



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть $ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$, $bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$, $ac = n \cdot 2^{10} \cdot 7^{37}$,
где $k, m, n \in \mathbb{N}$, тогда $ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = k \cdot m \cdot n \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$
Тем меньше $k \cdot m \cdot n$, тем меньше произведение
 $(abc)^2$, т.е. тем меньше abc .

И.к. в левой части равенства стоит квадрат
натурального числа, то в правой части все
степени простых чисел должны быть четны,
а т.к. 51 -е число, то ~~натуральное число~~

~~и оно делится на 2 и 7 , а значит в произ-~~
ведении $k \cdot m \cdot n$ входит хотя бы одна двойка
~~и оно делится на 2 и 7 , а значит в произ-~~

Пусть α, β, γ - степени вхождения 2 в
числа a, b, c соответственно, а x, y, z - сте-
пени вхождения 7 в числа ~~или~~ k, m, n соот-
ветственно, тогда

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 10 + x \\ \beta + \gamma = 17 + y \\ \alpha + \gamma = 37 + z \end{cases}$$

$x + y + z$ должно быть четно
и минимально



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 27 + x + y$$

(продолж. №1)

$$\alpha + \gamma = 37 + z$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma \geq \alpha + \gamma, \text{ т.к. } \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y \geq 10 + z \Rightarrow \text{минимальная сумма}$$

$$x + y + z = 10 \quad (\beta = 0, z = 0) \quad (x + y + z \geq 10 + 2z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{минимальное произведение } abc =$$

$$= \sqrt{2^{52} \cdot 7^{74}} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Пример:

$$a = 2^9 \cdot 7^{20} \quad b = 2^6 \quad c = 2^{11} \cdot 7^{17}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{20} : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

Чтобы дробь можно было сократить на m , $a+b$ должно быть кратно m и $(a+b)^2-8ab$ должно быть кратно m .

$$\begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2-8ab : m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b : m \\ 8ab : m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b : m \\ 8ab : m \end{cases}$$

И.к. $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь,
у a и b нет общих делителей $\Rightarrow$ если $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$,
 a, b $b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_m^{\beta_m}$, то
(p_i, q_j где $i \in [1, n]$ и $j \in [1, m]$ - простые)
 $a+b \nmid p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m$
 $\Rightarrow m \nmid p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m$
 $\Rightarrow ab \nmid m$, а т.к. $8ab : m$, то
максимальное m , подходящее под условие равно 8

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x) + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - (2 - 7x)$$

$$2x^2 + 2x + 1 = \cancel{2x^2 - 5x + 3} - \cancel{(2 - 7x)} = 2x^2 + 2x + 1 + (2 - 7x) + (2 - 7x)^2 - 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x)(3 - 7x)$$

$$\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 8x^2 - 20x + 12 = 49x^2 + 9 - 42x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 41x^2 - 22x - 3 = 0 \end{cases} \leftarrow D = 22^2 + 12 \cdot 41 = 976 = 4 \cdot 61 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \leftarrow D < 0, \text{ параболa ветвями вверх} \Rightarrow \text{всегда} > 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-3) \geq 0 \text{ или } \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \\ \text{1} \quad \quad \quad 1,5 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1,5 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{все 3 полученных корня подходят}$$

по ОДЗ

Ответ: $\left\{ \frac{2}{7}, \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

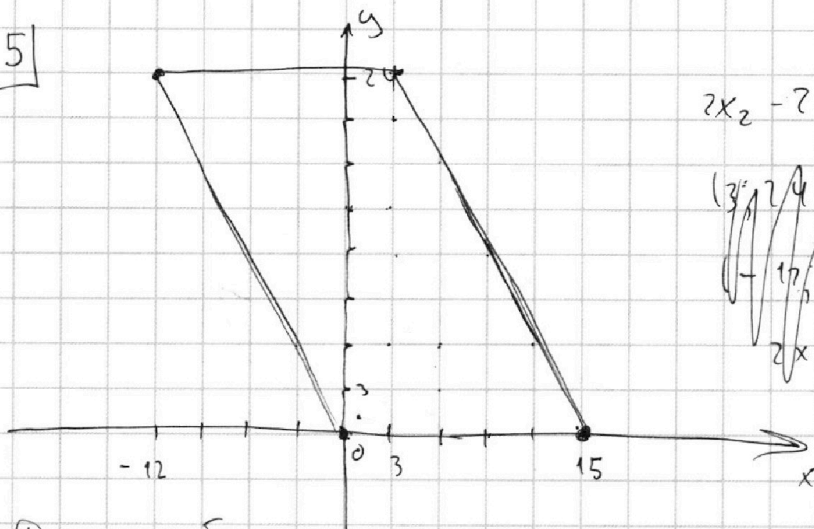
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 24 \\ -12 & 24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 3 & 24 \end{pmatrix}$$

$$2x_2 - 2x_1 = 12$$

$$x_2 - x_1 = 6$$

Для любых точек с ~~целыми~~ разностью по y
($y_1 - y_2 = 1, 2$) можно подобрать

Разность координат точек по оси y должна
быть четной, иначе $2x_2 - 2x_1 = \text{неч. числу} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 - x_1$ не целое, что противоречит

условию

Пусть $y_1 \geq y_2$:

$y_1 - y_2 = 0$: подходят любые точки с разностью
6 по оси x ; таких пар точек 10 для каждого
то $y_2 \Rightarrow$ всего $25 \cdot 10 = 250$

