frac{13 - 3}{3} \wedge \frac{2\sqrt{78} - 6}{69}$$

$$69 \cdot 7$$

$$69\sqrt{3} -$$

$$7 \cdot 69^2 + (26)^2 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 26 \cdot 7 \cdot 69 \triangleright$$

$$\frac{3 - 1,7}{3} \wedge \frac{18 - 6}{69}$$

$$\triangleright (26)^2 4 \cdot 78$$

$$\frac{1,3}{3} \triangleright \frac{12}{69}$$

$$69 \cdot 7 (69 \cdot 7 - 2 \cdot 6 \cdot 26) \triangleright$$

$$\vee 26^2 (4 \cdot 78 - 36)$$

$$69,13 \triangleright 36$$

$$\begin{array}{r} 269 \\ 7 \\ \hline 483 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 26 \\ + 72 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 483 \\ - 312 \\ \hline 171 \end{array}$$

$$69 \cdot 7 \cdot 171 \triangleright$$

$$\vee 26 \cdot 276$$

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ 4 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 312 \\ - 1010 \\ \hline 36 \\ 276 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 171 \\ 7 \\ \hline 1197 \end{array}$$

$$69 \cdot 1197 \triangleright 26 \cdot 276$$

$$\frac{3 - 1,7}{3} \vee \frac{16 - 6}{69}$$

$$\frac{1,3}{3} \vee \frac{10}{69}$$

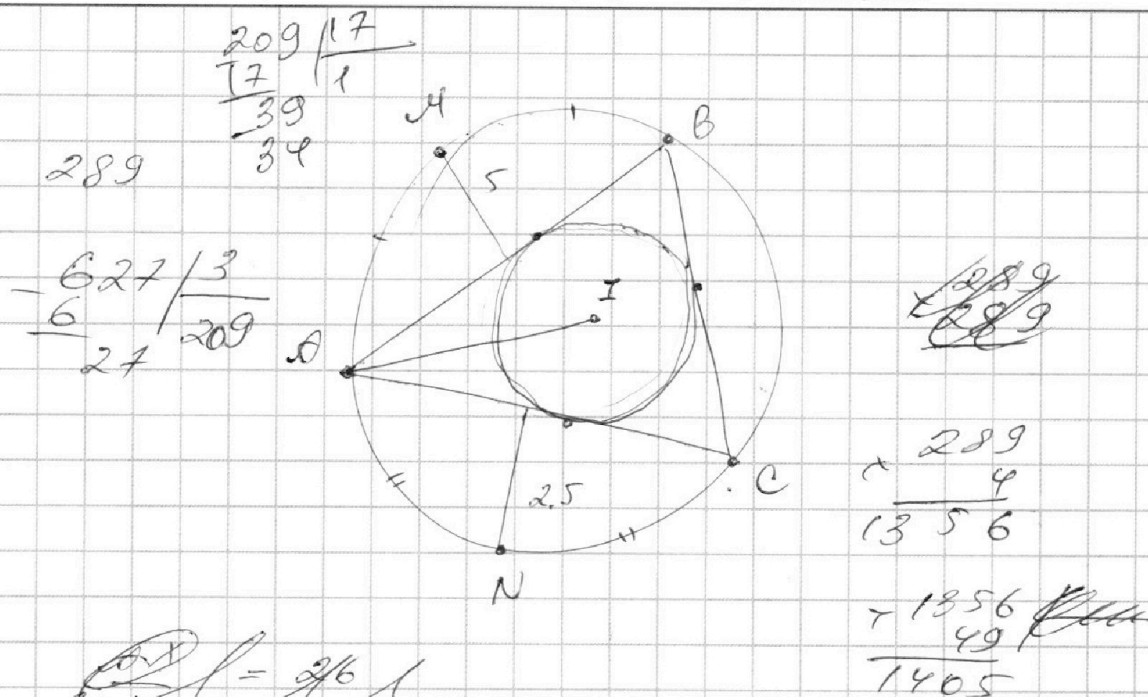
$$69 \cdot 1,3 \vee 30$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{20}{2000} = \frac{2}{200}$

[Handwritten signature]

$$\frac{BA}{\sin 2\varphi} = 26$$

$$\sin 24 = \frac{7x}{7}$$

$$\frac{BA}{2x} \cdot 7 = 26$$

$$BX^2 = (7x)^2 + (17x^2)^2$$

KL 477

$$BA^2 = 7^2 + 12^2$$

$$B_1 = x \sqrt{7^2 + 17^2}$$

$$\sqrt{4 \cdot 12} = 7 \cdot 7 = 26$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\frac{7\sqrt{x^2+1}+1}{26}+1}{2} = \cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$$

$$1 - \frac{\frac{7\sqrt{x^2+1}+1}{26}+1}{2} = \sin^2 \varphi$$

$$\frac{2(17x)^2}{1 - \frac{7\sqrt{x^2+1}}{26}} = \frac{7 \cdot 7 \cdot \left(\frac{7\sqrt{x^2+1}}{26}+1\right)}{\frac{7\sqrt{x^2+1}}{26}}$$

