



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1
 $ab : 2^{15} 7^{11} \Rightarrow$ можно представить ab как $2^{15} 7^{11} k$ (итд $a, b, c \in \mathbb{N}$, то k тоже н-кат.)
 аналогично тк $bc : 2^{17} 7^{18} \Rightarrow bc = 2^{17} 7^{18} m$; $ac : 2^{23} 7^{39} \Rightarrow ac = 2^{23} 7^{39} n$
 $\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} \cdot 7^{11} k \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} m \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} n = 2^{55} \cdot 7^{68} kmn$ (n -кат, m -кат)
 $\underline{a \cdot b \cdot c = 2^{55} \cdot 7^{68} kmn}$
 натуральное натуральное $\Rightarrow$ извлечем корень
 $abc = \sqrt{2^{55} \cdot 7^{68} kmn}$
 $abc = \underbrace{2^{27} \cdot 7^{34}}_{\text{н-кат}} \underbrace{\sqrt{2 kmn}}_{\text{н-кат} \Rightarrow \text{н-кат}}$
 $\sqrt{2 kmn}$ - н-кат $\Rightarrow 2 kmn$ - квадрат н-кат. числа $\Rightarrow$ ~~в $2 kmn$ одно из чисел k, m, n кратно 2~~

~~Значит, произведем $2 kmn$ наименьшее (при k, m, n н-кат) равно $2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 4$
 $\Rightarrow abc = 2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{4} = 2^{28} \cdot 7^{34}$~~

~~Пример:~~

~~$a = 2^5 \cdot 7^4$
 $b = 2^{13} \cdot 7^4$
 $c = 2^{21} \cdot 7^{32}$
 $ab = 2^7 \cdot 7^8$
 $bc = 2^{13} \cdot 7^4 \cdot 2^{21} \cdot 7^{32} = 2^{34} \cdot 7^{36}$~~

~~Пример:~~

Заметим, что

$ab \cdot bc = 2^{15} \cdot 7^{11} k \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} m = 2^{32} \cdot 7^{29} km$
 $ac \cdot b^2 = 2^{32} \cdot 7^{39} km$ при этом $ac = 2^{23} \cdot 7^{39} n$
 $2^{23} \cdot 7^{39} n \cdot b^2 = 2^{32} \cdot 7^{39} km$
 $n b^2 = 2^9 km$
 $\underbrace{\quad}_{\text{н-кат}} \underbrace{7^{10}}_{\text{н-кат}} \Rightarrow km : 7^{10}$

$\Rightarrow kmn : 2 \cdot 7^{10} \Rightarrow$ наим. значение при н-кат. числах: $2 \cdot 7^{10} \Rightarrow$
 наименьшее значение $abc = 2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 7^{10}} = \cancel{2^{28} \cdot 7^{35}} = 2^{28} \cdot 7^{35}$

Пример:

$a = 2^{10} \cdot 7^{21}$

$b = 2^5$

$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$

Тогда

$ab = 2^{15} \cdot 7^{21} = 7^{10} \cdot (2^{15} \cdot 7^{11}) : (2^{15} \cdot 7^{11})$

$bc = 2^{18} \cdot 7^{18} = (2^{17} \cdot 7^{18}) \cdot 2 : (2^{17} \cdot 7^{18})$

$ac = 2^{10} \cdot 7^{21} \cdot 2^{13} \cdot 7^{18} = 2^{23} \cdot 7^{39} : (2^{23} \cdot 7^{39})$

и $abc = 2^{10} \cdot 7^{21} \cdot 2^5 \cdot 2^{13} \cdot 7^{18} = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

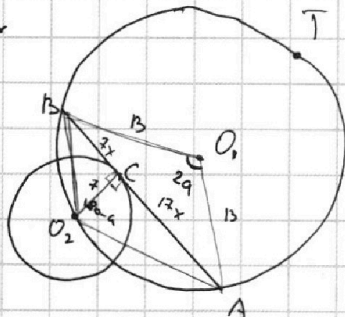
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

тк $BC:AC = 7:17$

то обозначим $BC = 7x$

а $AC = 17x$



Обозначим $\angle AO_1B = 2a$

тогда $\angle AOB = 2a$ (тк $\angle AO_1B$ — центр)

$\Rightarrow \angle AOB = 2a$

$\Rightarrow \angle AOB = 360 - 2a$

$\angle BO_2A = \frac{1}{2} \angle AOB$ (как впис.)

