МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1

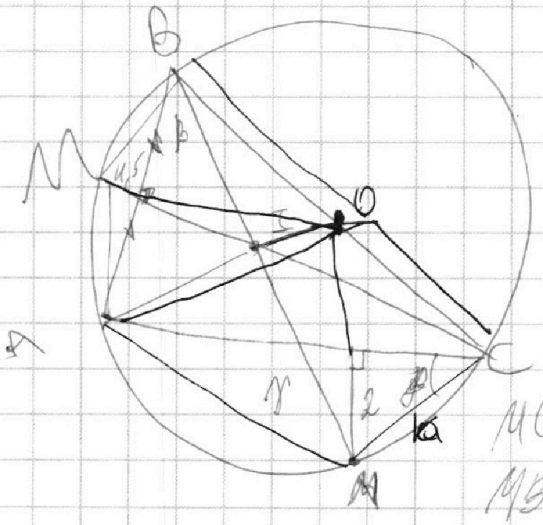
У a, b и c нет других делителей, кроме 2 и 3, если произведение a, b и c нечетно, то оно должно делиться на 9 и 3 соответственно, иначе оно делится на 6. Пусть a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 – степени вхождения 2 и 3 в числа a, b и c. Тогда из-за делимости на 6 и 9:

$a_1+b_1+c_1 \geq 4$, $a_1+b_1 \geq 3$, $a_1+c_1 \geq 2$

Чертовщина.

$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = 2,25$ $\boxed{\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 1,5}$

$2\sin^2\gamma = 4,5\sin^2\beta$



$\frac{MC}{\sin\beta} = \frac{2}{\sin^2\beta} = 2R = \frac{4,5}{\sin^2\gamma}$

$\frac{MC}{\sin\beta} = 2R$

$MC \cdot \sin\beta = 2$. $MC \cdot 1,5\sin\gamma = 2$

$MB \cdot \sin\gamma = 4,5$ $MB \cdot \sin\gamma = 4,5$

$\sin\beta = 1,5\sin\gamma$

$\frac{MC \cdot 1,5}{MB} = \frac{2}{4,5}$

$\frac{MC}{MB} = \frac{2}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1

~~abc: 27 чего знаменателя ~~ ~~Пусть a~~ Заметим, что для того, чтобы abc было наименьшим, у чисел a, b и c не должно быть делителей, отличных от 2 или 7 (иначе можно поделить числа на эти делители и для них всё равно будет выполняться условие задачи). Тогда пусть $a=2^{a_1}\cdot 7^{a_2}$, $b=2^{b_1}\cdot 7^{b_2}$, $c=2^{c_1}\cdot 7^{c_2}$ (для чисел, которые произведены наименьшие). Из условия делимости: $a_1+b_1\geq 14$, $c_1+b_1\geq 17$, $a_1+c_1\geq 20$. Поскольку числа a, b и c – натуральные, то a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 и c_2 – целые неотрицательные.

~~$2a_1+b_1+c_1\geq 34$, $b_1+c_1\geq 17$, ~~ Сложим все неравенства, тогда $2a_1+2b_1+2c_1\geq 14+17+20=51$ – нечетное число. Тогда

$\underbrace{2a_1+2b_1+2c_1}_{\text{четное число}}$
$2(a_1+b_1+c_1)$

Верно, что $2a_1+2b_1+2c_1\geq 52$, $a_1+b_1+c_1\geq 26$. Если ~~хотим~~ требуется, чтобы abc было наименьшим, нужно подобрать наименьшие подходящие значения a_1, b_1, c_1. Тогда $a_1+b_1+c_1=26$. Допустим, что существуют подходящие a_1, b_1, c_1. Если $a_1+c_1=20$, то $b_1=26-20=6$. $a_1+b_1\geq 14$, $b_1=6$, $a_1\geq 8$, $a_1=8$. $a_1+c_1=20$, $a_1=8$, $c_1=20-8=12$. $c_1+b_1=12+6=18\geq 17$ – верно. Аналогично из-за делимости: $a_2+b_2\geq 10$, $b_2+c_2\geq 17$, $c_2+a_2\geq 37$. Тогда $2(a_2+b_2+c_2)\geq 37+10+17=64$, $a_2+b_2+c_2\geq 32$, но ~~это~~ при этом разнести это невозможно, так как $a_2+c_2\geq 37$, но заметим, что требуемые условия могут выполняться, например, при $b_2=0$, $c_2+a_2=37$, $a_2=17$, $c_2=20$. (на значение abc влияют только суммы вхождения степеней 2 и 7, а не их конкретные значения для каждого числа. В частности значения степеней вхождения приведены, чтобы доказать возможность такой ситуации). Тогда заметим, что при наименьшем значении abc, $a_1+b_1+c_1=26$, $a_2+b_2+c_2=37$, тогда, поскольку у чисел a, b и c нет других делителей, то $abc=2^{26}\cdot 7^{37}$.

