



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 1

Мы знаем, что $ab: 2^{19} \cdot 7^{10}$, $bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$, $ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$.

Перемножим эти три произведения и получим, что

$$a^2 b^2 c^2: 2^{(19+17+20)} \cdot 7^{(10+17+37)}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{56} \cdot 7^{64}$$

т.е. слева мы имеем полный квадрат, то он ~~делится~~ в разложении на простые множители имеет двойку в четной степени. 56 четно, тогда двойка должна быть как минимум в 52 степени. То есть

$$a^2 b^2 c^2: 2^{52} \cdot 7^{64}$$

$$abc: 2^{26} \cdot 7^{32}, \text{ если } abc \text{ делится}$$

Из этого следует, т.е. ни a , ни b , ни c не нули, что

$$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

~~Для $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$ есть пример, а значит минимальное значение достигается:~~

$$\begin{aligned} a &= 2^8 \cdot 7^{10} \\ b &= 2^9 \cdot 7^{17} \\ c &= 2^{12} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

Но известно, что в разложении ac двойка входит в 37 степени, т.е. и в abc она будет как минимум в 37 ст.

$$\text{Тогда } abc: 2^{26} \cdot 7^{37}$$

т.е. $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$, т.е. ни a , ни b , ни $c \neq 0$ и есть пример:

$$\begin{aligned} a &= 2^8 \cdot 7^{20} \\ b &= 2^6 \cdot 7^{17} \\ c &= 2^{12} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } abc_{\min} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2

П.к. $\frac{a}{b}$ несократима, то $\text{НОД}(a, b) = 1$

Преобразуем выражение:

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

По-первому, числитель $\neq 0$, т.к. $a, b > 0$

По второму, если числитель $:m$, то и $(a+b)^2-8ab :m$

То т.к. $(a+b)^2 :m$, то $8ab :m$.

И: ~~Известно 500~~ ~~НОД~~ ~~a~~,

$$m = 2^k \cdot n$$

$$8ab : 2^k \cdot n, n \not\vdots 2$$

$$m : 2 \geq 3$$

Тогда как минимум $ab : 2$ и $\text{н.д. } a, \text{н.д. } b : 2$.
500 $a : 2$. По пог. $b : 2$ но тогда $a+b : 2$ (!?)

Или тогда $2 \leq 3$

$$m : n : p$$

Тогда, т.к. $p \neq 2$, то $\text{н.д. } a, \text{н.д. } b : p$. 500 $a : p$. Но пог $b : p$ и $a+b : p$ (!?)

Значит m может быть $\text{н.д. } 1, \text{н.д. } 2, \text{н.д. } 4, \text{н.д. } 8$.
Для $m=8$ есть пример: $a=1, b=7$, то

$$\frac{1}{7} - \text{несократима} \quad \frac{1+7}{1-6 \cdot 7 + 49} = \frac{8}{8} - \text{сокращается на 8.}$$

Ответ: $m_{\text{наиб.}} = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть центр $\omega = 0$.^{№3}

П.н. АВ-кан, мо ОС + АВ.

В $\triangle OCB$, $\angle C = 90^\circ$ по т. Пифагора:

$$OB^2 = x^2 + 1 \Rightarrow OB = \sqrt{x^2 + 1}$$

$\triangle OAB$ по т. синусов:

$$\textcircled{*} \frac{OB}{\sin \angle BAO} = 2R = 2 \cdot 5 = 10$$

在 $\triangle OAC$ 中 $\angle C = 90^\circ$:

$$\sin \angle BAO = \frac{OC}{AO} = \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$$

п.т. Пигарева

Тогда ему поставим в $\otimes$ два найденных равенства:

$$\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{1+49x^2} = 10$$

Пусть $x^2 = a$, $a \geq 0$

$$\sqrt{a} \sqrt{a+1} \sqrt{a+1} \sqrt{49a+1} = 10$$

$$(a+1)(49a+1)=100$$

$$49a^2 + 50a - 99 = 0$$

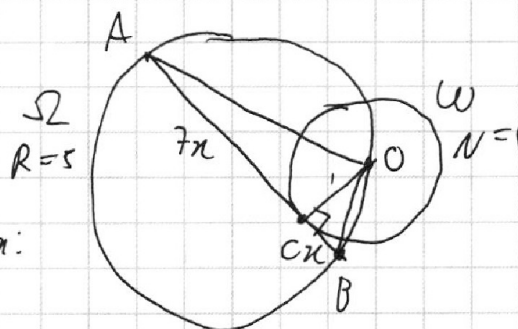
$$D = 50^2 + 49 \cdot 99 \cdot 4 = 2500 + 4851 \cdot 4 = 2500 + 19404 = 21904 = 148^2 \quad \text{untrue as } 0 \quad (?)$$

$$a = \frac{-50 \oplus 148}{2 \cdot 49} = \frac{148 - 50}{2 \cdot 49} = \frac{98}{2 \cdot 49} = 1$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$A^0 = 8n = 8$$

Ornlem: $AB=8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Обозначим $2x^2 - 5x + 3 = a$, $2x^2 + 2x + 1 = b$

Заметим, что $a - b = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = 2 - 7x$

Тогда равенство можно переписать, как:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

