



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab : 2^{15} \cdot 7^{14} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{16} \\ ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases}$$

Если перемножить ab, bc, ac , то так как a и b делятся минимально на $2^{15} \cdot 7^{14}$, bc делится минимально на $2^{17} \cdot 7^{16}$, а ac делится минимально на $2^{23} \cdot 7^{39}$, то результат будет делиться минимально на $2^{55} \cdot 7^{68}$.

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{68} \Leftrightarrow (abc)^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}, \text{ но квадрат натурального}$$

числа обязательно должен делиться на квадрат каждого из чисел в каноническом разложении. $\Rightarrow$ если $(abc)^2 : 2^{55}$, то $(abc)^2 : 2^{56}$

$(abc)^2 : 2^{56} \cdot 7^{68}$, а bc входит в квадрат, значит минимально умножим его на $2^{26} \cdot 7^{34}$, тогда $abc : 2^{26} \cdot 7^{34}$, это значение и есть минимальное произведение abc .

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

рассмотрим дроби

$$\frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b}$$

найти НОД($9ab, a+b$)

1) $9ab = (a+b)m$

$$9ab = a+b$$

тогда $a = \frac{b}{9b-1}$

и $a:b = \frac{1}{9b-1}$ - сокращенная дробь

2) $9ab = k(a+b)$ тогда $a+b = \frac{a}{k}$

$$b = \frac{a}{a-1} \text{ и } \frac{a}{b} - \text{сокращенная}$$

или

$$a+b = 9a$$

$$a = \frac{b}{8} \text{ и } \frac{a}{b} - \text{сокращенная}$$

$$a+b = 9b \text{ аналогично.}$$

3) $9abk = (a+b)$ тогда $a = \frac{b}{9bk-1}$ и $\frac{a}{b}$ сокращенная

4) ~~$9abk = m(a+b)$~~

Ответ: $m=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = (1-9x) \quad \text{ОДЗ:}$$

$$3x^2-6x+2 \geq 0 \quad \left[1-\frac{\sqrt{9}}{3}, 1+\frac{\sqrt{9}}{3}\right]$$

$$3x^2+3x+1 \geq 0 \quad (-\infty, +\infty)$$

$$1-9x = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$(1-9x)(1 - \sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1}) = 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$1 = \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2 > 0$$

$$1 = 3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 + 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}$$

$$\frac{3}{81} + \frac{3}{9} + 1 > 0$$

$$6x^2-3x+2 = -2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}$$

$$36x^4 - 18x^3 + 12x^2 - 18x^3 + 9x^2 - 6x + 12x^2 - 6x + 4 = 4(5x^4 + 5x^3 + 13x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2)$$

$$36x^4 - 36x^3 + 33x^2 - 12x + 4 = 36x^4 + 36x^3 + 12 - 36x^2 + 8$$

$$72x^3 - 69x^2 + 12x + 4 = 0$$

т.к. $72x^3 > 69x^2$, то у уравнения больше чем положительных корней, то есть оставшиеся корни не удовлетворяют ОДЗ.

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{9}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+y-66=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

