



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $ab : 2^{15} \cdot 4^{11}$
 $bc : 2^{17} \cdot 4^{18}$
 $ac : 2^{23} \cdot 4^{39}$

$ab \cdot bc \cdot ac = (2^{15} \cdot 4^{11}) \cdot (2^{17} \cdot 4^{18}) \cdot (2^{23} \cdot 4^{39}) = K$

$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 4^{68} = K$

но так $(abc)^2 \Rightarrow$ не может быть ~~большим~~ ^{простым} числом, так как в четной степени $\Rightarrow K$ тоже должно быть на 2 ~~делится~~ ^{делится} ~~большим~~ ^{простым}

abc

$ab \cdot ac \cdot bc = 2^{55} \cdot 4^{68}$

$(abc)^2 : 2^{55} \cdot 4^{68}$

но так abc в левой части стоит квадрат, и он не может быть представлен в виде простого множителя в четной степени $\Rightarrow (abc)^2 : 2^{55} \cdot 4^{68}$

$abc : 2^{\frac{55}{2}} \cdot 4^{\frac{68}{2}}$

$abc : 2^{28} \cdot 4^{34}$

наименьшее число $abc = 2^{28} \cdot 4^{34}$

Ответ: $2^{28} \cdot 4^{34}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N2 \quad \frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Если $m > 1$ значит у $a+b$ и $(a+b)^2-9ab$ есть общий делитель (т.е. m)

$a+b$ и $(a+b)^2-9ab$ имеют общий делитель $a+b$

$\Rightarrow (a+b)$ и $9ab$ имеют тоже общий делитель $a+b$ и ab не имеют общего делителя (т.к.

$$a+b \in \mathbb{N} \text{ Пусть } (a+b)k = ab \cdot t, k, t \in \mathbb{N}$$
$$\frac{(a+b)k}{b} = t \Rightarrow t \notin \mathbb{N}$$

$k \nmid b$ $t \nmid a$

$\Rightarrow a+b \nmid 9$ (т.к. нам нужны наибольший делитель)

Пример. Пусть $a=4, b=5$:

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{4+5}{(4+5)^2-9 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{81-180} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

$a=9$

Отв.: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N4 \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad |^2$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$x - 18x^2 + 9x - x + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x + 1 \quad (2)$$

$$(1) \quad 81x^2 - 9x + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$(1 - 9x)(2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - x) = 0$$

$$1 - 9x$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = x$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$x \geq 0$$

$$11x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$x \geq 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; \frac{7}{26}] \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$Ans: \frac{1}{9}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3x^2 + 3x + 1 \geq (9x - 1)^2 \\ 9x - 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \\ 9x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$9x - 1 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$9x - 1 < 0$$

$$81x^2 - 18x \leq 0$$

$$x \geq \frac{1}{9}$$

$$x < \frac{1}{9}$$

$$x(26x - 7) \leq 0$$

$$x \geq \frac{1}{9}$$

$$x < \frac{1}{9}$$

$$x \in (-\infty; \frac{7}{26}]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

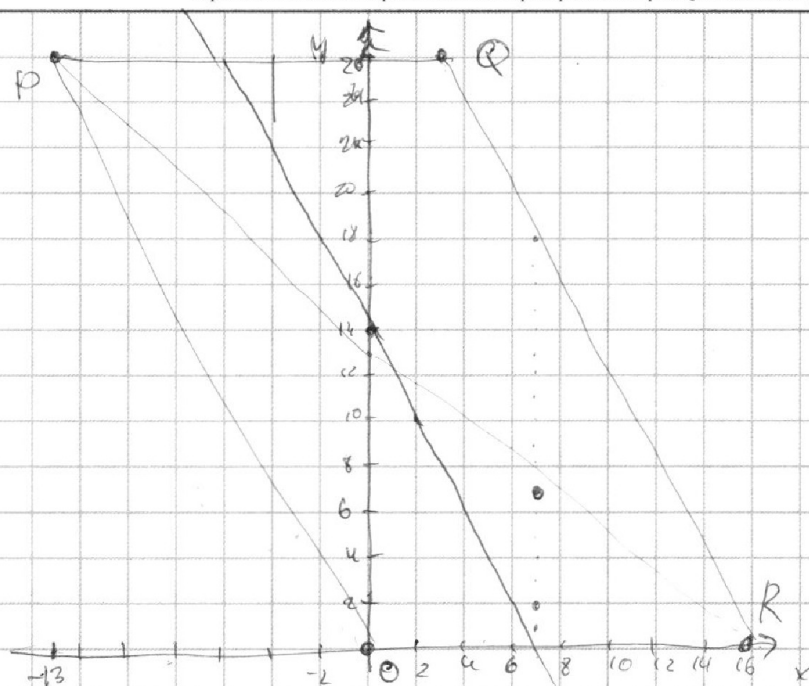
7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6.



$$y_2 - y_1 = -2x_2 + x_1 + 14$$

$$y_2 - y_1 = -2(x_2 - x_1) + 14$$

$$\Delta y = -2\Delta x + 14$$

$$\Rightarrow y_2 - y_1 : 2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

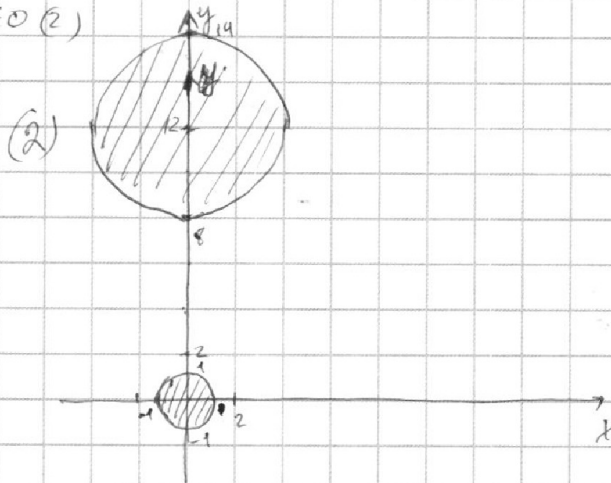
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



В. $\begin{cases} ax+y+8b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 & (2) \end{cases}$

$a=?$: $\exists b$ т.ч. 2 р-и.