Пусть $\sqrt{a} = c$, $\sqrt{b} = d$, то

$$c - d = c^2 - d^2$$

$$c - d = (c - d)(c + d)$$

$$(c - d)(c + d - 1) = 0$$

⊕ Если $c = d$, $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ $\begin{cases} a = b \\ a > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a - b = 0 \\ a > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\frac{8 - 70 + 3 \cdot 49}{49} > 0$$

Проверим значение $x = \frac{2}{7}$ $8 - 70 + 141 > 0$ - верно
подстановка:

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3} - \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1} \stackrel{?}{=} 2 - 7 \cdot \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3} \stackrel{?}{=} \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1}$$

$$2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 \stackrel{?}{=} 2 \cdot \frac{4}{49} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1$$

$$2 = 7 \cdot \frac{2}{7} \text{ - верно, т.е. } x = \frac{2}{7} \text{ - корень}$$

⊖ Если $c \neq d$. Тогда можно c Если $c + d = 1$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

По у. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$, сложим:

$$2\sqrt{a} = a - b + 1$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Возведём в квадрат:

$$\begin{cases} 4a = a^2 - 2ab + b^2 + 1 & (a-b+1)^2 \leftarrow a \text{ отриц.} > 0 \text{ отсюда} \\ a-b+1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 20x + 12 = (2-7x+1)^2 \\ 2-7x+1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x^2 - 20x + 12 = (3-7x)^2 \\ 7x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 20x + 12 = 9 - 42x + 49x^2 \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} 41x^2 - 22x - 3 = 0 \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$D = 22^2 + 12 \cdot 41 = 484 + 492 = 976 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\begin{cases} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \\ x \leq \frac{3}{7} \end{cases}$$

Проверим оба корня:

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{3}{7}$$

$$77 + 14\sqrt{61} \leq 123$$

$$14\sqrt{61} \leq 46$$

$$\sqrt{61} \leq \frac{23}{7}$$

$$14 \cdot \sqrt{49} = 14 \cdot 7$$

неверно, т.е. при $x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$

выражение не имеет смысла

б.о.д. не может, т.к. $D < 0$ и когда.

при старшем члене > 0

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{3}{7}$$

$$77 - 14\sqrt{61} \leq 123$$

$$-14\sqrt{61} \leq 46 - \text{верно}$$

$$x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

подходит, при подстановке в уравнение

т.к. все перемены для равносильности

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}, \quad x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть мы выберем какую-то точку A внутри $OPQR$ (x_1, y_1)

Тогда $y_2 = 12 - 2x_1 + y_1$

То $y_2 = -2x_2 + 12 + 2x_1 + y_1$

Это уравнение прямой

Каждая целочисленная точка этой прямой внутри параллелограмма будет подходить.

-2 - наклон, эта прямая будет параллельна стороне OP паралл-ма.
 $+12 + 2x_1 + y_1$ - сдвиг.

Рассмотрим любую прямую a вида: $y = -2x + c$.

Узнаем, какими могут быть x , и y , тогда точка B попадет на эту пр.

Корды при x равны, приравняем сдвиги:

$$12 + 2x_1 + y_1 = c$$

$y_1 = c - 12 - 2x_1$ - ур.-ие прямой для точек A , при которых B попадет на прямую a .

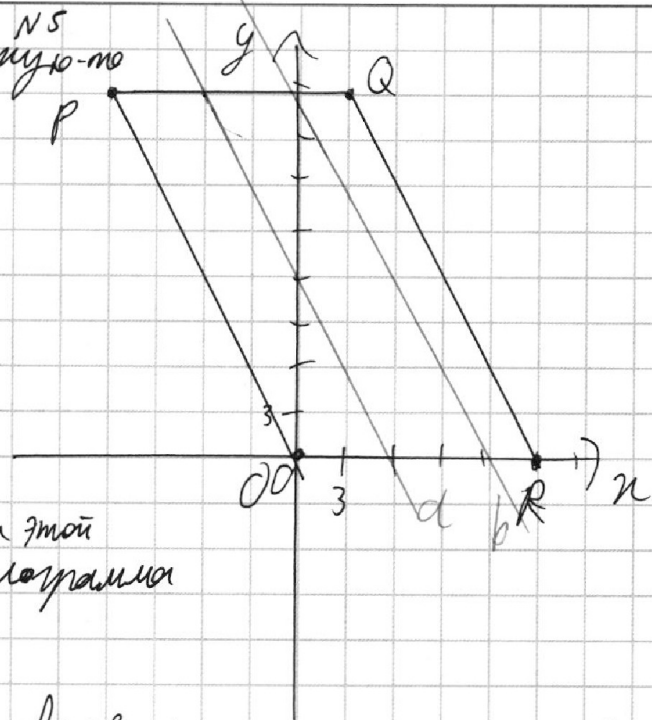
Она будет параллельна a .

Сдвиг: $c - 12$, у a c

c никогда не равно $c - 12$, значит прямые всегда разные.

Когда мы можем задать корды точек A и B параметризуем:

$$\begin{cases} y_2 = -2x_2 + c \\ y_1 = -2x_1 + c - 12 \end{cases}$$





1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

При этом $c \in \mathbb{Z}$, тогда все координаты будут целыми.