$\angle BO_2A = \frac{360 - 2a}{2} = 180 - a$

По т. косинусов в $\triangle AO_1B$

$AB^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos 2a = 169(2 - 2\cos 2a)$
($BO_1 = AO_1 = r = 13$) $= 338(1 - \cos 2a)$

т. косинусов в $\triangle AO_2B$

$AB^2 = BO_2^2 + AO_2^2 - 2 \cdot BO_2 \cdot AO_2 \cdot \cos(180 - a)$

по т. Пифагора в $\triangle BCO_2$ и $\triangle ACO_2$

$BO_2^2 = 49 + 49x^2$ $AO_2^2 = 49 + 289x^2$

$\Rightarrow AB^2 = 49 + 49x^2 + 49 + 289x^2 - 2 \cdot \sqrt{49(1+x^2)} \cdot \sqrt{49+289x^2} \cdot \cos(180 - a)$

$\cos(180 - a) = -\cos a$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$AB^2 = 338(1 - \cos 2a)$

$(7x + 17x)^2 = 338(1 - 2\cos^2 a + 1)$

$AB^2 = 338(1 - 1 + 2\sin^2 a)$

$AB^2 = 676$

$AB^2 = 338(2 - 2\cos^2 a)$

$AB^2 = 676(1 - \cos^2 a)$

$(7x + 17x)^2 = 676(1 - \cos^2 a)$

$(24x)^2 = 676(1 - \cos^2 a)$

$576x^2 = 676 - 676\cos^2 a$

$1 - \cos^2 a = \frac{576}{676}x^2$

$1 - \cos^2 a = \frac{144}{169}x^2$

$\cos^2 a = 1 - \frac{144}{169}x^2$

$\cos a \geq 0 \Rightarrow \cos a = \sqrt{1 - \frac{144}{169}x^2}$

по т. синусов $AB = 2 \cdot R \cdot \sin(\angle AO_2B)$
 $AB = 26 \cdot \sin(180 - a)$
 $\sin(180 - a) = \sin a$
 $AB = 26 \cdot \sin a$
тк $\angle BO_2A$ остр на хорде $< 80^\circ$
то $2a < 180^\circ$ и $a < 90^\circ \Rightarrow \cos a > 0$

$AB^2 = 98 + 329x^2 - 14\sqrt{(1+x^2)(49+289x^2)} \cdot (-\cos a)$
 $(24x)^2 = 98 + 329x^2 + 14\sqrt{(1+x^2)(49+289x^2)} \cdot \cos a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим $a = 3x^2 + 3x + 1$

$b = 1 - 9x$

Тогда $a + b = 3x^2 - 6x + 1$

Подставим в уравн

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$

$a+b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}$

при $b=0$

$1-9x=0$

$9x=1$

$b = b(6 + 2\sqrt{a}) \quad | :b$

$1 = 6 + 2\sqrt{a}$

$2\sqrt{a} = 1 - 6$

$4a = 1 - 2b + b^2$ Обратная подстановка

$4(3x^2 + 3x + 1) = 1 - 2(1 - 9x) + (1 - 9x)^2$

$12x^2 + 12x + 4 = 1 - 2 + 18x + 1 - 18x + 81x^2$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$D_1 = 36 + 69 \cdot 4 = 36 + 276 = 312 = 4 \cdot 78$

$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} = \frac{6 \pm \sqrt{312}}{69}$

$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} = \frac{8}{39} + \frac{\sqrt{312}}{69}$

$\frac{\sqrt{284}}{69} < \frac{\sqrt{312}}{69} < \frac{\sqrt{324}}{69}$

$\frac{16}{69} < \frac{\sqrt{312}}{69} < \frac{19}{69} \quad \frac{17}{69} < \frac{\sqrt{312}}{69} < \frac{18}{69}$

$\frac{2 + \sqrt{312}}{39} < \frac{19}{69}$

$\frac{6}{69} + \frac{\sqrt{312}}{69} < \frac{19}{69}$

$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} = \frac{8}{69} + \frac{\sqrt{312}}{69}$

$(\frac{6}{69} + \frac{\sqrt{312}}{69}) - (1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\sqrt{312}}{69} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{63}{69} = \frac{\sqrt{312}}{69} + \frac{29\sqrt{3}}{69} - \frac{63}{69} > \frac{17}{69} + \frac{29 \cdot 1,7}{69}$

