МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 1

Пусть $a = 2^d \cdot 7^e \cdot x$, $x, d, e \in \mathbb{N}$ и $\begin{cases} x \not\vdots 2 \\ x \not\vdots 7 \end{cases}$

$b = 2^f \cdot 7^g \cdot y$, $y, f, g \in \mathbb{N}$ и $\begin{cases} y \not\vdots 2 \\ y \not\vdots 7 \end{cases}$

$c = 2^h \cdot 7^j \cdot z$, $z, h, j \in \mathbb{N}$ и $\begin{cases} z \not\vdots 2 \\ z \not\vdots 7 \end{cases}$

Просто напрямую выделили наибольшие степени 2 и 7 у a, b, c.

Получаем, что
$$\begin{cases} \begin{cases} ab \vdots 2^{15} \cdot 7^{11} \\ ab \vdots 2^{d+f} \cdot 7^{e+g} \end{cases} \\ \begin{cases} ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39} \\ ac \vdots 2^{d+h} \cdot 7^{e+j} \end{cases} \\ \begin{cases} bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{18} \\ bc \vdots 2^{f+h} \cdot 7^{g+j} \end{cases} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2^{d+f} \cdot 7^{e+g} \geq 2^{15} \cdot 7^{11} \\ 2^{d+h} \cdot 7^{e+j} \geq 2^{23} \cdot 7^{39} \\ 2^{f+h} \cdot 7^{g+j} \geq 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$$

т.к. $d, e, \ldots$ — наибольшие степени в числах

$$\begin{cases} d + f \geq 15 & \text{I)} \\ e + g \geq 11 & \text{II)} \\ d + h \geq 23 & \text{III)} \\ e + j \geq 39 & \text{IV)} \\ f + h \geq 17 & \text{V)} \\ g + j \geq 18 & \text{VI)} \end{cases}$$

~~Из I и III $2d + f + h \geq 38$ и т.к. V, то $2d \leq 21$ $d \leq \frac{21}{2}$ $d \leq 10$, т.к. $d \in \mathbb{N}$. А т.к. I, то ... $f \geq 5$ ... То III и IV $h \geq 13$ и $h \leq 12$~~

$\text{I} + \text{V} + \text{III} = 2(d+f+h) \geq 55$ $d+f+h \geq \frac{55}{2}$ $d+f+h \geq 28$,

т.к. $d, f, h \in \mathbb{N}$. Т.к. надо найти наименьшее значение abc, а $abc = 2^{d+f+h} \cdot 7^{e+g+j} \cdot xyz$, то возьмём $d+f+h = 28$, тогда при ~~$h = 14$, $f = 4$~~ $d = 10$, $f = 5$, $h = 13$ все нужные неравенства выполнены и $d + f + h = 28$

$\text{II} + \text{IV} + \text{VI} = 2(e+g+j) \geq 68$ $e+g+j \geq 34$ Т.к. надо найти наименьшее значение abc, то соответственно надо найти наименьшее значение $e+g+j$. Пусть $e+g+j=34$, ~~тогда~~ то т.к. $e+j\geq 39$, то $e+g+j\geq 39$ тоже, тогда пусть $e+g+j=39$ и при ~~$g=0$, $j=20$, $e=19$~~ $g=0$, $e=19$, $j=20$ выполняются все неравенства и $e+g+j=39$.

Т.к. надо найти наименьшее значение abc, то возьмём $x=y=z=1$,

тогда $abc=2^{1+f+h}\cdot 7^{e+g+j}=2^{28}\cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{39}$

№2

$\frac{a}{b}$ несократима $a \in N$, $b \in N$ $\Rightarrow$ если $a \overset{k}{\equiv} 0$, то $b \overset{k}{\not\equiv} 0$ и наоборот для $k \in N$.