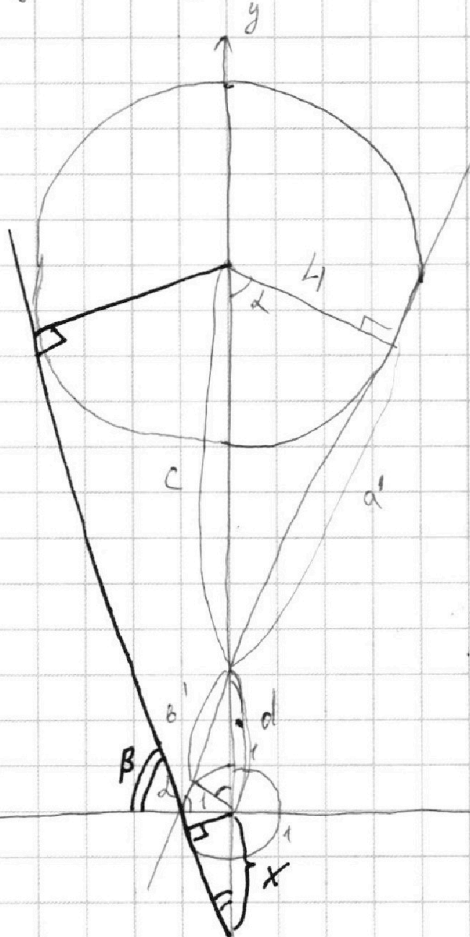


График второго уравнения - внутренность окружностей, включая границу. График второго уравнения - прямая. Нужно, чтобы эта прямая была общей касательной.

$$1) \operatorname{tg} \alpha = (-a) = \frac{a'}{4} = \frac{6}{4} \Leftrightarrow a = 9.6$$

9 - коэффициент подобия Δ -ов

$$\begin{cases} c+d=12 \\ c=4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=\frac{12}{5} \\ c=\frac{48}{5} \end{cases}$$

$$d = \frac{12}{5} \quad (6) \text{ в уравнении прямой}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{d^2-1}}{1} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

В силу симметрии рисунка
подходит $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{119}}{5}$

$$a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

2) Из подобия Δ -ов, образованных внешней секущей $k = \frac{1}{4}$
тогда $\frac{x}{x+12} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{12}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{5}{\sqrt{119}} = \frac{5\sqrt{119}}{119}$

В силу симметрии рисунка этот коэффициент тоже может быть с другим знаком.

Отв: $a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$; $\pm \frac{5\sqrt{119}}{119}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

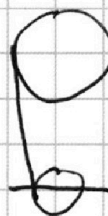
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

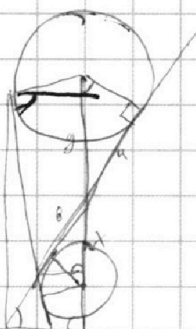
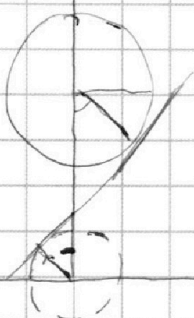
$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

4-1

$$5 \cdot (4 + 144 - 16) \leq 0$$



14 135



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{1} = \frac{a}{1} \quad a = 90$$

$$1+x$$

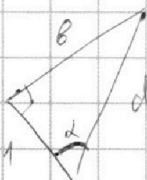
$$x+y=11$$

$$\frac{y}{x}=4$$

$$y=9x$$

$$4x=x+12$$

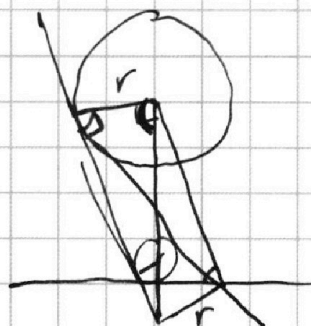
$$x=$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{144-1}}{1} = \frac{\sqrt{143}}{1} = \frac{119}{5}$$