Ответ: $2^{26}\cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2. Ответ: $m=8$.

$\frac{a}{b}$ несократима, значит a и b взаимно простые числа.

Пусть $a+b \vdots m$ и $a^2-6ab+b^2 \vdots m$, тогда заметим, что a и b взаимнопросты с m, потому что если у a и m, есть делитель p, то поскольку $a+b \vdots m$, то $a+b \vdots p$, то $b \vdots p$, но a и b взаимно просты. Так же $(a+b)^2 \vdots m$, $a^2+2ab+b^2 \vdots m$. Тогда, $a^2+2ab+b^2-a^2-6ab+b^2 \vdots m$, $8ab \vdots m$. $a+b \vdots m$, $a \underset{m}{\equiv} -b$, тогда из $8ab \underset{m}{\equiv} 0$ $(8ab \vdots m) \equiv -8b^2 \equiv 0$. $-8b^2 \underset{m}{\equiv} 0$, тогда $8b^2 \vdots m$, аналогично $8a^2 \vdots m$. ~~Но тогда 8ab~~ m. Ранее было доказано, что a и b взаимнопросты с m, тогда можно сказать, что из $8b^2 \vdots m$, $8 \vdots m$, а значит $8 \geq m$. Тогда посмотрим может ли быть $m=8$. Да может, например при $a=3$ и $b=5$, тогда $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{3+5}{9+25-6\cdot 15} = \frac{8}{34-90} = -\frac{8}{56}$, заметим что $56 \vdots 8$ и $8 \vdots 8$.

Ответ: $m=8$ - наибольшее возможное значение m.

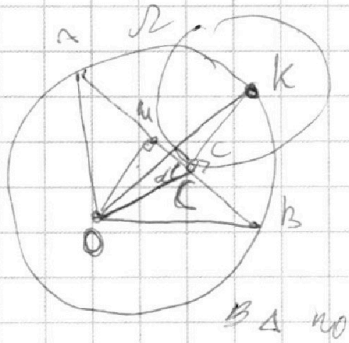
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3



Пусть O - ~~центр~~ центр Ω, тогда пусть M - середина AB, тогда из OA = OB (радиусы) следует △ABO - равнобедренный, тогда OM также и высота. $\frac{AC}{CB} = 7$, $AC = 7CB$. $AC + CB = AB$, тогда $AB = 8CB$. M - середина AB, тогда $AM = \frac{8 \cdot CB}{2} = 4CB$, $MC = \frac{8CB}{2} - CB = 3CB$. Заметим, что тогда в △ по теореме Пифагора в △AOM $MO = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{25 - 16CB^2}$. В △OCM $OC = \sqrt{OM^2 + MC^2} = \sqrt{25 - 16CB^2 + 9CB^2} = \sqrt{25 - 7CB^2}$

Пусть K - ~~центр~~ ω, тогда KC = 1 (радиус ω). Пусть ∠OCA = α. Тогда ∠OCK = α + 90° (центр, так как KC ⊥ AB (AB касается ω)). По теореме косинусов для △OCK: $OK^2 = OC^2 + CK^2 - 2 \cdot OC \cdot CK \cdot \cos\angle OCK$. OK = 5 (радиус Ω), CK = 1 (радиус ω). $\cos\angle OCK = \cos(90° + \angle\alpha) = \cos(90° - \angle\alpha) = \sin\alpha$. Тогда $25 = 25 - 7CB^2 + 1 + 2OC \cdot \sin\angle\alpha$, заметим, что в △OCM $OC \cdot \sin\alpha = OM$, так как это прямоугольный △ с углом α. Тогда $-7CB^2 + 1 + 2OM = 0$

