



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чистовик.

Вариант 9.

№1.

$$ab: 2^{14} 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} 7^{37}$$

Р.к. $ac: 2^{20} 7^{37}$, то $abc \neq 2^{20} 7^{37}$. Если $abc = 2^{20} 7^{37}$, то $b=1$, тогда $a \neq 2^{14} 7^{10}$; $c \neq 2^{17} 7^{17}$, но тогда $abc \neq 2^{31} 7^{27}$, значит $abc \neq 2^{20} 7^{37}$, т.к. степень двойки меньше 31. Р.к. $2^{20} 7^{37}$ обладает самыми большими степенями в условии, то ac должно быть равно $2^{20} 7^{37}$.

Предположим, что b не кратно 7, тогда $a: 7^{10}$; $c: 7^{17}$; $ac: 7^{27}$.

Такое может быть, поставим минимальная возможная степень семерки у числа abc равна 37, например: $a: 7^{10}$; $c: 7^{27}$. Предположим, что $b = 2^x$, тогда $a: 2^{(14-x)}$; $c: 2^{(17-x)}$, тогда $ac: 2^{(31-2x)}$,

тогда $abc: 2^{(31-x)}$. Но если $x \geq 5$, то $31-2x \leq 20$, и тогда

abc будет кратно $2^{(20+x)}$. Минимальная степень двойки при $x \geq 5$

достигается при $x=6$; $20+x=26$, а при $x \leq 5$ ($x \geq 0$), при

$x=5$; $31-5=26$. Значит минимальное значение $abc: 2^{26} 7^{37}$

Ответ: $2^{26} 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Числовик

$\sqrt{2}$.

$\frac{a}{b}$ — несократима.

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

Пусть $a+b=mn$, тогда $\frac{(a+b)^2-8ab}{m} = mn^2 - \frac{8ab}{m}$. Значит

$8ab$ должно нацело делиться на m . $m \leq 8ab$; $m \leq a+b$. Для любых натуральных чисел a и b справедливо неравенство:

$a+b < 8ab$. ~~$8ab = 4(a+b)^2 - 4(a^2+b^2)$. Предположим, что $m=a+b$,~~

тогда $8ab; a+b$; ~~$\frac{4(a+b)^2-4(a^2+b^2)}{a+b} = 4(a+b) - \frac{4(a^2+b^2)}{a+b} =$~~

$$= 4(a+b) - \frac{4a^2}{a+b} - \frac{4b^2}{a+b} = 4(a+b) - \frac{1}{\frac{a+b}{4a^2}} - \frac{1}{\frac{a+b}{4b^2}} = 4(a+b) - \frac{1}{\frac{1}{4a} + \frac{1}{4b}}$$

И a , и b не могут быть четными, т.к. тогда дробь $\frac{a}{b}$ можно сократить на 2. Если одно из чисел a и b чётное, а другое нечётное, то $a+b$ — неч., значит m не может быть чётным.

Если числа a и b нечётные, то $a+b$ — чётн., и $a^2-8ab+b^2$ — чётн.

Тогда наибольшее возможное чётное $m=8$, т.к. $\frac{(a+b)^2-8ab}{m} = mn^2 - \frac{8ab}{m}$, а a и b — неч. числа.

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

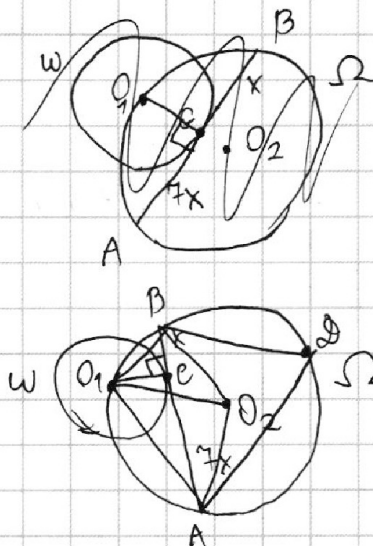
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик
 $\sqrt{3}$.



Решение.

1) $O_1C \perp AB$ как радиус к касательной.