$$\frac{144}{25} = 5.76$$

$$ax$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

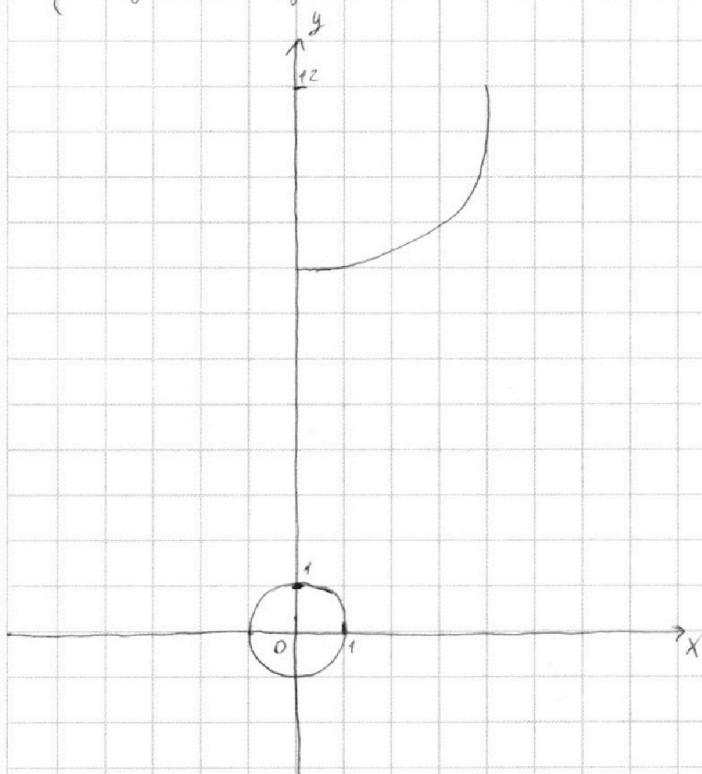
6
☒

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 88 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$$\begin{cases} ax+y-66=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

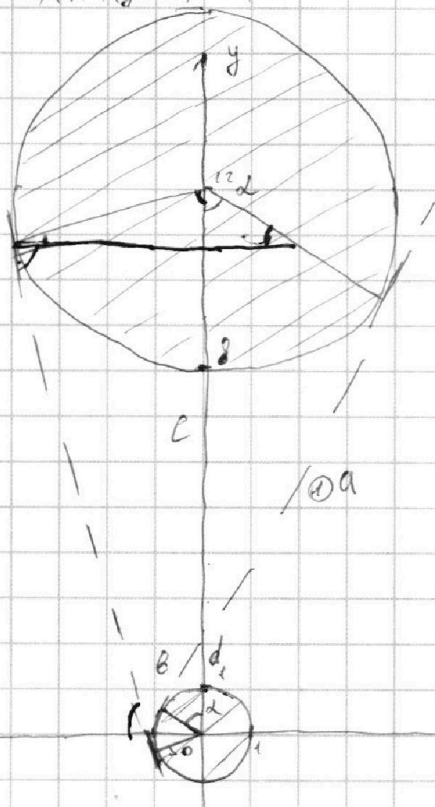


График второго уравнения - внутренности окружностей, внешняя граница. График первого уравнения - прямая. Нужно чтобы эта прямая была общей касательной двух окружностей.

$$1) \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{4} = 1 \Leftrightarrow a = 4b$$

4 - коэффициент наклона треугольника

$$\begin{cases} c+d=12 \\ c=4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{12}{5} \\ c = \frac{48}{5} \end{cases}$$

$d = \frac{12}{5}$ - это коэффициент в уравнении

$$y = 66 - ax$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{(12/5)^2 - 1}}{1} =$$

подставим + известную точку

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{1} = \frac{\sqrt{11.51}}{5}, \quad \frac{12}{5} = a$$

коэффициент (-a) в уравнении $y = -ax + 66$

тогда на прямая, симметричная данной, относительно Oy будет также подходить под условие. $a = \pm \frac{\sqrt{11.51}}{5}$

$$\frac{3-54}{61} = -\frac{51}{61} + 2$$

$$\frac{3}{61} + \frac{3}{9} + 1 = \frac{30}{61} + 1 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on a grid background. The work includes various algebraic manipulations, factorizations, and derivations. Key elements include:

- Top Left:** A QR code.
- Top Center:** Instructions in Russian regarding task selection and page marking.
- Top Right:** The logo of the Moscow Institute of Physics and Technology (МФТИ).
- Main Content:**
 - Algebraic expressions involving variables a, b, c and their powers, such as $a^2b^2c^2$, $a^2b^2c^2 - 7$, and $a^2b^2c^2 - 56$.
 - Factorizations and simplifications, including $a^2 - 7ab + b^2$ and $(a+b)^2 - 9ab$.
 - Derivations of formulas, such as $a^2 - 7ab + b^2 = (a-b)^2 - 5ab$ and $(a+b)^2 - 9ab = (a+b) - \frac{9ab}{a+b}$.
 - Use of the quadratic formula and other algebraic techniques.
 - Final results and conclusions, including $k = \frac{9ab}{a+b}$ and $\lambda = x$.