$-7CB^2 + 1 + 2\sqrt{25 - 16CB^2} = 0$. $2\sqrt{25 - 16CB^2} = 7CB^2 - 1$, возведём обе части в квадрат

$4(25 - 16CB^2) = 49CB^4 - 14CB^2 + 1$

$49CB^4 + 50CB^2 - 99 = 0$ - квадратное уравнение относительно CB^2. $D = 50^2 + 99 \cdot 4 \cdot 49 = 2500 + 19404 = 21904 = 148^2$

Тогда $CB^2 = \frac{-50 + 148}{49 \cdot 2} = \frac{98}{98} = 1$, другой корень меньше нуля не подходит, тогда $CB^2 = 1$, $CB = 1$, так как $CB > 0$.

$AB = 8CB = 8$.

Ответ: AB = 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-4x$$

Ограничения: $2x^2-5x+3\geq 0$, так находится под корнем. Найдём недопустимые значения, решив $2x^2-5x+3=0$.
$D=25-4\cdot 2\cdot 3=1$. $x_1=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{5-1}{4}=1$, тогда, $x\notin(1;\frac{3}{2})$. Аналогично $2x^2+2x+1\geq 0$. $D=4-2\cdot 4\cdot 1=-4$, $D<0$, значит $2x^2+2x+1$ всегда >0.

Возведем обе части в квадрат:

$$(2x^2-5x+3)+(2x^2+2x+1)-2\sqrt{(2x^2-5x+3)\cdot(2x^2+2x+1)}=49x^2-28x+4.$$

$4x^2-3x+4-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=49x^2-28x+4$, перенесем свободные и возведем в квадрат:

$$\left(-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}\right)^2=(45x^2-25x)^2$$

$4(4x^4+4x^3+2x^2-10x^3-10x^2-5x+6x^2+6x+3)=45^2x^4-2\cdot 45\cdot 25x^3+25^2x^2$

$2009x^4-2226x^3$

Пусть $2x^2-5x+3=a$, $4x-2=b$, тогда исходное неравенство переписывается в виде

$\sqrt{a}-\sqrt{a+b}=-b$, возведем обе части в квадрат.

$a+a+b-2\sqrt{a^2+ab}=b^2$, $2a+b-b^2=2\sqrt{a^2+ab}$;

$4a^2+b^2+b^4+4ab-4ab^2-2b^3=4a^2+4ab$. $b^2+b^4-4ab^2-2b^3=0$

$a=\frac{b^2+b^4-2b^3}{4b^2}=\frac{1+b^2-2b}{4}=\frac{(b-1)^2}{4}$, подставим исходные значения:

$2x^2-5x+3=\frac{(4x-3)^2}{4}$ $8x^2-20x+12=49x^2-42x+9$

$41x^2-22x-3=0$.

$D=22^2+3\cdot 4\cdot 41=484+492=976=(4\sqrt{61})^2$

$x_1=\frac{22+4\sqrt{61}}{82}=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}<1$, $x_2=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}<1$, обе корня удовлетворяют ограничениям

Ответ: $x=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$, $x=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5.

Заметим, что ~~фигура параллелограмм образуется пересечением~~ прямых $y=24$ (там точки P и Q), $y=-2x$ (P и O), $y=-2x+30$ (R и Q), $y=0$ (R и O). Тогда если точка лежит внутри параллелограмма, то про неё верно, что если x и y её координаты, то $y \geq 0$, $y \geq -2x$, $y \leq -2x+30$, $y+2x \geq 0$, но $y-2x \leq 30$. ~~Заметим, что если точка лежит внутри параллелограмма и у неё целые координаты, то она лежит на прямой параллельной~~

Заметим, что через любую точку, лежащую внутри данного параллелограмма, можно провести прямую, параллельную сторонам этого параллелограмма. Тогда для примера можно считать, что можно провести внутри параллелограмма ещё 29 прямых вида $y=-2x+a$, где $a \in [1;29]$ и a - целое, на которых будут ~~лежать целые точки.~~ ~~Посчитаем, за~~ Если ~~попадется за точки прямых~~, которые ~~идут~~ ~~через~~ одна параллельна или с одной из ~~параллелограмма~~ параллелограмма или на его границах. Поскольку $y \in [0;30] \cap [0;24]$, то заметим, что ~~на~~ внутри или на границах параллелограмма будет $\frac{24}{2}+1=13$ целых точек. ~~Заметим, что не было посчитано 2 точек, если прямая лежит в одной~~ Заметим, что при этом не были посчитаны точки с ~~координ~~ лежать эти целые точки в нутри или на границах параллелограмма.