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$, тогда если $(a+b) \vdots m$, то $(a+b)^2 \vdots m$ $\Rightarrow$ чтобы знаменатель можно было бы сократить на m $(a+b)^2 - 9ab \overset{m}{\equiv} 0$ и т.к. $(a+b)^2 \vdots m$, то $-9ab \overset{m}{\equiv} 0$ $9ab \vdots m$. Если $a \vdots m$, то раз $(a+b) \vdots m$, значит и $b \vdots m$, но $b \overset{m}{\not\equiv} 0$, т.к. $\frac{a}{b}$ несократима, а значит $a \not\vdots m$ и аналогично $b \not\vdots m$. Вообще $9 \vdots m$, т.к. в ином случае получается, что $m = 9 \cdot n$, $n \in N$ а тогда а или $b \vdots n$, но т.к. $(a+b) \vdots m$, то $(a+b) \vdots n$, следовательно $a \overset{n}{\equiv} b \overset{n}{\equiv} 0$, но такого быть не может $\Rightarrow$ $9 \vdots m$ $\Rightarrow$ наибольший $m = 9$. Такое будет при, например $a=4$, $b=5$

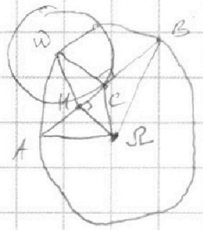
Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



Дано:
$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$
$R_\omega = 7$
$R_\Omega = 13$
$AB - ?$

Точка Ω, центр окружности Ω, не может лежать внутри ω, т.к. тогда $\Omega\omega \geq R_\Omega$, т.е. $\Omega\omega \geq 13$, и $\Omega\omega \leq R_\omega$, т.е. $\Omega\omega \leq 7$, но 7 не больше 13 ⇒ точка Ω лежит вне ω.

Проведём ΩH – перпендикуляр к AB. $\triangle A\Omega B$ – р/б, т.к. $\Omega A = \Omega B = R_\Omega$ ⇒
⇒ ΩH – высота, медиана и биссектриса в $\triangle A\Omega B$ ⇒ $AH = HB = \frac{AB}{2}$.

$\omega C \perp AB$, т.к. C – точка касания. Получается, что $\omega C \parallel \Omega H$, т.к. при секущей CH накрест лежащие углы $\angle \Omega HC = \angle \omega CH = 90°$. А значит $\omega C \Omega H$ – трапеция или параллелограмм, а значит $HC = \frac{\omega C + H\Omega}{2}$. Пусть $AB = 24x$, $x \in \mathbb{R}$, тогда $AH = HB = 12x$, $AC = 17x$, $BC = 7x$, $HC = HB - CB = 5x$

$HC = 5x = \frac{\omega C + H\Omega}{2}$ $\quad 10x = 7 + H\Omega$. По т. Пифагора для $\triangle HB\Omega$: $H\Omega = \sqrt{B\Omega^2 - HB^2} \overset{?}{=} \sqrt{169 - 144x^2}$; $\quad 10x = 7 + \sqrt{169 - 144x}$ $\quad \sqrt{169 - 144x} = 10x - 7$

$\begin{cases} 169 - 144x = 100x^2 - 140x + 49 \\ 10x - 7 \geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 100x^2 + 4x - 120 = 0 \\ 10x - 7 \geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 25x^2 + x - 30 = 0 \\ x \geq \frac{7}{10} \end{cases}$

Решим $25x^2 + x - 30 = 0$ $\quad D = 1 + 25 \cdot 4 \cdot 30 = 3001$ $\quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3001}}{50}$

$\begin{cases} x = \frac{\pm\sqrt{3001} - 1}{50} \\ x \geq \frac{7}{10} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3001} - 1}{50} \\ x \geq \frac{7}{10} \end{cases}$ $\quad \frac{\sqrt{3001} - 1}{50} \vee \frac{7}{10}$ $\quad \sqrt{3001} \vee 36$ $\quad \sqrt{3001} > 50 > 36$.

Получается только одно решение $x = \frac{\sqrt{3001} - 1}{50}$, тогда $AB = 24x = \frac{12\sqrt{3001} - 12}{25}$

Ответ: $AB = \frac{12\sqrt{3001} - 12}{25}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

Пусть $a = 3x^2+3x+1$, $a \geq 0$: $3x^2+3x+1 \geq 0$, $D = 9-12=-3<0$ и т.к. коэффициент при x^2 равен 3, то $a > 0$ $\forall x$

$b = 9x-1$

Тогда $3x^2-6x+2 = a-b$, $a-b\geq 0$, $3x^2-6x+2 \geq 0$, $D/4 = 9-6=3$, $x = \frac{3\pm\sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$,

а значит $x \in (-\infty; 1-\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1+\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$.

