



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$\begin{cases} ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc: 2^{12} \cdot 7^{18} \\ ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases} \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 : 2^{23+12+15} \cdot 7^{39+18+18}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$$

т.к. степень двойки нечётная, то

$$abc: 7^{34} \cdot 2^{28} \quad \text{или} \quad abc: 7^{34} \cdot 2^{28}$$

~~Ответ: $7^{34} \cdot 2^{28}$~~ или по условию

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc: 2^{28} \cdot 7^{39}$$

тогда подходит пример: $a = 2^{10} \cdot 7^{11}$, $b = 2^5$, $c = 2^{13} \cdot 7^{28}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 2

$\forall a, b \in \mathbb{N}$ $\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} \Rightarrow 9ab : m \text{ и } a+b : m$$

$m=9$ возможно, например при $a=1, b=8$

$m > 9$ не может быть так как

~~произведение и сумма взаимно простых чисел~~

~~взаимно просты~~ НОД произведения и

суммы ~~простых~~ взаимно простых чисел равен 1

Ответ: ~~$m=9$, ab : любым делителем~~

ab : любым делителем a и b

$a+b$: ~~любым~~ делителем a и b

Ответ: $m=9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1)$$

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1) = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad \text{или} \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq 1$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3(x-1)^2 - 1}$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} \leq 1 \Rightarrow x \in [1 - \sqrt{\frac{2}{3}}; 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}]$$

$$\sqrt{3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} \leq 1 \Rightarrow x \in [-1; 0]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq 1 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1 \end{cases} \quad \text{— нет решений системы}$$

Подставим $x = \frac{1}{9}$:

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{34}{27}} - \sqrt{\frac{34}{27}} = 0$$

Ответ: $x = \frac{1}{9}$.

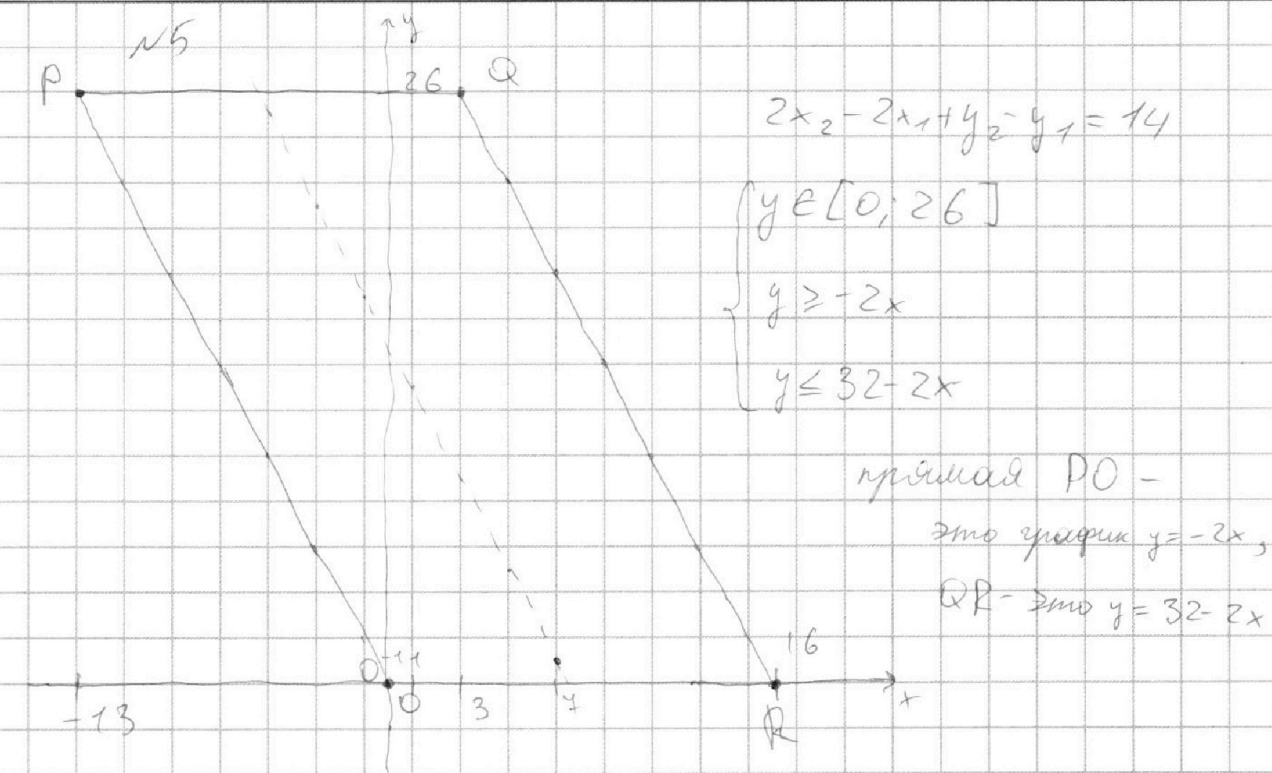
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 + y_2 \in [0, 32] ; -2x_1 - y_1 \in [-32, 0]$$