Заметим, что у 16 этих прямых есть по две целые точки на границах параллелограмма, поскольку $0 \leq y \leq 24$, то на них будет $\frac{24}{2}+1=13$ целых точек, а на оставшихся 15 прямых будет 12 целых точек. Если точка лежит на прямой $2x+y=a$, то ~~нужно~~ ~~от~~ внутри посчитать все точки лежащие на прямой $2x+y=a \pm 12$, если такая лежит внутри параллелограмма. ~~Такая прямая~~ Так как $a \pm 12$ обязательно целое, поэтому на этих прямых будет лежать ~~столько же~~ или больше (если a - чётное, то 13, если a - нечётное то 12.

Тогда заметим, что если точка лежит на прямой $y+2x=a$ и $a \in [2;18]$, то ей ~~сама~~ можно сопоставить две прямые, чтобы их разность координат равнялась 12, если $a \in [0;12]$ или $[18;30]$, то одна из них обязательно подойдет прямая, коэффициент y которой $a \in [12;18]$, тогда остается лишь посчитать ~~так~~ или 30 ~~целых и не целых прямых~~ прямых с целыми и нечетными координатами a.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5 (продолжение)

от 12 до 18 и четных числа и трех нечетных. Тогда для каждых 13 точек с 4 прямых с нечетными коэффициентами будет по 2 прямых, ~~для которых~~ с которыми можно взять по 13 точек, чтобы получилась пара, удовлетворяющая условию (так как прямой вида $2x+y=a$, то если ~~разность~~ $2x_1+y_1=a_1$ и $2x_2+y_2=a_2$, разность $2x_1+y_1-2x_2-y_2=a_1-a_2$), тогда будет

$9\cdot 13\cdot 2\cdot 13=169\cdot 8$ пар, и для прямых с нечетными коэффициентами аналогично будет $9\cdot 2\cdot 12^2=144\cdot 8$ пар.

Тогда всего $169\cdot 8+144\cdot 8=8(169+144)=8\cdot 313=$

$=2504$

Ответ: 2504 пары.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6 Выразим y.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases}$$

$y = 10b + ax$

$\cancel{((x+8)^2 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 1)(x^2 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 4) \le 0}$

$\cancel{x^2 + 16x + 64 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 1}$

$(x^2 + y^2 + 63 + 16x)(x^2 + y^2 - 4) \le 0.$

~~Где эти знаки отличаются на 63 + 16x. Если $x^2 + y^2 - 4 > 0$ то при 63 + 16x при положительных значениях x и $x^2 + y^2 + 63 + 16x$ будет больше нуля, если $x^2 + y^2 - 4 < 0$~~

$(x^2 + 63 + 16x + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx)(x^2 - 4 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx) \le 0.$

Произведение, если оба выражения больше нуля, а другое меньше нуля. При всех значениях a и b одно выражение больше нуля. Значит не все значения подходят

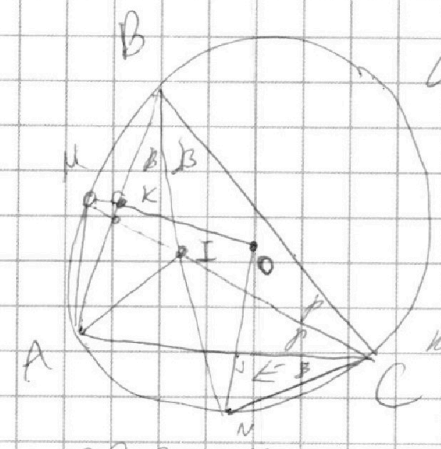
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4