На каждой прямой всегда внутри параллелограмма будет располагаться ровно 13 ^{целых} точек, при каждом увеличении n на 1 y увеличивается на 2 , тогда если начать с точки пересечения прямой и верхней стороны параллелограмма, то можно сделать ровно 12 шагов вниз и получить ровно 13 различных точек.

Для каждого значения параметра c нам будет подходить $13 \cdot 13 = 169$ различных пар точек.

Найдём все возможные значения c .

Нижняя прямая со сдвигом $c-12$, верхняя — c .

Если $c-12 < 0$, то прямая не имеет точек справа — мы и одна точка из пары не может быть определена.

Тогда $c-12 \geq 0$ $c \geq 12$.

Аналогично $c \leq 27$, иначе точек не будет одной из точек.

Тогда $c \in [12; 27]$ и принимает 16 целых значений. Тогда вариантов $169 \cdot 16 = 2704$.

Ответ: 2704

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

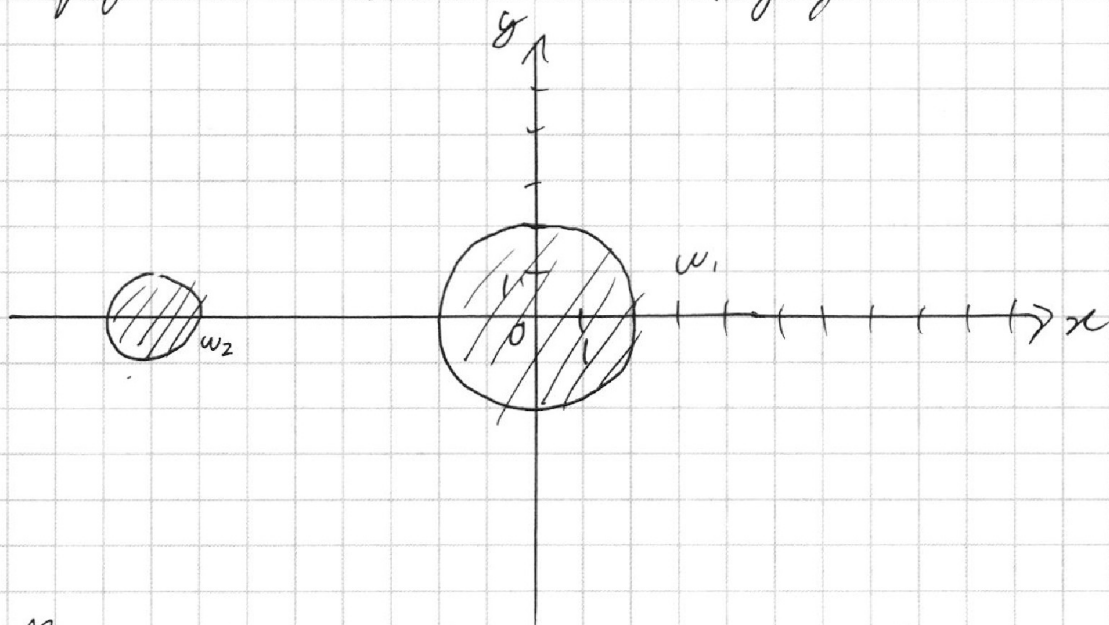
$$\begin{cases} ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \\ ax - y + 10b = 0 \end{cases}$$

← рассмотрим отдельно
каждую скобку и определим
сначала границы фигур, которые
они ограничивают

$((x+8)^2 + y^2 - 1) = 0$ - уравнение окр-ти ω_1 с ц. $(-8; 0)$ и рад. 1

$(x^2 + y^2 - 4) = 0$ - уравнение окр-ти ω_2 с ц. $(0; 0)$ и рад. 2

Нарисуем эти две окружности на коор-ой плоск-ти
и определим, какие области нам подходят:



В точке $(0; 0)$ произв-ие < 0 , значит в силу непре-
рывности границ фигур, знак будет изменяться
при каждом переходе через границу.

$y = ax + 10b$ - ур-ие прямой. ~~Важно~~ Если
рассмотреть все положения прямой на этой плоско-
сти, то очевидно, что если прямая пересекает одну
окр-ть, то система будет иметь бесконечное кол-во
решений. Это значит мы получаем один главный
корень системы. Поскольку каждую окр-ть прямая
может не пересечь, значит для двух корней надо, чтобы

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

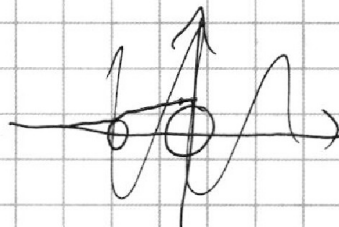
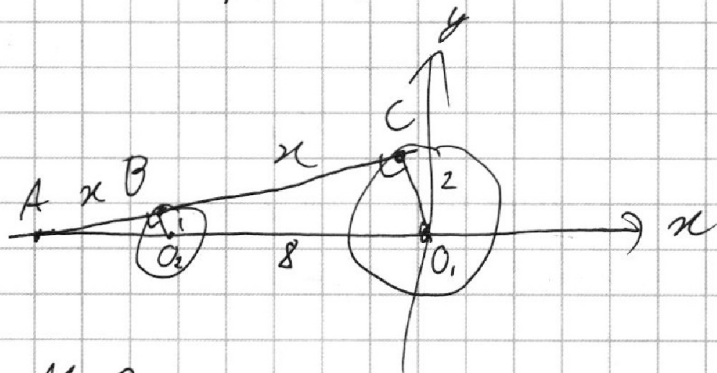
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



прямая была осязей касательней двум окр-тей.
Потому возмем прямую и илтуки
Сделаем набросок рисунка для внешней осязей кас-ей



Несложно найти значения α . Введем
прямую $y = \alpha x + b$ а это тангенс угла наклона
прямой к Ox .