$$\left| \frac{7\sqrt{x^2+1}}{26} = a \right|$$

$$\frac{(17x)^2}{1-a} = \frac{7^2(a+1)}{a}$$

$$7^2(1-a^2) = (17x)^2 \cdot a$$

$$7^2 \left(1 - \frac{49}{26}(x^2+1)\right) = 17^2 x^2 \frac{7\sqrt{x^2+1}}{26}$$

$$\left| \sqrt{x^2+1} = b \right|$$

$$x^2 = b^2 - 1$$

$$7^2 - \frac{7^3}{26} \cdot b^2 = 17^2(b^2-1) \cdot \frac{7b}{26}$$

$$26 \cdot 7 - 7^3 \cdot b^2 = 17^2(b^2-1) \cdot b$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$14y + 3y^2 = y^2 + 7y$$

$$2y^2 + 7y = 0$$

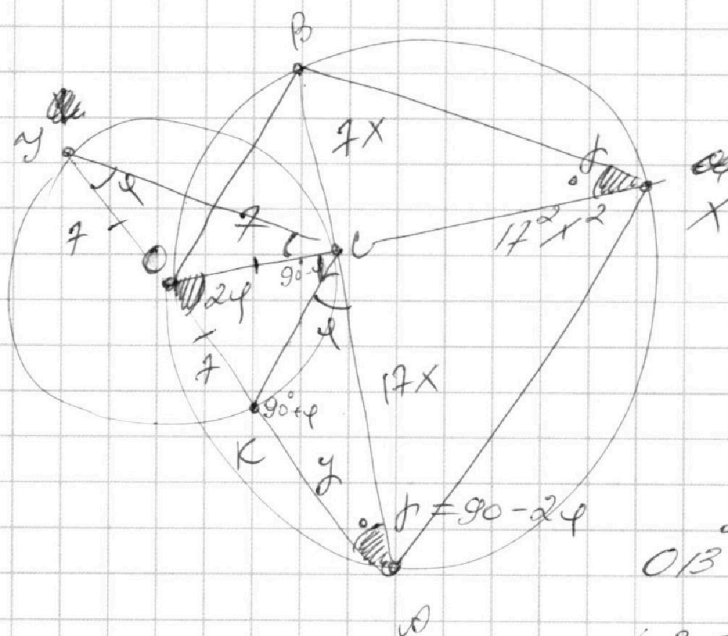
$$2y + 7 = 0$$

$$y = -\frac{7}{2} \quad 999$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$r = 7$$

$$R = 13$$



$$\begin{aligned} \mu &= 180 - 90 - \varphi - \varphi = \\ &= 90 - 2\varphi \end{aligned}$$

$$OB^2 = 7^2 + (7x)^2$$

$$OB = 7\sqrt{1+x^2}$$

$$y(y+14) = 17^2 x^2$$

$$(7+y)^2 = 7^2 + 17^2 x^2$$

$$7^2 + (7x)^2 = (7+y)^2$$

$$\sqrt{7^2 + (7x)^2} - 7 = y$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

min $a|c$ - ?

$$a|b: 2^{15} \cdot 7''$$

$$b|c: 2^{14} \cdot 7^{18}$$

$$a|c: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

~~черновик~~

$$a|b = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7''$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 23 \end{array}$$

$$b|c = k_2 \cdot 2^{14} \cdot 7^{18}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 11 \end{array} + 29$$

$$a|c = k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 11 \end{array} + 50$$

$$\frac{a|b \cdot a|c}{b|c} = a^2 = \frac{k_1 k_3}{k_2} \cdot \frac{2^{38} \cdot 7^{50}}{2^{14} \cdot 7^{18}}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 32 \\ 23 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$a^2 = \frac{k_1 k_3}{k_2} \cdot 2^{24} \cdot 7^{32}$$

$$\frac{k_1 k_3}{k_2}$$

$$(a|c)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$k_1 k_2 k_3 = 2$$

$$a|c \cdot b^2 = k_1 k_2 \cdot 2^{39} \cdot 7^{38} = k_3 \cdot 2^{10} \cdot 7^{39} \quad a|c \cdot b^2 = \frac{a|c \cdot b^2}{k_3} = \frac{2^{39} \cdot 7^{38}}{2^{10} \cdot 7^{39}} = \frac{2^{29} \cdot 7^{-1}}{7^1} = \frac{2^{29}}{7^2}$$

$$k_1 k_2 \cdot 2^9 = k_3 \cdot 7^{10}$$

$$\frac{2^9}{k_3}$$

$$\frac{2^{10}}{k_3} = k_3 \cdot 7^{10}$$

$$\frac{2^{10}}{7^{10}} = k_3^2 \quad k_3 = \frac{2^5}{7^5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC$:

$$7^2 + (17x)^2 = (y+7)^2$$

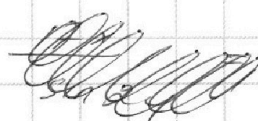
$$y(y+7) = (17x)^2$$

$$(y+7)^2 - 7^2 = y(y+7)$$

$$y^2 + 14y = y^2 + 7y$$

$\triangle KCB$:

$$\frac{y}{\sin \varphi} = \frac{17x}{\sin(90^\circ - \varphi)}$$



$$\frac{y}{\sin \varphi} = \frac{17x}{\cos \varphi}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{17x}$$