M и N - середины дуг AB и AC, значит BN и CM - биссектрисы, тогда пусть их пересечение - I. Также заметим, что биссектриса △ пересекает с серединным перпендикуляром к хорде, которая стягивает дугу, вдвое меньшую этой биссектрисы, пополам на описанной окружности. Тогда ~~эти~~ OM и ON - серединные перпендикуляры к AB и AC, где O - центр описанной окружности △ABC. Пусть K и E - середины AB и AC, тогда по условию MK = 4,5, EN = 2. Пусть ∠B = 2∠β, а ∠C = 2∠γ. Тогда в △NEC NE = CN·sin∠β. 2 = CN·sin∠β. По теореме синусов $\frac{NC}{\sin\angle\beta} = 2R$, где R - радиус ~~ор~~ описанной окружности △ABC. Так как $\frac{AM}{\sin\angle\gamma}$ (AM биссектриса) = 2R. Тогда $\frac{NC}{\sin\angle\beta} = \frac{AM}{\sin\angle\gamma}$,

$NC = \frac{2}{\sin\angle\beta}$, $AM = \frac{4,5}{\sin\angle\gamma}$ так как △AKM прямоугольный с углом γ. Тогда $\frac{2}{\sin^2\angle\beta} = \frac{4,5}{\sin^2\angle\gamma} = \frac{\sin^2\angle\gamma}{\sin^2\angle\beta} = \frac{4,5}{2} = 2,25$; ∠γ и ∠β < 90°, так как это углы △ различных треугольников, тогда sin∠γ > 0, sin∠β > 0. $\frac{\sin\angle\gamma}{\sin\angle\beta} = 1,5$. sin∠γ = 1,5 sin∠β. $CN = \frac{2}{\sin\angle\beta}$,

$AM = \frac{4,5}{\sin\angle\gamma} = \frac{3}{\sin\angle\beta}$, тогда $\frac{AM}{CN} = \frac{3}{2}$, AM = 1,5 CN.

По лемме о трезубце IN = AN = CN, AM = MI = MB. △MIB - равнобедренный, ~~тогда~~ также ∠BNA = ∠BAC, опираясь на одну дугу. Тогда, по теореме косинусов для △NIA. $AI^2 = NI^2 + AN^2 - 2AN\cdot NI\cdot \cos\angle\gamma$

$AN = NI = CN$, $\cos 2\angle\gamma = 2\cos^2\angle\gamma - 1 = 1 - 2\sin^2\gamma$. $NC = \frac{2}{\sin\angle\beta}$

$AI^2 = 2CN^2 + 2CN^2 = 4CN^2$ ~~$\cdot \sin^2\gamma = \frac{8}{\sin^2\angle\beta} - \frac{8}{\sin^2\angle\beta} \cdot \frac{16}{\sin^2\angle\beta} \cdot 1,5\sin^2\angle\beta$~~

~~$= \frac{16}{\sin^2\angle\beta}(1 - 1,5\sin^2\angle\beta)$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7

$1 - 2\sin^2\beta$

$AI^2 = 2CN^2 - 2CN^2(\cancel{2\sin^2\beta - 1}) = \cancel{4CN^2} + 4CN^2 \cdot \sin^2\beta =$

$CN = \frac{2}{\sin\angle\beta}$ $\quad \sin^2\beta = 2{,}25\sin^2\beta$

$= \cancel{\frac{16}{\sin^2\beta}}\ 4 \cdot \frac{4}{\sin^2\beta} \cdot 2{,}25 \cdot \sin^2\beta = \cancel{\frac{16}{\sin^2\beta}}\ 36.$

Попробуем найти $\sin\alpha$. ~~Заметим, что из теоремы синусов $\sin\beta = \frac{2}{3}\sin\alpha$, тогда~~
$\cos^2\gamma = 1 - \cancel{\sin^2\alpha}\ 2{,}25\sin^2\beta$, $\cos^2\gamma = 1 - 0{,}5\sin^2\beta$.