Обозначим некоторые точки пересечений на
рисунке. Пусть $AB = x$. Т.к. O_2 можно перевести
в O_1 , значит с O_1 . А и $k = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2} = 2$, то

$AC = 2x$ и $BC = x$ на этом рисунке

По построению $O_1O_2 = 8$

В $\triangle ABO_2$ по т. Пифагора $AO_2 = \sqrt{x^2 + 1}$

Из заметных катетов получаем отношение:

$$\frac{AO_2}{BO_2} = \frac{AO_1}{CO_1} \quad \frac{\sqrt{x^2+1}}{1} = \frac{\sqrt{x^2+1} + 8}{2} \quad 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1} + 8$$

$$\sqrt{x^2+1} = 8$$

$$x^2 + 1 = 64$$

$$x^2 = 63$$

$$x = \sqrt{63}$$

т.к. x это длина отрезка

$$\tan \angle BAO_2 = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Вторая внешняя дуга кас-ся будет симметрична первой отн-о линии центров, т.е. Ox .

Значит Ox будет кас-ой дуги кас-ым

и ~~внутр-я~~ тангенс второго угла будет $\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{21}$. В этом случае

удовлетворяет, если рассмотреть рисунок

Поскольку 1α поднималась с 1α , а вторая опускалась с 1α (то же не знала из симм-ии)

Рассуждения аналогичны первому случаю, только коэф-нт возьмем $k = -2$.

Взяв же $AO_2 = \sqrt{x^2 + 1}$

$$AB = x \quad AC = 2x$$

Из отношения $\frac{AO_2}{BO_2} = \frac{AO_1}{CO_1}$ найдем

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{1} = \frac{8 - \sqrt{x^2 + 1}}{2}$$

$$3\sqrt{x^2 + 1} = 8$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{8}{3}$$

$$x^2 + 1 = \frac{64}{9}$$

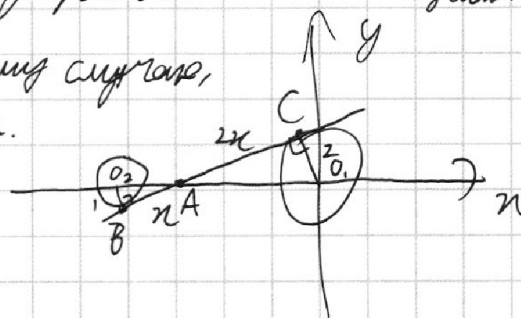
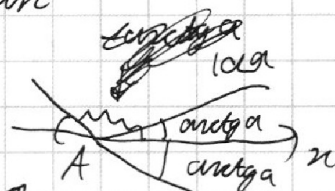
$$x^2 = \frac{55}{9}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{55}}{3} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$\text{То } \angle O_2 AB = \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

аналогично первому рассуждению $\alpha = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$ найдем.

В итоге, т.е. это просто сдвиг вверх вниз, он всегда $\exists$ единственный. Ответ: $\alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{21}$, $\alpha = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7

Пусть окр. сфер $\triangle ABC - \Omega$

I - центр, M и N -
основания перп-ов на AB и AC .

состав

$$\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma$$

AI, BI, CI - дуги-и,
делят углы пополам.

$CI \perp M$ и $BI \perp N$ лежат на
традиции одной прямой, т.к. дуги-и
пересекают виск. сфер-ты треугольников

в средине дуг.

$\angle NCA = \angle NBA = \beta$, как опр. по одной дуге Ω
аналогично $\angle ABM = \angle ACM = \gamma$.

Тогда в $\triangle N, NC, \angle N = 90^\circ \quad \sin \beta = \frac{2}{NC}$

в $\triangle M, MB, \angle M = 90^\circ \quad \sin \gamma = \frac{4,5}{MB}$ (*)

Заметим, что по лемме о хордах $NA = NI = NC$,
т.е. $\triangle AIC$ вписан в окр-ть с ц. N .

Аналогично $AM = IM = BM$ и $\triangle AIB$ вписан в окр-ть с ц. M .