т.к. подставив максимальный y_2 :

$$2x_2 + (32 - 2x_2) = 32, \text{ минимальный } y_2:$$

$$2x_2 + (-2x_2) = 0 \neq$$

$$\Rightarrow 2x_2 + y_2 \geq 14 \Rightarrow 2x_2 + y_2 \geq 14$$

$$\text{т.к. } -2x_1 - y_1 \leq 0 \quad \text{Пусть } 2x_2 + y_2 = K_2,$$

$$2x_1 + y_1 = K_1 \text{ тогда } K_2 - K_1 = 14$$

$$y_2 = K_2 - 2x_2 ; y_1 = K_1 - 2x_1, \text{ если } K_2 \geq$$

если $K_2 \geq 2$ то в параллелограмме будет 14 точек $B(x_2, y_2)$, если $K_2 < 2$, то 12 точек $B(x_2, y_2)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

Для точек $A(x_1, y_1)$ аналогично.

$$K_2 \in [14; 32]; \Rightarrow K_2 \in [0; 18]$$

$K_2 - K_1 = 14$ есть 10 случаев когда $K_2, K_1 : 2$
и 9 случаев когда $K_2, K_1 \neq 2$

Получаем ~~выражение~~ выражение:

$$10 \cdot 14 \cdot 14 + 9 \cdot 12 \cdot 12 = 1960 + 1296 = 3256$$

Ответ: ~~3256~~ 3256.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

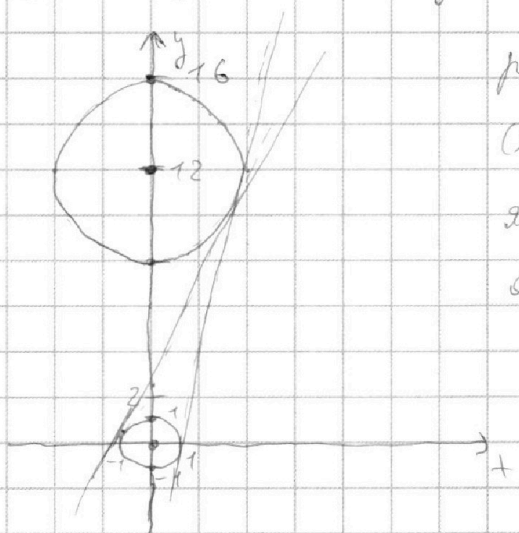
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$



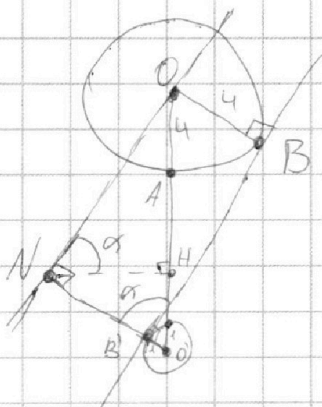
решением уравнения:

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

являются точки лежащие на
одной из окружностей или
внутри одной из окружностей.

$ax + y - 86 = 0$ это
уравнение прямой $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = 86 - ax$ - это касательная к
одной из окружностей, тогда у системы
будет ровно два решения.



$$OO' = 12 \quad ON \parallel BB' \Rightarrow OB = NB' = 4$$

$$OB = OA = 4 \quad OB' = 1$$

$\triangle ONO'$ - прямоугольный $\Rightarrow$

$$\Rightarrow ON = \sqrt{OO'^2 - NO'^2} = \sqrt{12^2 - (4+1)^2} =$$

$$= \sqrt{119}$$

$ON \parallel BB' \Rightarrow$ тангенс угла наклона BB'

на графике равен $\angle ONH$, $\angle NO'O = 90^\circ - \angle NO'O = \angle ONH$

$$\tan \alpha = \frac{ON}{NO'} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$