$AI^2 = 36, \quad AI = 6.$

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6

$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases}$ $ax = y - 10b$ $x = \frac{y-10b}{a}$

Вторая неравенство верно при

$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 = w$ или $x^2 + y^2 < 4$, $(x+8)^2 + y^2 \ge 1$ и $x^2 + y^2 \ge 4$ и $(x+8)^2 + y^2 < 1$

$x^2 + y^2 + 64 + 16x$ $x^2 + y^2 + 16x < -63$

Пусть $(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$, тогда подставим $x = \frac{y-10b}{a}$,

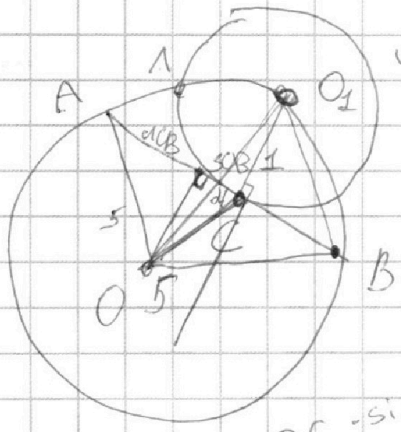
$\frac{(y-10b)^2}{a^2} + \frac{16y - 160b}{a} + 64 + y^2 - 1 = 0$

Черновик

~~AB = 5~~ ?

Тогда AB = 310 ~~4~~

AC = CB = 75



$\frac{AC}{CB} = 4$

AC = 4CB

AB = 8CB

$\sqrt{25 - 16CB^2}$

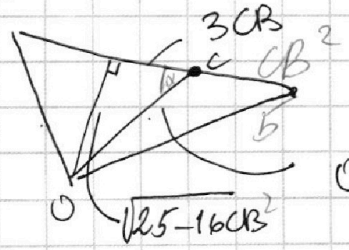
$OC^2 = 25 - 4CB^2$

$OC \cdot \sin\alpha = \sqrt{25 - 16CB^2}$

148
148
1184
592
148
21904

160000

4 MB
4 48
584
1492
1492
20064



В $\triangle O_1OC$

$OC^2 = 25 - 16CB^2 + 9CB^2 =$
$= 25 - 7CB^2$

$OC \cdot \cos\alpha = 3CB$

$25 = 1 + OC^2 - 2OC \cos(\alpha + 90^\circ)$ $90^\circ + \alpha$

$1 + OC^2 + 2OC \sin\alpha$

$OC^2 + CB^2 + 2OC \cdot CB \cos\alpha = 5 =$

$25 - 4CB^2 + CB^2 + 6CB^2 = 5$

$25 = 1 + 25 - 4CB^2 + 2\sqrt{25 - 16CB^2}$

$25 - 12CB^2 = 5$

$1 - 4CB^2 + 2\sqrt{25 - 16CB^2} = 0$

$CB^2 = \frac{20}{12}$

$\boxed{CB = \frac{5}{3}}$

$AB = 8$

$500 - 64CB^2 = 49CB^4 - 14CB^2 + 1$

$49CB^4 + 50CB^2 - 99 = 0$

$CB^2 = a$ $2500 + 99 \cdot 4 \cdot 49$

99
49
891
396
4851

19404
2500
21904

21904 | 41
16
59
41

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

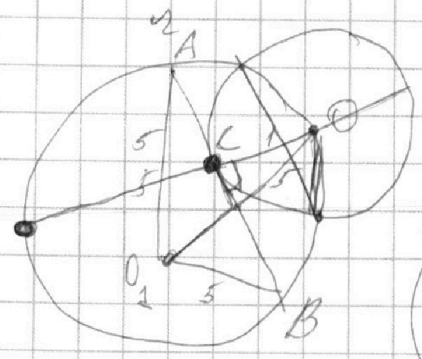
Черновик

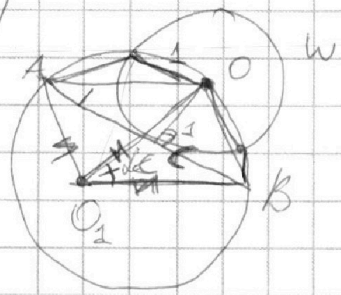
$AC = 4CB$

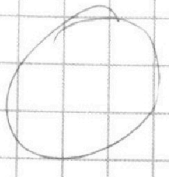
$AC \cdot CB = 4CB^2$

OC.

$\frac{AC}{CB} = 4$ $AC = 4CB$







$y \geq 0$

$y \leq 15$

Точка $y \geq -2x$

$y \leq -2x + 15$

$2x + y \leq 15$

$\frac{OB}{\sin 2\alpha} = 10$

$\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = 10$

$\frac{OB}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\sin(90^\circ - \alpha)}$

$\cos\alpha$

$\frac{OB}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{5}{\cos\alpha}$

$2\sin\alpha\cos\alpha = OB$.