$-\frac{63}{69} = \frac{17 + 49,3 - 63}{69} = \frac{66,3 - 63}{69} = \frac{3,3}{69} > 0 \Rightarrow \frac{6}{69} + \frac{\sqrt{312}}{69} > 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{6}{69} - \frac{\sqrt{312}}{69} < \frac{6}{69} - \frac{17}{69} = -\frac{11}{69} < 0 < 1 - \frac{3}{3} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \frac{6}{69} - \frac{\sqrt{312}}{69} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ не подходит по ОЗ

$\Rightarrow \frac{6}{69} + \frac{\sqrt{312}}{69} < 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

Отг. $\frac{1}{9}; \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

корень по ОЗ

ОДЗ

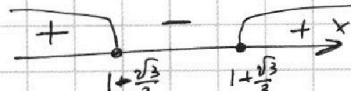
$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$D = 9 - 12 = -3 < 0 \Rightarrow > 0$ при любом x

$3x^2 - 6x + 1 \geq 0$

$D_1 = 36 - 12 = 24$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$



знаки выражения

$\frac{\sqrt{284}}{69} < \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{324}}{69}$

$1,7 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1,8$

$\frac{2}{3} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{1}{3} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{2}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$ax + y - 86 = 0$ можно записать: $y = -ax + 86$ - уравнение прямой

Заметим, что $x^2 + y^2 - 1 = 0$ - уравн окр-ти с центром $(0; 0)$ и радиусом 1
 $\Rightarrow$ если $x^2 + y^2 - 1 > 0$ то точка с коорд $(x; y)$ лежит вне окр-ти, а если
 $x^2 + y^2 - 1 < 0$ то внутри и

Аналогично $x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$ уравн окр-ти с центром $(0; 12)$ и радиусом 4

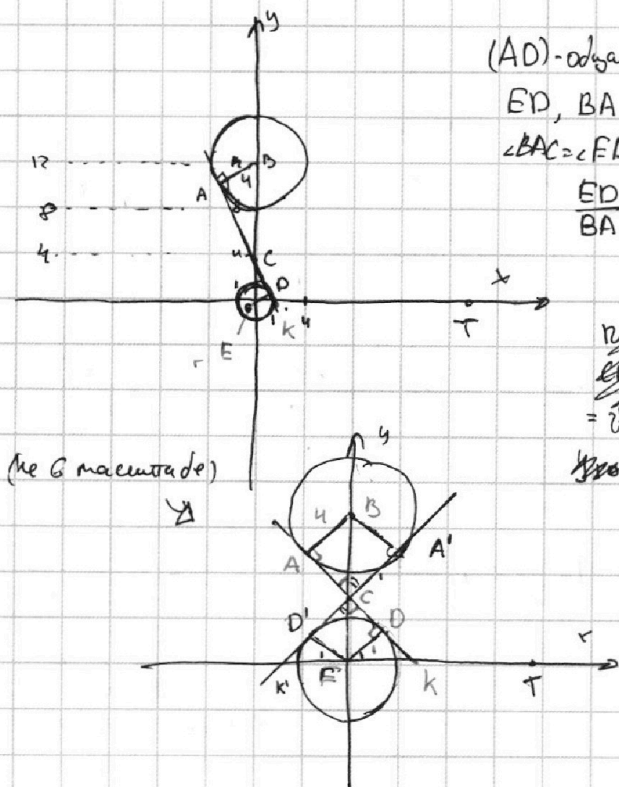
Рассмотрим данное уравнение $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$

≤ 0 это когда одна из скобок > 0 , а другая < 0 или когда сумма в одной из скобок равна 0

$\Rightarrow$ Если ~~прямая~~ система имеет 2 решения то прямая пересекается с данными окружностями или областями внутри окружности в двух точках

Если прямая пересекает окр-ть то она имеет с ней 2 общие точки и еще бесконечное множество общих точек с областью внутри, и $\Rightarrow$ тогда система имеет беск. много решений $\Rightarrow$ прямая $y = -ax + 86$ не

Если же они касаются их, то имеет с каждой не более 1 пересек. окр-ти и 1 общей точки, и тк решений ровно 2, то она касается сразу двух окр-тей $\Rightarrow$ данная прямая есть их общая касательная.