Тогда в $\triangle AIC$ по т. синусов

$$\frac{AI}{\sin \gamma} = 2R_{\text{окр}} = 2 \cdot NC$$

в $\triangle AMB$:

$$\frac{AI}{\sin \beta} = 2R_{\text{окр}} = 2 \cdot MB$$

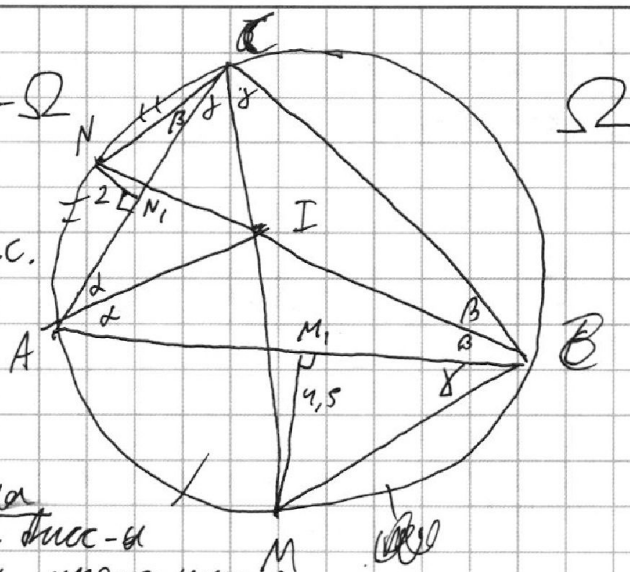
Перемножим: $\frac{AI^2}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} = 4 \cdot MB \cdot NC$

подставим равенства (*):

$$\frac{AI^2}{\frac{2}{NC} \cdot \frac{4,5}{MB}} = 4 \cdot MB \cdot NC$$

$$\frac{AI^2 \cdot MB \cdot NC}{9} = 4 \cdot MB \cdot NC \quad AI^2 = 36$$

$AI = \pm 6$ т.к. это длина отрезка Ответ: $AI = 6$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4(2x^2 - 5x + 3) = 9 - 42x + 49x^2$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 9 - 42x + 49x^2$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 484 + 492 = 976$$

$$\begin{array}{r} 123 \\ - 77 \\ \hline 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ - 22 \\ \hline 44 \\ - 44 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ - 12 \\ \hline 82 \\ - 41 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 492 \\ + 484 \\ \hline 976 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

(4.7)

$$y_2 - y_1 = 12 - 2x_2 + 2x_1$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ - 7 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$y = 12 - 2x$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ - 41 \\ \hline 12 \\ 48 \\ 492 \\ + 484 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 976 \overline{) 4} \\ 244 \overline{) 4} \\ 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 132 \\ - 32 \\ \hline 100 \end{array}$$

2. —

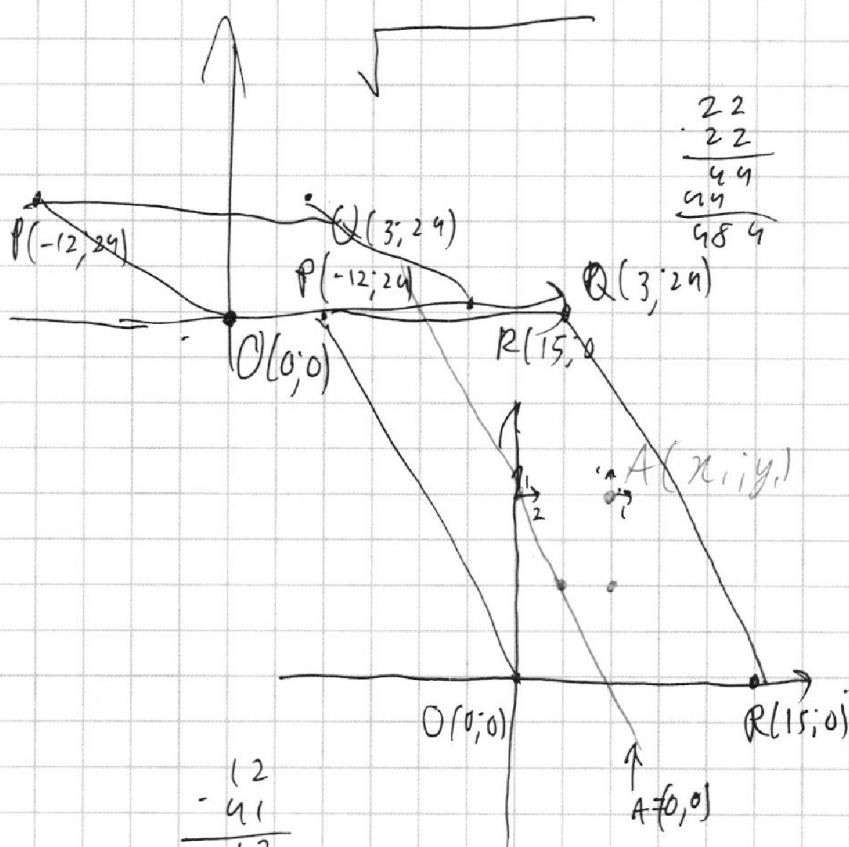
$$2x_2 + y_2 = 2 + 2x_1 + y_1$$

$$y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 - 2x_2 \quad \begin{array}{l} x_2 - x_1 = x \\ y_2 - y_1 = y \end{array}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \quad \begin{array}{l} 2x + y = 12 \\ 2x + y - 12 = 0 \end{array}$$

$$2x + y - 12 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$a \qquad b \qquad a-b$

$$(2x-1)(x-2) = 2x^2 - 4x - x + 2 = 2x^2 - 5x + 2$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)}$$