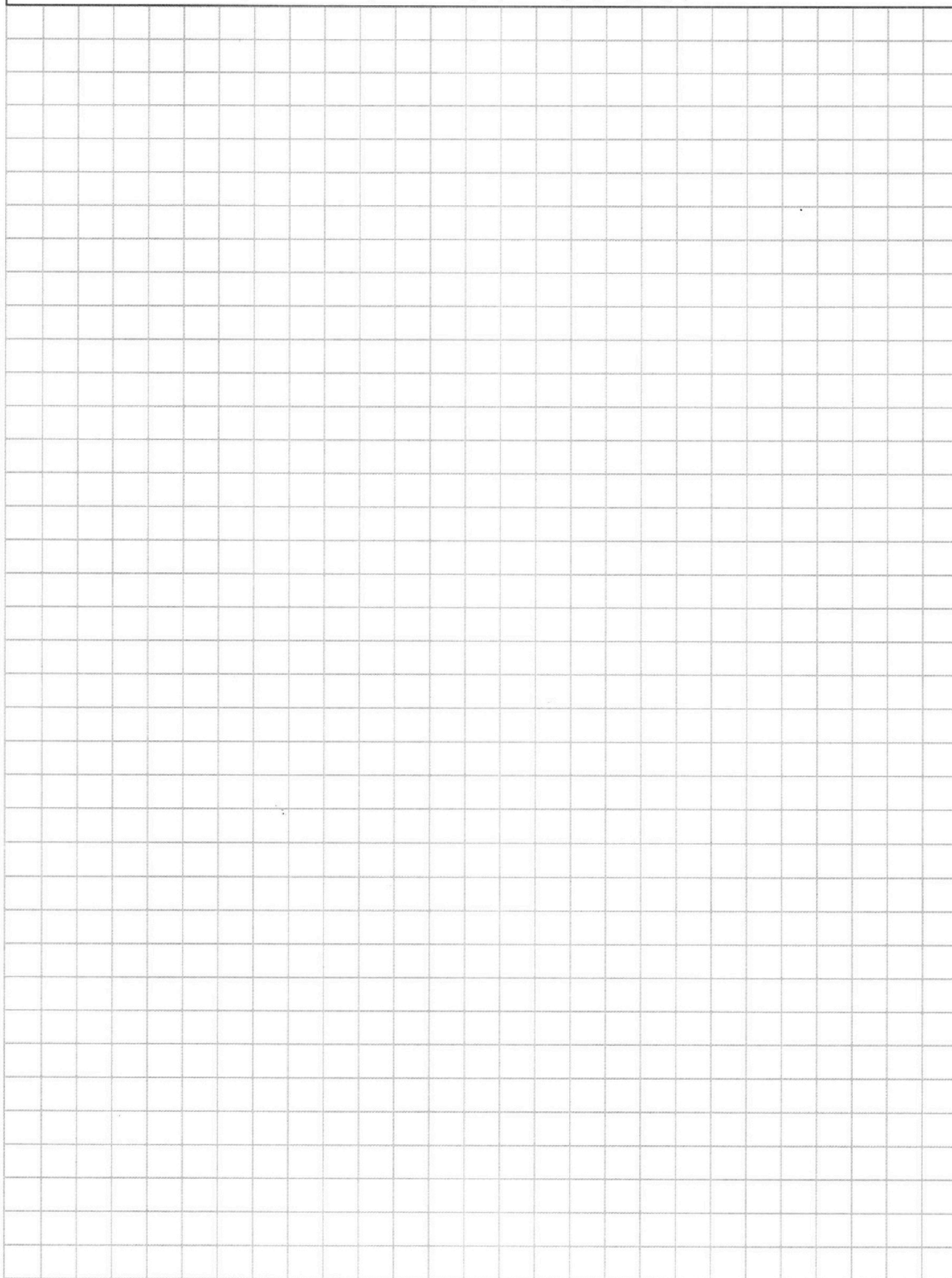
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





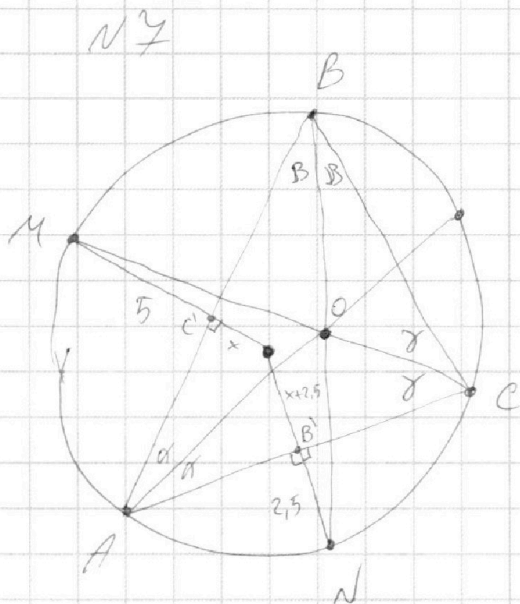
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O - центр вписанной окружности