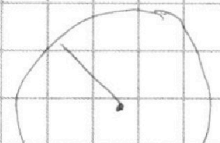
$-12 \quad -12$

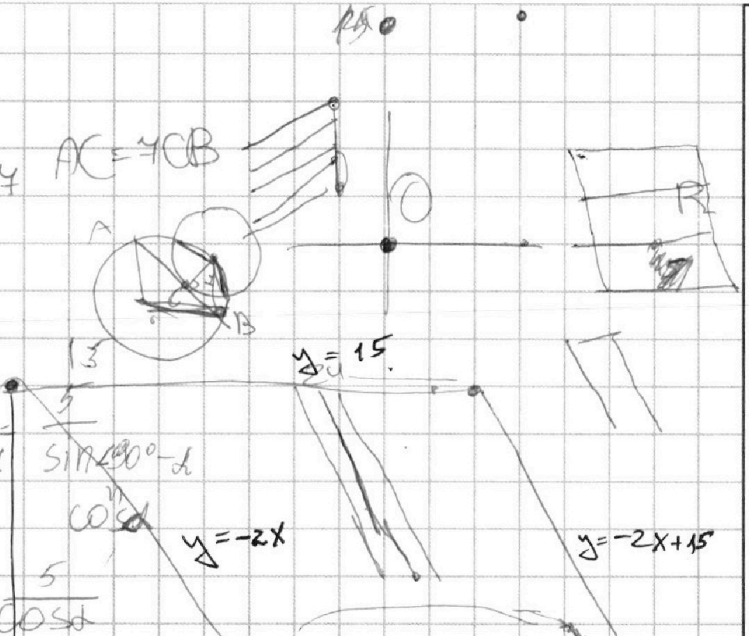
$24 \cdot 24$
96
48
576
$+ 144$
720

$12^2 + 24^2 = 720$

$y = kx + b$. $b = 0$.

$-12 \cdot 2$





$14 + 1 = 13$

$225 \cdot 16$
1350
225
3600

$2\sin^2\alpha - 1$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$

$\sin^2\alpha(1 - 2\cos^2\alpha) = \cos^2\alpha$

$\sin^2\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$

$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) =$

$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$a^2+2ab+b^2 \vdots m^2$

$8ab \vdots m$

$a+b \vdots m$

$a+b=mk$ $\quad 8ab=mn$

$a=mk-b$ $\quad 8mk-8b^2=mn$

$8b^2 \vdots m$ $\quad \boxed{8a^2 \vdots m}$

$8ab \vdots m$, а ab взаимнопросты

$8b(a-b) \vdots m$

Если $b \vdots m$, то $a \not\vdots m$, тогда $8 \vdots m$.

Если $a \vdots$ делится m, а b не делится $\leftarrow$ a и b взаимнопросты, с m. Тогда $m \le 8$. Пример $3 \cdot 5$? $\quad 90$

$9+25-6\cdot 16=$

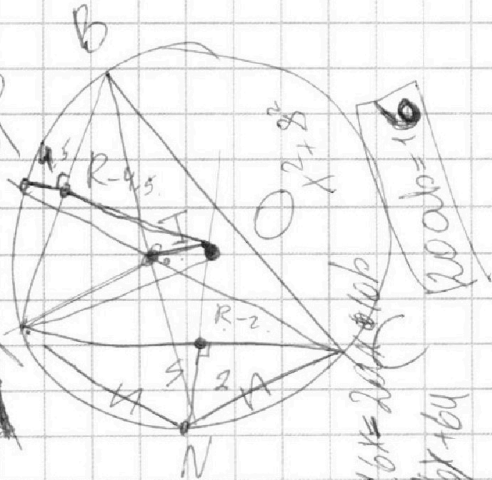
$34-90=56 \vdots 6$.