$$D = 25 - 8 \cdot 3 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 1,5 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

$$2(x-1)(x-1,5)$$

$$(x-1)(2x-3)$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = 2 - 7x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 - 28x + 49x^2$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 7x + 1} = 2 - 7x$$

$$2x^2 - 5x = a$$

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

$$\sqrt{a+2} - \sqrt{a+7x} = 2-7x$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + 2x^2 + 2x + 1 = 4 - 28x + 49x^2$$

$$c, d \geq 0$$

$$-2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x$$

$$c-d = c^2 - d^2$$

$$c-d = (c-d)(c+d)$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\textcircled{I} \quad \begin{cases} c=d \\ \sqrt{a}=\sqrt{b} \\ a=b \\ a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{II} \quad c \neq d$$

$$1 = c + d$$

$$1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$1 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{cases} 2 = 7x \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$(-2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-4ab} = \frac{a}{b} \quad (a, b) = 1$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ a^2-6ab+b^2 &: m \\ (a+b)^2-8ab &: m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ 8ab &: m \\ m &\leq 8 \end{aligned}$$

$$m=8$$

$$\text{или если } p \nmid m \Rightarrow \begin{cases} a:p \\ b:p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b:p \\ 8ab:p \end{cases}$$

$$\frac{1+7}{1-6 \cdot 7+49} = \frac{8}{50-42} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\begin{aligned} NC^2 &= NO^2 - 1 \\ NC^2 + 1 &= NO^2 \end{aligned}$$

$$a+b \neq \sqrt{49x^2+49x^2}$$

$$\begin{aligned} AC \cdot CB &= CO \cdot CT \\ 7x^2 &= CT \end{aligned}$$

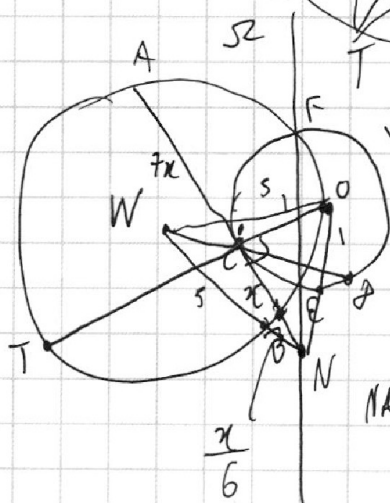
$$CT \cdot (CT+2)$$

$$\begin{aligned} 25 - WC^2 &= 25 \\ 7x^2 &= WC^2 - 25 \\ WC \cdot WP &= 25 - 1 = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x &= \frac{7x}{4x^2} = \frac{1}{4x} \\ NB &= \frac{x}{6} \\ 6x \cdot NB &= x^2 \end{aligned}$$

$$6x \cdot NB = x^2$$

$$\sqrt{1+49x^2}$$



$$\begin{aligned} NA \cdot NB &= NE \cdot NF = NC^2 \\ NA \cdot NB &= NC^2 \end{aligned}$$

$$NO \cdot (NB + 8x) = (NB + x)^2$$

$$NB^2 + 8x \cdot NB = NB^2 + 2x \cdot NB + x^2$$

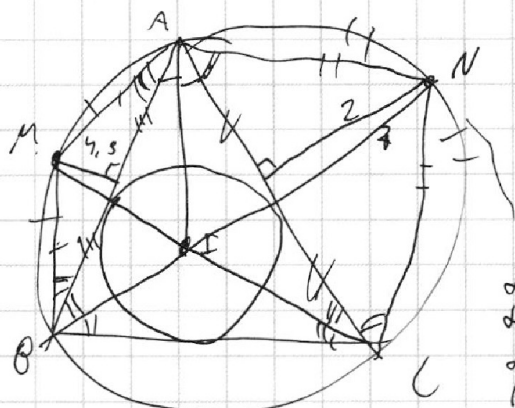
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решено.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 26 \\ \alpha + \beta = 14 \\ \alpha + \gamma = 20 \\ \beta + \gamma = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8 \\ \gamma = 12 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= 64 \\ &= 20 + 44 \\ &= 27 + 37 \\ &= 10 + 17 + 37 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &14 + 17 + 20 = \\ &= 34 + 17 = 41 + 10 = \\ &= 51 \end{aligned}$$

$$\frac{AI}{\sin \angle BCA} = 2R = \frac{4,5}{\sin \angle MBA}$$

$$AI^2 = 4,5 \cdot 2$$

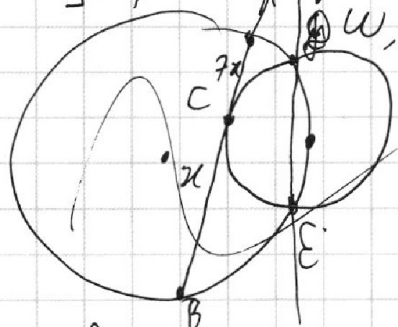
$$\frac{AI}{\sin \angle AOB} = 2R = \frac{2}{\sin \angle ACN}$$

$$AI^2 = 9$$

$$AI = 3$$

~~3~~ ~~8~~ ~~8~~ ~~8~~

$$R = 5$$



$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 32 \\ \alpha + \beta = 14 \\ \gamma = 18 \\ \alpha = 19 \\ \alpha + \beta = 10 \\ \beta + \gamma = 17 \\ \alpha + \gamma = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 14 \\ \alpha + \gamma = 17 \\ \beta + \gamma = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8 \\ \gamma = 9 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