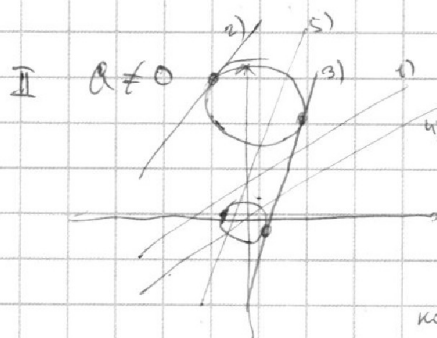
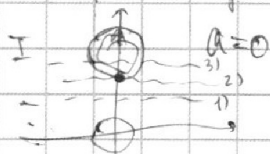
(2) $\begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ (y-12)^2+x^2 \geq 16 \\ x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$



(1) $ax+y-8b=0$

$y = -ax + 8b$ - прямая

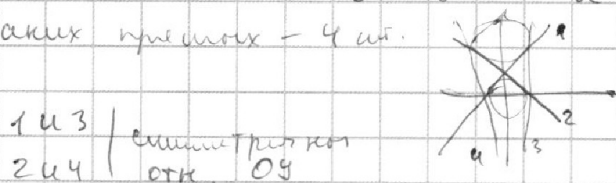
Рассмотрим случаи:



пример:
ко-во р-и: 0 - ш1)
1 - 2)
возможное
2 - 3)

возможное
ко-во решений:
пример
0 - 1)
1 - 2)
2 - 3)
2 - 4) или 5)

Подходит все прямые, которые
являются касательными к 2-ой окр.
Таких прямых - 4 шт.



Изобразим y из $ax+y-8b=0$: $y = -ax+8b$ и подст. в уравн окр.:

$\begin{cases} x^2 + (8b-ax)^2 = 1 \\ x^2 + (ax+8b-12)^2 = 16 \end{cases}$ каждое из уравнений описывает окр. имеет ровно 1 р-и (т.е. только 1 точка касания), это значит, что $D=0$

$\begin{cases} (a^2+1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0 \\ (a^2+1)x^2 + 2(8b-12)x + (8b-12)^2 - 16 = 0 \end{cases}$
 $\Delta_{1,2} = 64a^2b^2 - (64b^2-1)(a^2+1) = 0$
 $\Delta_{3,4} = (8b-12)^2 - ((8b-12)^2-16)(a^2+1) = 0$

(продолжение дальше)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(продолжение № 6)

$$\begin{cases} 64a^2b^2 - (64b^2 - 1)(a^2 + 1) = 0 \\ (8b - 12)^2 - ((8b - 12)^2 - 16)(a^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 64b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16a^2 - (8b - 12)^2 + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 64b^2 + 1 = 0 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2 - (2b - 3)^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 64b^2 - 1 - 4b^2 + 12b - 9 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \pm \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ответ: $a = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} ; -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

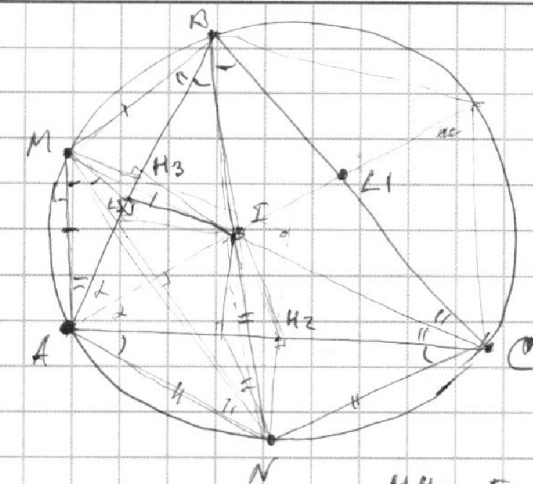
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AI = ?$

↑
центр впис. окр.

$\angle AN = \angle NC \Rightarrow BN - \text{бис. } \angle ABC$
($AN = MB$) $CM - \text{бис. } \angle ACB$ (аналог.)
 $\Rightarrow BN \cap CM = I$

по теореме о треугольнике:

$$AN = CN = IN$$

$$BM = AM = MI$$

$MH_3 = 5$, $NH_2 = 2,5$ — медиан. бис. $\angle$ $\triangle$ AMB и $\triangle ANC$
(биссектрисы $\angle A$ и $\angle C$)

IL_2 — радиус впис. окр. к AC

IL_3 — радиус впис. окр. к AB

$IL_2 \parallel NH_2$, $IL_3 \parallel MH_3$

$$\text{Из } \triangle LABN - \triangle LCN = \angle \quad \angle MAN - \angle MCA = \angle \quad \Rightarrow \quad AC = 2 \operatorname{tg} \delta \cdot NH_2$$

$$AB = 2 \operatorname{tg} \delta \cdot MH_3$$

$$AI - \text{бис.} \Rightarrow \frac{AI}{IL_1} = \frac{AC}{AL_1} = \frac{AC}{AB} = \frac{\operatorname{tg} \delta \cdot NH_2}{\operatorname{tg} \delta \cdot MH_3}$$

$$\frac{AI}{IL_1} = \frac{AB}{BL_1} = \frac{AC}{CL_1} = 2 \operatorname{tg} \delta \cdot MH_3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