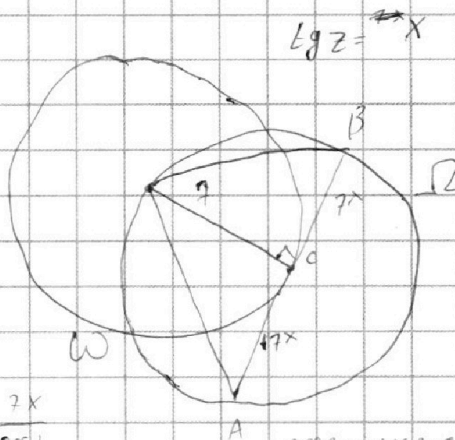
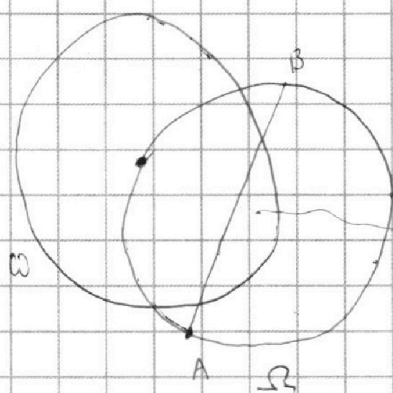
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

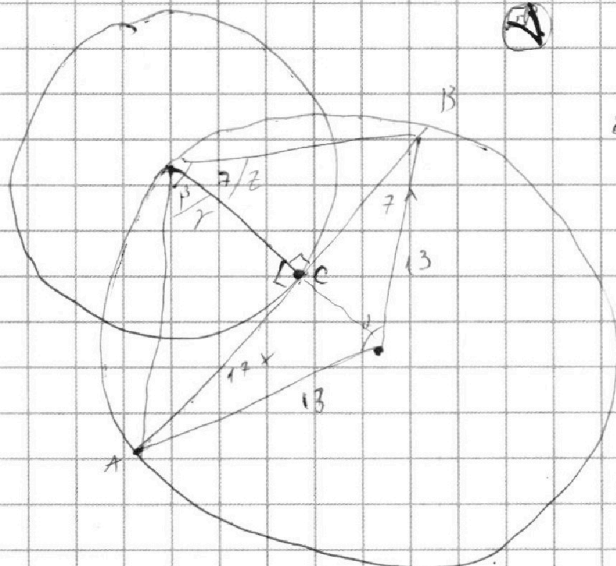
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{r}{\sin \alpha} = \frac{2x}{\cos \alpha}$$



$$2x + 2\beta = 360$$

$$2\alpha + \beta = 720$$

$$\alpha = 360 - \frac{1}{2}\beta = 2\pi - \frac{1}{2}\beta$$

$$2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cos \alpha = 576x^2$$

$$\cos(2\pi - \beta) = \cos 2\pi \cdot \cos \beta + \sin 2\pi \cdot \sin \beta$$

$$2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot \cos(\frac{1}{2}\beta) = 576x^2$$

$$\frac{1}{2}\beta = \cos(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha) =$$

$$= \cos(\frac{1}{2}\alpha) \cdot \cos(\frac{1}{2}\alpha) - \sin(\frac{1}{2}\alpha) \sin(\frac{1}{2}\alpha) = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - 1$$

$$\cos(\alpha) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{1 - \frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{19 + 17x^2}$$

$$\cos(\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{7}{\sqrt{7^2 + 17x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{19 + 17x^2}{19 + 17x^2}} \sqrt{1 - \frac{19 + 17x^2}{19 + 17x^2}}$$