2) Пусть $BC = x$, тогда $AC = 7x$;

дон. контр.: $\angle \in \Omega$; $B\angle$; $A\angle$

3) $O_1A\angle B$ - впис. в Ω , значит
 $\angle BO_1A + \angle B\angle A = 180^\circ$ по св-ву впис. четырехс.

$$= 2 \left(\frac{49x^4 - 14x^2 + 1}{49x^4 + 50x^2 + 1} \right) - 1 =$$

$$= 2 \left(1 - \frac{64x^2}{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)} \right) - 1 =$$

$$= 1 - \frac{64x^2}{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)}$$

6) по т. косинусов для $\triangle AOB$:

$$64x^2 = 50 - 50 \left(1 - \frac{64x^2}{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (49x^2 + 1)(x^2 + 1) = 50 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49x^4 + 50x^2 - 49 = 0$$

$$x^2 = t; 49t^2 + 50t - 49 = 0$$

$$\Delta = 50^2 - 4 \cdot 49 \cdot (-49) = 625 + 9800 =$$

$$= 3026$$

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{3026}}{98} = \frac{-25 \pm \sqrt{3026}}{49}$$

$$8x = \frac{-200 \pm 8\sqrt{3026}}{49}$$

$$\text{Ответ: } \frac{8\sqrt{3026} - 200}{49}.$$

4) $\triangle O_1CB$: $\angle C = 90^\circ$; $\angle BO_1C = \arccos \frac{O_1C}{O_1B} =$

$$= \arccos \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\triangle O_1CA$$
: $\angle C = 90^\circ$; $\angle AO_1C = \arccos \frac{O_1C}{O_1A} =$

$$= \arccos \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

поэтому $\angle B\angle A = 180^\circ - \arccos \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}$

5) $\angle BO_2A = 2\angle B\angle A = 360^\circ - 2 \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}} \right)$

$$\cos \angle BO_2A = \cos \left(2 \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}} \right) \right) =$$

$$= 2 \cos^2 \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}} \right) - 1 =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{49x^2 + 1}} - \frac{7x^2}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{49x^2 + 1}} \right)^2 - 1 =$$

$$= 2 \left(\frac{1 - 14x^2 + 49x^4}{(x^2 + 1)(49x^2 + 1)} \right) - 1 =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Числовик

$\sqrt{4}$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 45 \\ \times 45 \\ \hline 1225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3+2x^2+2x+1-2\sqrt{2x^2-5x+3} \cdot \sqrt{2x^2+2x+1} \\ 2x^2-5x+3 \neq 0 \\ 2x^2+2x+1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\cdot \sqrt{2x^2+2x+1} = 4-28x+49x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 45x^2-25x = -2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} \\ 2x^2-5x+3 \neq 0 \\ 2x^2+2x+1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2025x^4 - 2250x^3 + 625x^2 = 4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3) \\ 2x^2-5x+3 \neq 0 \\ 2x^2+2x+1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0 \\ 2x^2-5x+3 \neq 0 \\ 2x^2+2x+1 \neq 0 \end{cases}$$

$$2x^2-5x+3 \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{4}; \quad x = \{1; 1,5\}; \quad x \in (-\infty; 1] \cup [1,5; +\infty).$$

$$2x^2+2x+1 \neq 0$$

$$D_1 = k^2 - ac = 1 - 2 = -1; \quad x \in \emptyset; \quad x \in \mathbb{R}$$

Значит ни при каком значении x выражение $2x^2+2x+1$ не будет равным нулю

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

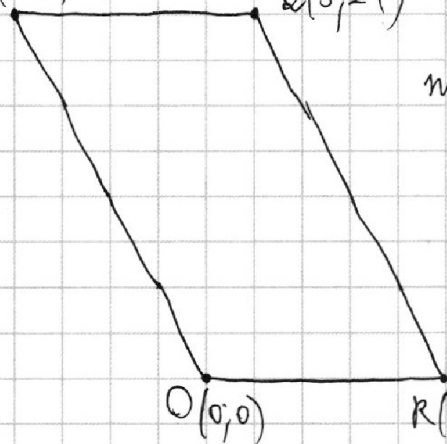


Исходник

№ 5.

$$2x^2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$P(-12; 24)$ $Q(3; 24)$



Для всех точек, лежащих на ~~прямой, параллельной~~ сторонам ~~прямой~~ OP и RQ будет верно: $2x + y = 0$.