(AD) - общая касат окр-тей с центрами в T и E

ED, BA радиусы $\perp$ касательной

$\angle BAC = \angle EDC = 90^\circ$; $\angle ACB = \angle DCE$ (верт) $\Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle EDC$
по 2 угла

$$\frac{ED}{BA} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{EC}{BC} = \frac{1}{4}$$

$$EC + BC = 12 \Rightarrow$$

$$BC = 9,6$$

$$12 = 5EC$$

$$EC = \frac{12}{5} = 2,4$$

$$BC = 9,6$$

$$EC = \sqrt{12^2 - 9,6^2} = \sqrt{144 - 92,16} = \sqrt{51,84} = 7,2$$

$\angle ECK = \angle DCE$
 $\angle CDE = \angle CEK = 90^\circ \Rightarrow \triangle CDE \sim \triangle CEK$

$$\frac{ED}{CE} = \frac{CD}{EK}$$

$$CD = \sqrt{2,4^2 - 1} = \sqrt{5,76 - 1} = \sqrt{4,76} = 2,18$$

$$EK = 2,4$$

$$CD = \sqrt{2,4^2 - 1} = \sqrt{5,76 - 1} = \sqrt{4,76} = 2,18$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





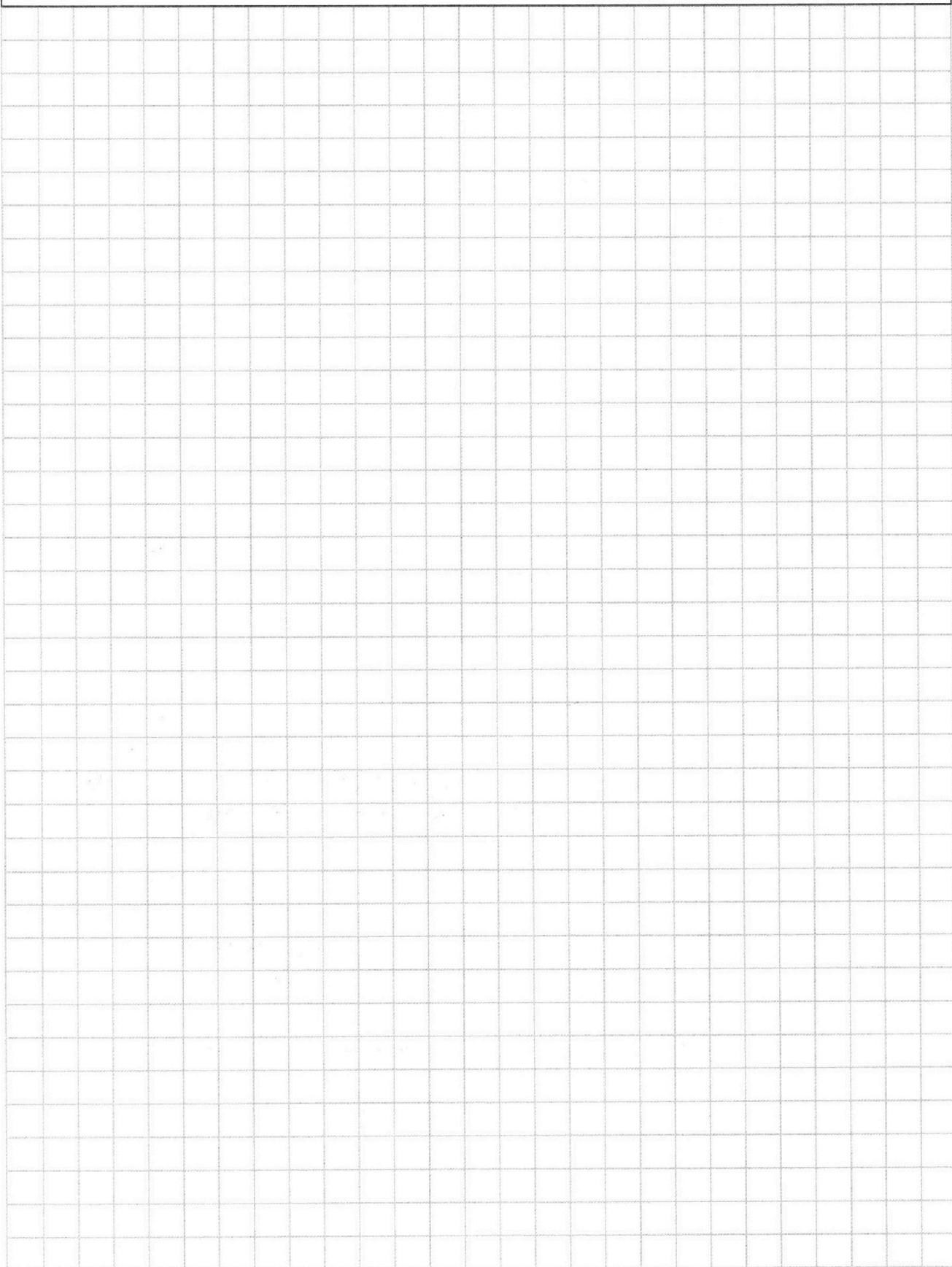
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 7} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 7} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$D: 9 - 6 = 3$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$3x^2 - 6x + 7 - 3x^2 - 3x - 1 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$AB = 2 \cdot 13 \cdot \sin(2\alpha)$$