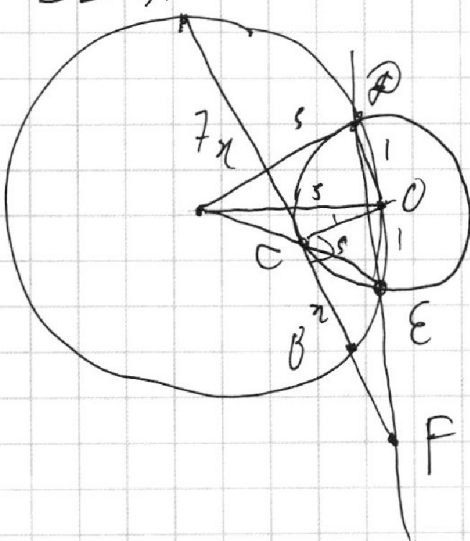
$$abc : 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{52} \cdot 7^{64}$$

$$abc : 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$(abc)^2 : 2^{52} \cdot 7^{64}$$

$$R = 5$$



$$W, N = 1$$

$$FE \cdot FP = FB \cdot FA = FC^2$$

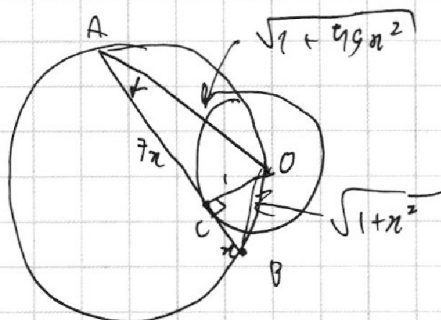
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 19404 \\ + 2500 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\frac{OB}{\sin \alpha} = 10$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$$

$$\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+49x^2} = 10$$

$$(1+x^2) \cdot (1+49x^2) = 100$$

$$(1+a) \cdot (1+49a) = 100$$

$$49a^2 + 50a - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 19404 = 21904$$

$$\alpha = \frac{-50 \pm 2.37}{49.2} = \frac{74-50}{49.2} = \frac{24}{49.2} = \frac{12}{49}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

$$AB = \frac{16\sqrt{3}}{7}$$

$$\frac{74}{74}$$

$$\frac{2}{37}$$

$$\begin{array}{r} 148 \\ \cdot 8 \\ \hline 1184 \\ 552 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 74 \\ \cdot 74 \\ \hline 16 \\ 28 \\ 28 \\ \hline 5476 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ + 99 \\ \hline 81 \\ 81 \\ 36 \\ \hline 4851 \end{array}$$

$$1369$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ - 43 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \cdot 37 \\ \hline 21 \\ 21 \\ \hline 9 \\ 1369 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4851 \\ \cdot 4 \\ \hline 204 \\ 32 \\ \hline 16 \\ 19404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 148 \\ \cdot 148 \\ \hline 64 \\ 32 \\ 8 \\ 32 \\ \hline 16 \\ 4 \\ \hline 148 \\ 804 \end{array}$$

$$21904 \mid 4$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ \cdot 99 \\ \hline 81 \\ 81 \\ 36 \\ \hline 4851 \\ 4 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19404 \\ \cdot 11 \\ \hline 19404 \\ 19404 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1184 \\ \cdot 10 \\ \hline 11840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21904 \\ \cdot 4 \\ \hline 5476 \\ 1369 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