Для $x \in (-\infty; 1-\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1+\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$ $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = \sqrt{a-b} -$

$-\sqrt{a} = -b$ $\quad \sqrt{a-b} = \sqrt{a} - b$ $\quad a-b = a - 2b\sqrt{a} + b^2$ $\quad b^2 - 2b\sqrt{a} + b = 0$

$b^2 + b(1-2\sqrt{a}) = 0$ $\quad b(b+1-2\sqrt{a}) = 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b = 2\sqrt{a}-1 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ 9x-1 = 2\sqrt{3x^2+3x+1}-1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ 9x = 2\sqrt{3x^2+3x+1} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ 81x^2 = 12x^2+12x+4 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ 69x^2-12x-4=0 \end{array}\right.$

Решим $69x^2-12x-4=0$ $\quad D/4 = 36+4\cdot 69 = 312$ $\quad x = \frac{6\pm 2\sqrt{78}}{69}$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ x=\frac{6\pm 2\sqrt{78}}{69} \end{array}\right.$ $\quad x = \frac{1}{9}$; $\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \notin [1-\frac{1}{\sqrt{3}}; 1+\frac{1}{\sqrt{3}}]$ $\quad \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

$6\sqrt{3}+6\sqrt{26} \vee 69\sqrt{3}-69$ $\quad 2\sqrt{3}+2\sqrt{26} \vee 23\sqrt{3}-23$

$2\sqrt{26} \vee 21\sqrt{3}-23$ $\quad \frac{64}{2} > 21\cdot\frac{3}{2} > 21\cdot\sqrt{3}$

$2\sqrt{26} \vee 32-23$ $\quad \sqrt{104} > \sqrt{81} > 21-\sqrt{3} \Rightarrow \frac{6+2\sqrt{78}}{69} > 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$ $\quad 6\sqrt{3}+6\sqrt{26} \vee 69\sqrt{3}+69$ $\quad 2\sqrt{26} \vee 21\sqrt{3}+23$

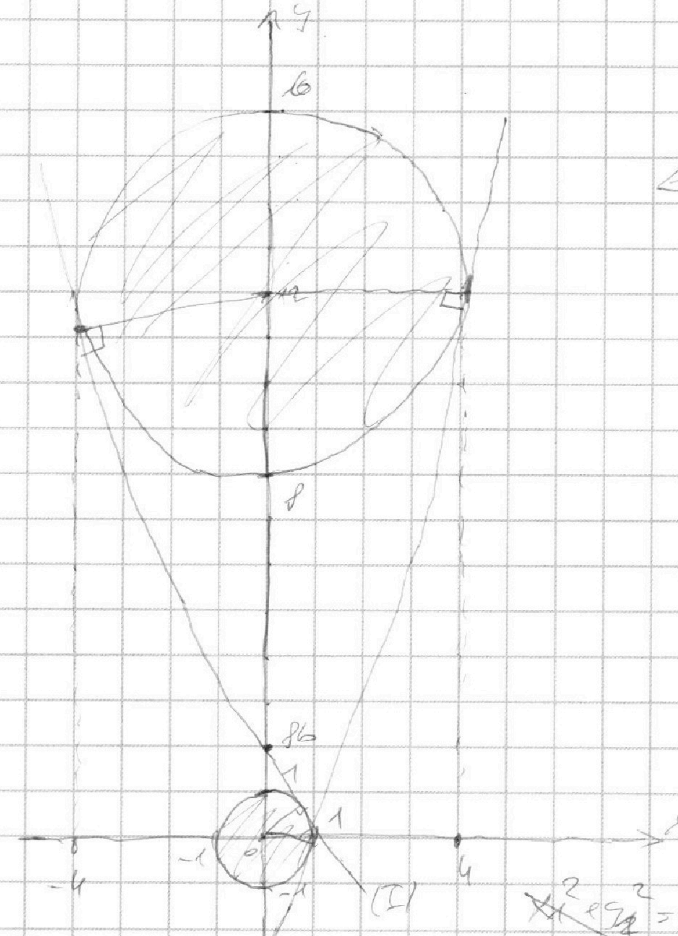
$21\sqrt{3}+23 > \sqrt{441\cdot 3} > \sqrt{104}$

Получилось, что $\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \in [1-\frac{1}{\sqrt{3}}; 1+\frac{1}{\sqrt{3}}] \Rightarrow$ не подходит, так как в выражении $\sqrt{3x^2-6x+2}$ под корнем будет отрицательное число.