Для всех точек, лежащих на ~~прямой~~ RQ будет верно:
 $2x + y = 30$.

Если провести прямые, параллельные

С 11 по 16 прямую, на
них можно выбрать только 1.

Значит всего пар:

$$6 \cdot 25 \cdot 25 + 4 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 2 + 6 \cdot 25 \cdot 25 =$$

$$= 625 \cdot 16 = 10000$$

Ответ: 10000.

сторонам OP и RQ , через параллелограмм
с шагом 1, то на каждой из этих
прямых для любой точки будет верно

$2x + y = \text{const}$; на каждой следующей

прямой $2x + y$ будет на 2 больше чем
на предыдущей слева. Всего через парал-
лелограмм проходят 16 таких прямых.

Для первого ⁶ из них (считая слева) можно
выбрать на них любую точку A и для неё найдётся
 $(24 - 0) + 1 = 25$ точек B , так, что условие будет выпол-
няться. С 7 по 10 прямую, на них можно выбрать
и точку A , и точку B , и для них найдётся 25 со-
ответствующих точек.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чистовик

№6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + 10b \\ (x^2 + 16x + 63 + y^2)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + 10b \\ \begin{cases} x^2 + 16x + 63 + (ax + 10b)^2 \geq 0 \\ x^2 + (ax + 10b)^2 - 4 \leq 0 \\ x^2 + 16x + 63 + (ax + 10b)^2 \leq 0 \\ x^2 + (ax + 10b)^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + 10b \\ \begin{cases} x^2(a^2 + 1) + x(16 + 20ab) + (63 + 100b^2) \geq 0 \\ x^2(a^2 + 1) + x \cdot 20ab + (100b^2 - 4) \leq 0 \\ x^2(a^2 + 1) + x(16 + 20ab) + (63 + 100b^2) \leq 0 \\ x^2(a^2 + 1) + x \cdot 20ab + (100b^2 - 4) \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Delta_1 = k^2 - ac = (8 + 10ab)^2 - (a^2 + 1)(63 + 100b^2) = 64 + 160ab + 100a^2b^2 + 160ab - 63a^2 - 100a^2b^2 - 63 - 100b^2 = 1 + 160ab - 63a^2 - 100b^2$$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{\Delta_1}}{a} = \frac{-8 - 10ab \pm \sqrt{1 + 160ab - 63a^2 - 100b^2}}{a^2 + 1}$$

$$\Delta_1 = k^2 - ac = 100a^2b^2 - (a^2 + 1)(100b^2 - 4) = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 + 4a^2 - 100b^2 + 4 = 4a^2 - 100b^2 + 4$$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{\Delta_1}}{a} = \frac{-10ab \pm \sqrt{4a^2 - 100b^2 + 4}}{a^2 + 1}$$

$$y = ax + 10b$$

$$x \leq \frac{-8 - 10ab + \sqrt{1 + 160ab - 63a^2 - 100b^2}}{a^2 + 1}$$

$$x \geq \frac{-8 - 10ab - \sqrt{1 + 160ab - 63a^2 - 100b^2}}{a^2 + 1}$$

Чтобы было ровно 2 решения:

$$\begin{cases} -8 - 10ab + \sqrt{1 + 160ab - 63a^2 - 100b^2} = -10ab + \sqrt{4a^2 - 100b^2 + 4} \\ -8 - 10ab - \sqrt{1 + 160ab - 63a^2 - 100b^2} = -10ab - \sqrt{4a^2 - 100b^2 + 4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -8 - 10ab + \sqrt{1 + 160ab - 63a^2 - 100b^2} = -10ab - \sqrt{4a^2 - 100b^2 + 4} \\ -8 - 10ab - \sqrt{1 + 160ab - 63a^2 - 100b^2} = -10ab + \sqrt{4a^2 - 100b^2 + 4} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Учитывая

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a, b \in \emptyset \\ a, b \in \emptyset \end{array} \right]$$

Ответ: только а нет.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