$$\frac{13}{5.9} = \frac{13}{5.9}$$

$$\frac{338 - 576x^2}{5.58} = \cos \alpha$$

$$\frac{2 \cdot 13^2 - 576x^2}{2 \cdot 13^2} = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = 2 \cos^2 \beta - 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1 = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 3x$$

$$1 = 3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{\dots}$$

$$1 = 6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{\dots}$$

$$3x - 6x^2 - 2 = 2\sqrt{\dots}$$

$$3x(6x^2 - 3x + 2)^2 = 2(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1) = 2(9x^4 + 9x^3 + 9x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2) = 2(9x^4 + 9x^3 - 9x^2 - 9x^2 + 2)$$

$$36x^5 - 36x^4 + 12x^2 - 18x^3 + 9x^2 - 6x + 6x^2 - 6x + 9 = 36x^5 - 18x^3 + 12x^2 - 18x^3 + 9x^2 - 6x + 6x^2 - 6x + 9 = 36x^5 - 18x^3 + 9x^2 - 12x + 4$$

$$18x^4 - 18x^3 - 18x^2 + 9x = 36x^5 - 18x^3 + 9x^2 - 12x + 4$$

$$18x^3 - 18x^2 - 18x = 36x^5 - 18x^3 + 9x^2 - 12x + 4$$

$$18x^3 + 27x - 12 = 0$$

$$9x^3 + 9x - 4 = 0$$

$$9 \cdot 8 + 9 \cdot 2 - 4$$

$$9x(x^2 + 1) - 4 = 0$$

$$6x^2 + 9x - 4 = 0$$

$$9x(x^2 + 1) - 4 = 0$$

$$2 = 1 + 1$$

$$2 \cdot 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x = 2^2$$

$$\frac{2 \cdot 3}{8} \cdot \frac{6}{8} + \frac{27}{2}$$

$$g = -ax + 186$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\frac{9}{4} = 9 - 6 - 3$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{37}}{3}$$

$$\frac{6}{8} + \frac{9}{2} = \frac{3}{4} + \frac{9}{2} = \frac{3 + 18}{4} = \frac{21}{4}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$9 = 9 - 12$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2\beta = 2\cos^2(\gamma + z) - 1$$

$$\sin^2 L + \sin^2 L \cdot \cos^2 L = 1$$

$$\cos(\gamma + z) = \cos(\gamma) \cos(z) - \sin \gamma \sin z$$

$$\sin^2 L =$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \gamma + 1}}$$

$$\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{\cot^2 \gamma + 1}}$$

$$2 \cdot \sqrt{\frac{1}{(\tan^2 \gamma + 1)(\tan^2 z + 1)}} - \sqrt{\frac{1}{(\cot^2 \gamma + 1)(\cot^2 z + 1)}}$$

$$2 \frac{1}{(\tan^2 \gamma + 1)(\tan^2 z + 1)} + \frac{2}{(\cot^2 \gamma + 1)(\cot^2 z + 1)} - \frac{\sqrt{4}}{(\tan^2 \gamma + 1)(\tan^2 z + 1)} - 1$$

$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2 + 2ab + b^2 - 9ab} =$$

$$a+b - \frac{9ab}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{(a+b)^2} \Bigg| \frac{a+b}{a+b}$$

$$a^2 - 7ab + b^2 \Bigg| a+b$$

$$a^2 - b^2 : m$$

$$a : m \quad b = m$$

$$a+b \Bigg| \frac{9ab}{\frac{1}{9a} + \frac{1}{9b}}$$

$$9 - 7 \cdot 2 \cdot 3 + 4$$

$$9 \cdot 13 - 12$$

$$\frac{pq}{p+q}$$

$$\frac{pq}{p+q} = k$$

$$9pq = k(p+q)$$

$$(p+q) = k \frac{pq}{9}$$

$$a(9b-1) = b$$

$$a = \frac{b}{9b-1}$$

$$9ab = m(a+b)$$

$$a = b(a-1)$$

$$a(1-b) = b$$

$$b = \frac{a}{a-1}$$

$$a =$$

$$a(9bk-1) = b$$

$$a =$$