Ответ: $x = \frac{1}{9}$; $\frac{6-2\sqrt{78}}{69}$.

№6

$\begin{cases} ax+y-8b=0 \quad (I) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \quad (II) \end{cases}$



На этом графике изображены все точки, удовлетворяющие неравенству II, т.е. две окружности с точками внутри них, чтобы у системы $\{^{I}_{II}$ было ровно 2 решения, прямая I должна касаться окружностей ровно два раза, а значит быть касательной для обоих, а значит для ~~окружности на (x;y)~~ пар $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ будет выполняться

$\begin{cases} ax_1+y_1-8b=0 \\ x_1^2+y_1^2 \le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} ax_2+y_2-8b=0 \\ x_2^2+(y_2-12)^2 \le 16 \end{cases}$

$x_1^2+y_1^2=1$ и $x_2^2+(y_2-12)^2=16$ ~~равенства~~, т.к. I – касательная $\Rightarrow$ имеет общие точки с ~~самими~~ окружностями, а не их внутренностями. Рассмотрим сначала пару $(x_1;y_1)$

$\begin{cases} ax_1+y_1=b \\ x_1^2+y_1^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1=b-ax_1 \\ x_1^2+(b-ax_1)^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1=b-ax_1 \\ x_1^2+b^2-2abx_1+x_1^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1=b-ax_1 \\ 2x_1^2-2abx_1+b^2-1=0 \end{cases}$

Рассмотрим $2x_1^2-2abx_1+b^2-1=0$. Корней x_1 должно быть два, т.к. есть две общие касательные, симметричные относительно Oy. $\frac{D}{4}>0$ $\frac{D}{4}=a^2b^2-2b^2+2=b^2(a^2-2)+2>0$ $2>$ ~~$b^2(a^2-2)$~~ $b^2(2-a^2)$

Заметим, что I пересекает Oy в точке $(0;8b)$, и из центра окружностей (радиусы которых 1 и 4) можно провести по радиусу в точку касания и они будут перпендикулярны I. По т. Пифагора ~~$1(8b)^2$~~

$(8b)^2-1+(12-8b)^2-16=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

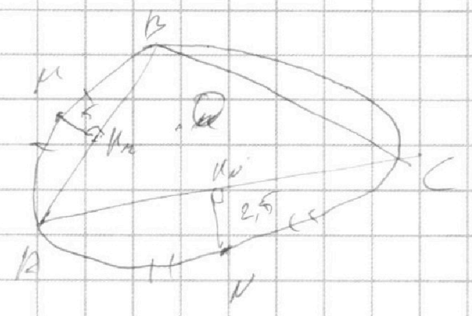
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$64b^2 - 1 + 144 - 192b + 64b^2 - 16 = 128b^2 - 192b + 127 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ax_2 - cy_2 - b = 0$

$x^2 + (y^2 - 12)^2 = 16$

$y = 8b - ax$

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} -87x^2+15x+2 \geq 0 \\ 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ (-87x^2+15x+2)^2 = (3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1) \end{cases}$$

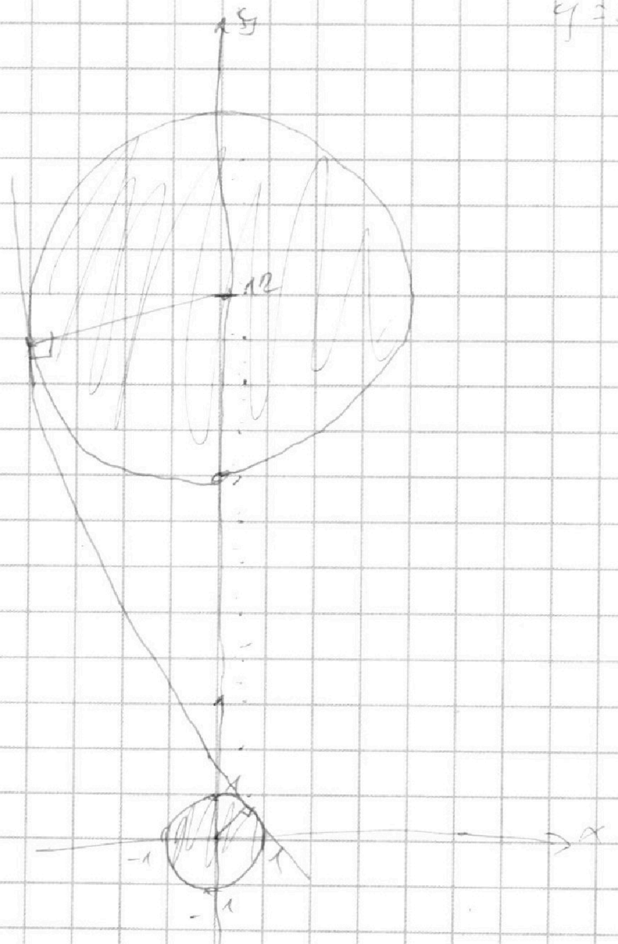
$(a+b+c)^2 = a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2 =$