$$AB = 2$$

$$4(9 + 63)$$

$$18$$

$$39$$

$$13$$

$$OB = 7\sqrt{x+1}$$

$$OA = \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$312 \mid 3$$

$$104 \mid 2$$

$$52 \mid 1$$

$$26 \mid 1$$

$$312 \mid 4$$

$$78$$

$$39$$

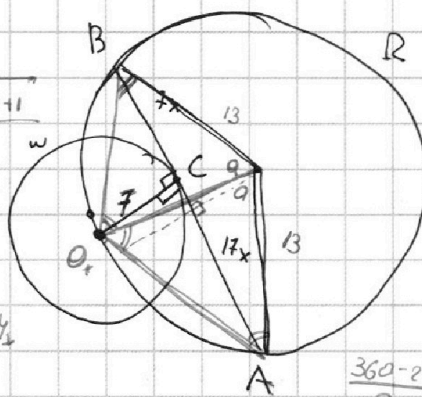
$$13$$

$$110 \pm \cos$$

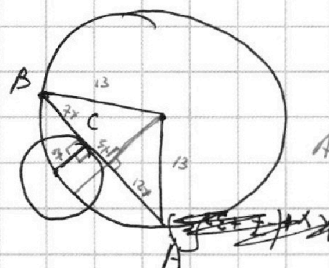
$$163 \quad 338$$

$$AB^2 = 338 - 2 \cdot 169 \cos 2\alpha$$

$$AB^2 = 49 + (7x^2 + 49 + 49x^2 - 2\sqrt{(49x^2 + 49)(49x^2 + 49)} \cdot \cos(180 - \alpha))$$



$$\frac{360 - 2\alpha}{2} = 180 - \alpha$$



$$\alpha = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

$$AB = 2 \cdot 13 \cdot \sin(2\alpha)$$

$$0 = 1 - 5\sqrt{5}x + x^2 - (1-x)k$$

$$5\sqrt{5}x + x^2 - xk = 1 + k$$

$$x(5\sqrt{5} + x - k) = 1 + k$$

$$D = (49 + 45 - 81\sqrt{5})x^2 - 2 \cdot 49x + 49 = 0$$

$$b^2 = (7 - 3\sqrt{5})b - a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$x^2 + x(7 + 3\sqrt{5})b + a^2 = 0$$

$$\frac{(5\sqrt{5} + x - k)(5\sqrt{5} + x - k)}{(k+1)} = \frac{(7 + 3\sqrt{5})b + a^2}{(k+1)} = \frac{(7 + 3\sqrt{5})b + a^2}{(k+1)}$$

$$9 + 6$$

$$9k = 0$$

$$k = \frac{9}{6}$$

$$\frac{2}{5\sqrt{5} + x - k} = k$$

$$D = 49 - 45 = 4$$

$$7 + kx^2 - 2x$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$

$$7 + \frac{9}{6}x^2 - \frac{1}{6}x$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$

$$\frac{29}{9 + 6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

д/з

Обозначим

$$a = 3x^2 + 3x + 1$$

$$b = 1 - 9x$$

$$\text{Тогда } a + b = 3x^2 - 6x + 2$$

Подставим в уравн.

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$a+b = a+b^2 + 2b\sqrt{a} \quad b=0 - \text{решение} \quad 1-9x=0$$

$$2b\sqrt{a} = b+b^2 \quad | : b \neq 0 \quad 9x=1$$

$$2\sqrt{a} = 1+b$$

$$4a = 1 - 2b + b^2$$

обратная подстановка