$4,5=2$

$\boxed{\sin\angle\beta = 1,5\sin\angle\beta}$

$\sin\angle\beta =$

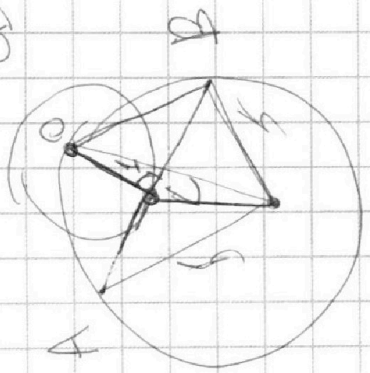
Длина a?



$\boxed{200\sqrt{6}=1}$

$AC=4$

$AB=4$



$S=0x+10$

$x^2+16x+64$

$-16x=2x\cdot 8$

x^2+8x

x^2+x-1

x^2+x-1

$x^2+0^2x^2$

$x^2-16x+63+0^2x^2=0$

$x^2-16x+63=0$

$x^2+x-1=0$

$(x^2+8)(x^2+x-1)=0$

$x^2+x-1=0$

$x^2+x-1=0$

$x^2+x-1<0$

$2+a^2-1<0$

$S=0x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

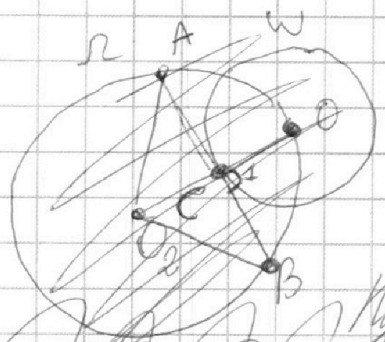
МФТИ

~~Задача 3~~ Черновик

Дано: ω, Ω - окружности, центры ω лежат на Ω. AB принадлежит Ω и касается ω в точке C. $\frac{AC}{CB} = 4$

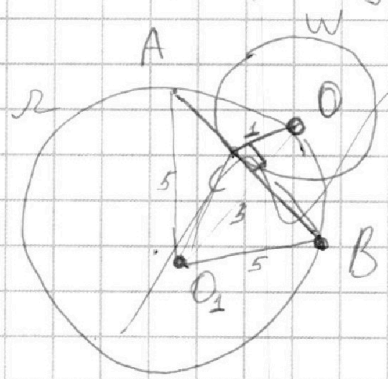
Радиусы ω и Ω 1 и 5.

AB - ?



~~Пусть O_1 - центр Ω, O_2 - центр ω. OC и O_2O - радиусы, значит касательной, которой~~

O_1 и O - центры Ω и ω соответственно. $OC \perp AB$, так как AB касается ω. $AO_1 = O_1B = O_1O$ (радиусы) = 5. $OC = 1$ (радиус ω).



$\sin^2\beta + \frac{1}{4} \cdot 1,5 = 3 \mid \infty$

$\sin^2\beta = 1,5 \cdot 4 = 6$

$\sin^2\beta = 6$

$\sin\beta =$

$\sin\beta = 1,5 \cdot 4 \cdot \sin^2\beta$

$\frac{S}{2}$

$30°$

Для любого ...

Задача 8

$y = 0x + 4a^2b$

$x^2 + a^2x^2 + 1$

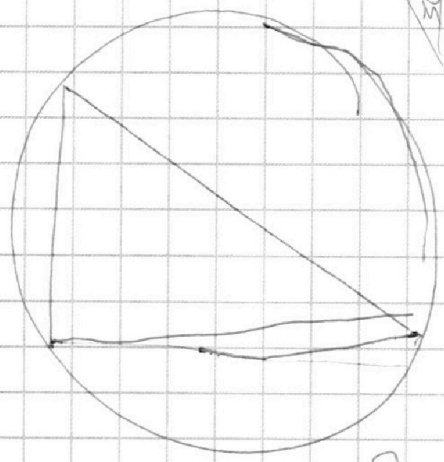
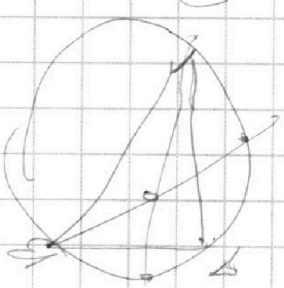
$10x$ ax BC

$MB = MD = 0,5B$

$AM = AB$

$100z + 1x + 8z =$

$(100z + 1^2 - 4)$

$a = 0$ $y = 10a$

$x, 0, 10$