$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

87^2

$87^2x^4 + 2\cdot 87\cdot 15x^3 - 4\cdot 87x^2 + 120x + 125x^2 + 4$

$y = 36 - ax$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

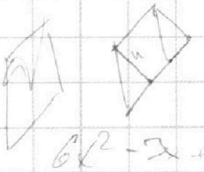
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = 2^d \cdot 7^e \cdot x, \quad b = 2^f \cdot 7^g \cdot y, \quad c = 2^h \cdot 7^j \cdot z \qquad d, e, f, g, h, j \in \mathbb{Z}$

$ab : 2^{d+f} \cdot 7^{e+g} \qquad \begin{cases} d+f \geq 15 \\ e+g \geq 11 \end{cases}$ $\qquad x, y, z \,\vdots\, 2, 7$

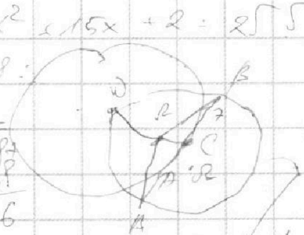


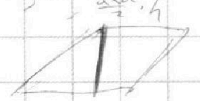
$bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \qquad \begin{cases} f+h \geq 17 \\ g+j \geq 18 \end{cases}$

$6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{\;}\sqrt{\;} = 81x^2 - 18x + 1$

$-87x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{\;}\sqrt{\;}$

$ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \qquad \begin{cases} d+h \geq 23 \\ e+j \geq 39 \end{cases}$

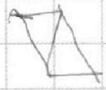


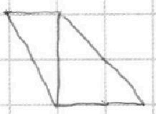


3001: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$

$R_\omega = 7 \qquad R_\Omega = 13$

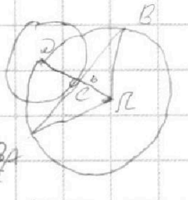
$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$





$2(d+f+h) \geq 55 \qquad d+f+h \geq 55 \qquad d+f+h \geq 28$

$2(e+g+j) \geq 68 \qquad e+g+j \geq 34$



$\Omega C = R_\Omega - R_\omega = 13 - 7 = 6$

$13x^2 - 6x + 1 = 0 \qquad 3x^2 + 5x + 1 = 0$

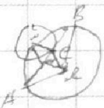
$A\Omega = \Omega B = 13$

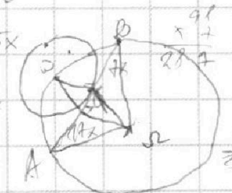
$\frac{D}{4} = 9 + 6 = 3 \qquad D = 9 - 3 \cdot 4 = -3$

Нет корней

$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{7+h}{2} = \frac{5}{12} AB \qquad 7 + h = \frac{5}{12} AB$





$6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{\;}\sqrt{\;} = 81x^2 - 18x + 1$

$-87x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})}$

$\sqrt{169 - 144x} = 10x$

$D = 225 + 87 \cdot 8 = 1821$

$h = \sqrt{169 - 144x}$

$7 + h = 10x$

$100x^2 + 4x - 120 = 0$

$25x^2 + x - 30 = 0$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{a+b}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})}$

$AB = \frac{24\sqrt{3001} - 24}{50}$

$49 + 169 - 144x = 2\sqrt{\;} \qquad 100x$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3001}}{50}$

$U = a+b \qquad V = ab$

$\frac{U}{U^2 - 9V}$

$\frac{\sqrt{3001} - 1}{50}$

$25 = 244x - 218$

$\sqrt{3001} \approx 36$