$\triangle OCB$:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{17x}{7+y} = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$17x^2 = y(y+7)$$

$$\frac{17x}{7+y} = \frac{2y}{17x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{y^2}{17^2 x^2}}$$

$$17^2 x^2 \left(1 - \frac{y^2}{17^2 x^2}\right) = 2y(7+y)$$

$$17^2 x^2 - y^2 = 2y(7+y)$$

$$17^2 x^2 - y^2 = 14y + 2y^2$$

$$17^2 x^2 = 14y + 3y^2 = y(y+7) = y^2 + 7y$$

$x = ?$

$$k_2 = 1^{10}$$

$$k_3 = 1$$

$$7^{10} \cdot 2^9 = 7^{10} \cdot 6^2$$

$$7^{10} \cdot 2^9 = k_3 \cdot 7^{10} \cdot 6^2$$

$$2^9 = k_3 \cdot 6^2$$

$$k_3 = 2 \quad 6 = 2^3$$

$$k_3 = 2^3 \quad 6 = 2^3$$

$$k_3 = 2^4 \quad 6 = 2$$

$$\begin{array}{r} 18 \overline{) 26} \\ 16 \overline{) 10} \\ 18 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

2

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

~~$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$~~

~~$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$~~

$$+ 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-6x = -18x + 81x^2 + 3x + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 - 9x + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$9x(9x - 1) + 2(9x - 1)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$(9x - 1)(9x - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9}, \\ 9x - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0, \quad (1) \end{cases}$$

$$1) \quad 9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1) \end{cases}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{8}}{3 \cdot 23}$$

$$\frac{2 \cdot 8 \pm 2}{6 \cdot 46}$$

~~$$\frac{2 \cdot 8 \pm 2}{6 \cdot 46}$$~~

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{2}}{2 \cdot 3 \cdot 23}$$

$$\frac{39 \pm 13}{13}$$

$$3 \cdot 100 - 60 + 2 \geq 0$$

$$36 - 4 - 6 \geq 0$$

$$9 - 12 < 0$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -81 \\ \hline 12 \\ -69 \\ \hline -57 \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ -23 \\ \hline 9 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

крестик

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \leq \frac{1}{9}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ - 54 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$6 \cdot 9 + 18\sqrt{78} \leq 69$$

$$54 + 18\sqrt{78} \leq 69$$

$$18\sqrt{78} \leq 15$$

~~X~~

не могу

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \leq \frac{1}{9}$$

$$54 - 18\sqrt{78} \leq 69$$

да

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \leq 0$$

$$6 - 2\sqrt{78} \leq 0$$

$$3 \leq 2\sqrt{78}$$

$$9 \leq 78$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{9}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{3}$$



$$\frac{3\sqrt{3}}{3} \leq \frac{1}{9}$$

$$9 + 2\sqrt{3} \leq 1$$

$$3\sqrt{3} \leq -8$$

$$1 - 9x \geq -\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$5^2 - 3^2 = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 400$$

$$225$$

~~0000~~

$$1 - 18x + 81x^2 + 3x^2 + 3x + 1 +$$

$$+ 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$84x^2 - 18x + 2 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$2(1 - 9x)\sqrt{3} \geq -9$$

11/6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle OBA = 90^\circ - 2\varphi \text{ (из } \triangle OAB)$$

Запишем т. синусов для $\triangle AOB$:

$$\frac{AO}{\sin(90^\circ - 2\varphi)} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{7^2 + (7x)^2}}{\cos 2\varphi} = 26$$

~~По т. об углах и
сторонах в к.с.~~

~~$\angle KCB = \varphi$~~

т. синусов для $\triangle OAC$:

$$\frac{OC}{\sin 2\varphi} = \frac{AO}{\sin \varphi}$$

$$\frac{OC}{2\cos \varphi} = \frac{7}{1}$$

$$OC = 14 \cos \varphi$$

~~т. синусов для $\triangle OBC$:~~

т. синусов для $\triangle OBC$:

$$\frac{OC}{\sin(90^\circ - 2\varphi)} = \frac{OB}{\sin \varphi}$$

$$\frac{14 \cos \varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{7x}{\sin \varphi}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\varphi \leq 45^\circ \text{ (оснр. в } 1/4 \Delta)$$



$$\sin \varphi, \cos \varphi > 0$$

$$2\varphi \leq 90^\circ$$

$$\sin 2\varphi, \cos 2\varphi > 0$$

$$x_1 = \frac{14 \cos \varphi \sin \varphi}{\cos 2\varphi}$$

$$7^2 + (x_1)^2 = 26 \cos 2\varphi$$

$$(17x)^2 = 26 \cos 2\varphi - 7^2$$

$$x^2 = \frac{26 \cos 2\varphi - 7^2}{17^2} = \frac{14^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{7^2 \cos^2 2\varphi}$$

$$26(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - 7^2$$