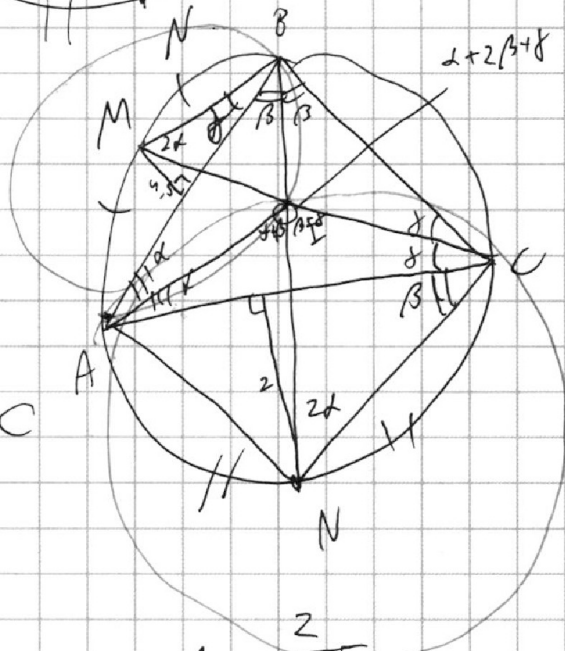
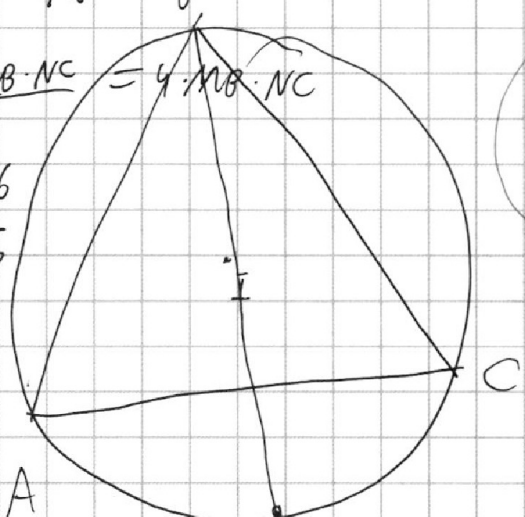
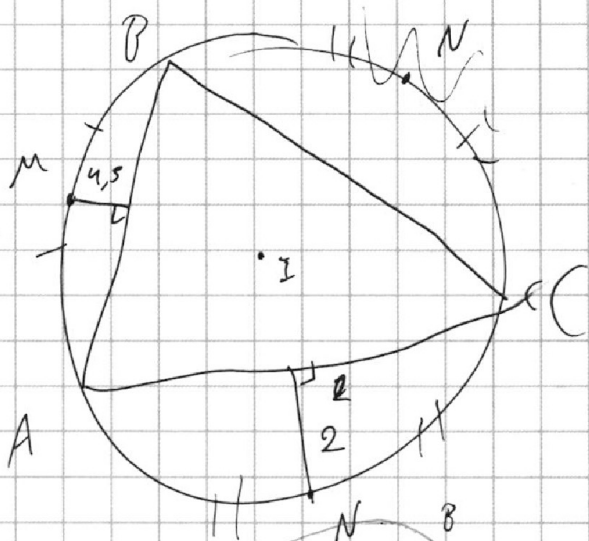
$$\sin \beta = \frac{2}{NC}$$
$$\sin \gamma = \frac{4.5}{MB}$$

$$\frac{AI^2}{\frac{2}{NC} \cdot \frac{9,5}{MB}} = \frac{4 MB \cdot NC}{B} A$$

$$\frac{AI^2 \cdot MB \cdot NC}{9} = 4 \cdot MB \cdot NC$$

$$At^2 = 36$$

$$AI = 6$$



$$\frac{AI^2}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} = 4MB \cdot \frac{AI}{\sin\gamma} = 2 NC$$

$$\frac{AI}{\sin \beta} = 2 \frac{MB}{NC}$$

$$\frac{nc^2}{2} = \frac{m\omega^2}{n,5} = \frac{m\theta}{\sin \gamma}$$

$$4.5 \text{ NC}^2 = 2 \text{ MB}^2$$

$$\frac{MB}{\sin \alpha} = 2R \quad \frac{NC}{\sin \beta} = 2R$$

$$\sin \beta = \frac{z}{nc}$$

$$\frac{\cancel{N} \cancel{A} \cancel{A} \cancel{A}}{\sin \beta} = \cancel{A} 2R =$$

$$= \frac{MB}{\sin \gamma}$$

$$\sin \gamma = \frac{4,5}{100}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2 \cdot \frac{121 - 44\sqrt{61} + 4 \cdot 61}{41 \cdot 41} - 5 \cdot \frac{1}{41 \cdot 41}}$$

$$\sqrt{3518 + 322\sqrt{61}} = 5 + 14\sqrt{61} + \sqrt{3313 - 252\sqrt{61}}$$

$$\sqrt{3518 + 322\sqrt{61}} - \sqrt{3313 - 252\sqrt{61}} = 41$$

$$x^2 = \frac{121 - 44\sqrt{61} + 244}{1681}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \cdot 41 \\ \hline 164 \\ \cdot 41 \\ \hline 1681 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{242 - 88\sqrt{61} + 488 - 55 \cdot 41 + 10 \cdot 41\sqrt{61} + 3 \cdot 1681}{1681}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3518 + 322\sqrt{61}}{1681}}$$

$$\begin{array}{r} 410 \\ - 88 \\ \hline 322 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{242 - 88\sqrt{61} + 488 + 22 \cdot 41 - 4 \cdot 41\sqrt{61} + 1681}{1681}} =$$

$$\begin{array}{r} 55 \\ 41 \\ \hline 91 \\ \cdot 1681 \\ \hline 220 \\ 2255 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{3313 - 252\sqrt{61}}{1681}}$$

$$\begin{array}{r} 5043 \\ - 2255 \\ \hline 2788 \\ + 242 \\ \hline 3030 \\ + 468 \\ \hline 3518 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2583 \\ + 242 \\ \hline 2825 \\ + 488 \\ \hline 3313 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot 41 \\ \hline 164 \\ \cdot 88 \\ \hline 252 \end{array}$$

$$2 - \frac{77 - 14\sqrt{61}}{41 + 1681}$$

$$\frac{3362 - 77 + 14\sqrt{61}}{1681}$$

$$\begin{array}{r} 1681 \\ + 902 \\ \hline 2583 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \cdot 41 \\ \hline 22 \\ \cdot 88 \\ \hline 902 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1651 \\ \cdot 2 \\ \hline 3362 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3362 \\ - 77 \\ \hline 3285 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