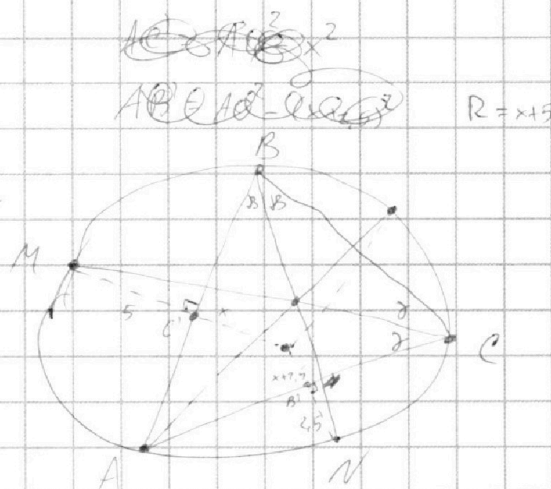
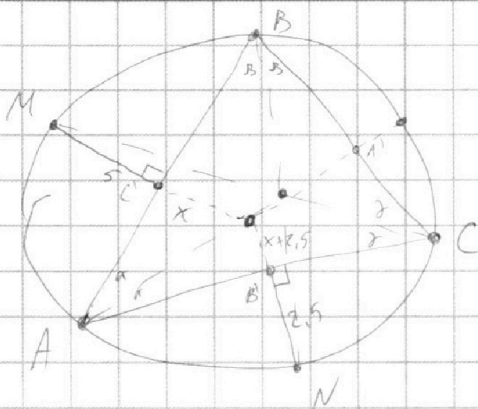
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2+4ab+b^2} : m$$

$\max_{a,b} ?$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$9ab : a+b$$

$$(\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$-6x+2 = 3x+1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} - 1 = 0$$

$$\sqrt{3(x-1)^2-1} + \sqrt{3(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}} = 1$$

$$(x-1)^2 \geq \frac{1}{3}$$

$$x-1 \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$x \in (\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3})$$

$$x \in [-1-\sqrt{\frac{2}{3}}, 1+\sqrt{\frac{2}{3}}]$$

$$(3a+\frac{1}{3})(3b+\frac{1}{3}) = 1$$

$$\frac{3x}{2y}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

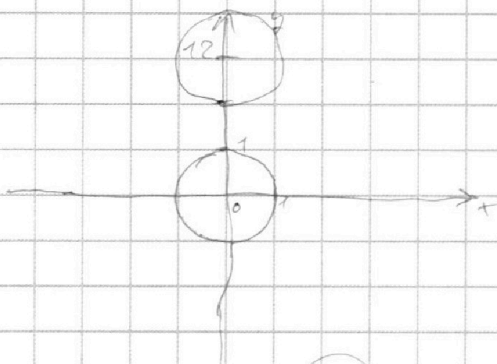
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

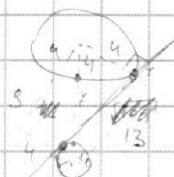


$$\begin{cases} x+y-86=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$



$$y = 86 - x$$

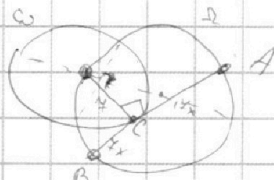
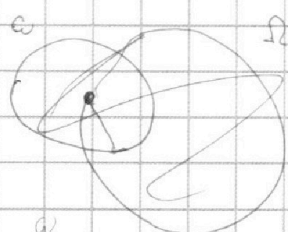
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-12)^2=16 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=86-x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+(y-12)^2=16 \\ y=86-x \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{13}{5} \Rightarrow \alpha = 2,6 \text{ или } \alpha = -2,6$$

$$y = 86 + 2,6x$$



$$x = ?$$

$$14y - y^2 = (4-y)(18+y)$$

$$14y = -12y + 18y + 72$$

$$y = \frac{18 \cdot 4}{26} = \frac{133}{26} \approx 5,11$$

$$\tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 2,6$$

$$14 \cdot 14 \cdot 18$$

$$\begin{array}{r} 186 \\ + 18 \\ \hline 1464 \\ 186 \\ \hline 3420 \end{array}$$

$$y \in [0; 26]$$

$$A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$y \in [0; 26] \quad x \in [-13; 16]$$



$$\begin{cases} y \geq -2x \\ y \leq 32-2x \\ y \in [0; 26] \end{cases}$$

$$2x_2 + y_2 \in [0; 32]$$

$$-2x_1 - y_1 \in [-32; 0]$$