$y_1 - y_2 = 2$: $\Delta x = 5 \Rightarrow$ всего $23 \cdot 11 = 253$

$y_1 - y_2 = 4$: $\Delta x = 4 \Rightarrow$ всего $21 \cdot 12 = 252$

$y_1 - y_2 = 6$: $\Delta x = 3 \Rightarrow$ всего $19 \cdot 13 = 247$

$y_1 - y_2 = 8$: $\Delta x = 2 \Rightarrow$ всего $17 \cdot 14 = 238$

$y_1 - y_2 = 10$: $\Delta x = 1 \Rightarrow$ всего $15 \cdot 15 = 225$

$y_1 - y_2 = 12$: $\Delta x = 0 \Rightarrow$ всего $13 \cdot 16 = 208$

Итого: $250 + 253 + 252 + 247 + 238 + 225 + 208 = 1673$

Ответ: 1673

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

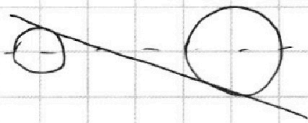
6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4)



(продолж. л. 6)

Аналогично п. 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{16}{3}a = 10b \\ \sqrt{\frac{55}{8}} = a(-8 + \frac{3}{8}) + 10b \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{16}{3}a = 10b$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{55}{8}} = -\frac{55}{24}a \Rightarrow a = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}; -\frac{1}{\sqrt{63}}; \frac{1}{\sqrt{63}}; \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$$

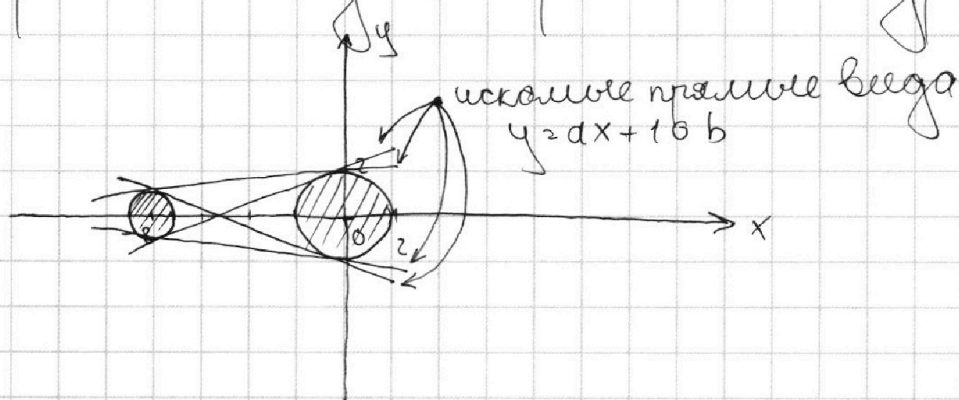
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6) \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

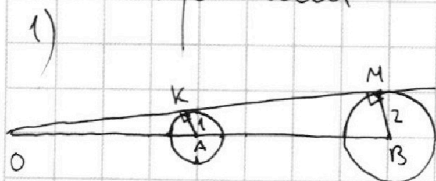
Рассмотрим нижнее неравенство:

каждая из скобок представляет собой уравнение окр.-ти, ~~и~~ меньше нуля, если точка с коорд. $x; y$ лежит вне окр.-ти, равна нулю - если на окр.-ти, больше нуля, если вне окр.-ти $\Rightarrow$ их произведение ≤ 0 , если точка $x; y$ лежит внутри или на одной окр.-ти и вне другой



Верхнее ур.-ние системы представляет собой ур.-ние прямой $y = ax + b \Rightarrow$

$\Rightarrow$ система имеет ровно два реш., если прямая, описанная верхним ур.-нием является общей касательной к двум окр.-там



$$\Delta OKA \sim \Delta OMB \text{ по 2-ум углам с коор. } 1:2 \Rightarrow OA = \frac{OB}{2} = \frac{OA + AB}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OA = AB = 8 \Rightarrow \text{прямая проходит через точку } (-16; 0) \Rightarrow 16a = 10b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

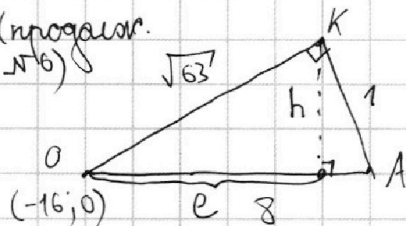
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(продолж.
№6)



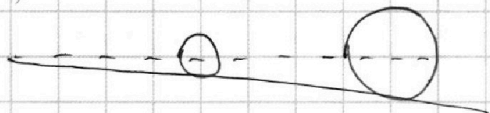
$$h \cdot 8 = \sqrt{63} \cdot 1 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$e = \sqrt{63 - \frac{63}{64}} = \sqrt{\frac{63 \cdot 64 - 63}{64}} =$$

$$\frac{\sqrt{63(64-1)}}{8} = \frac{63}{8}$$

$$\begin{cases} 16a = 10b \\ \frac{\sqrt{63}}{8} = a(-16 + \frac{63}{8}) + 10b \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{63}{8}a \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

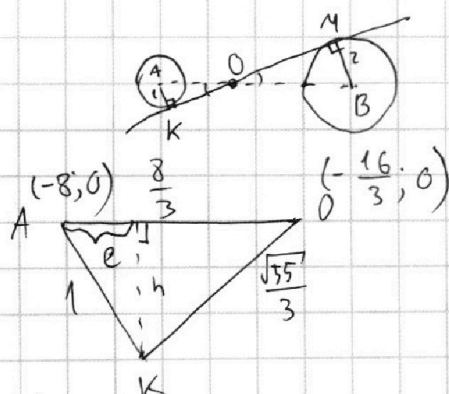
2)



аналогично п.1

$$\begin{cases} 16a = 10b \\ -\frac{\sqrt{63}}{8} = a(-16 + \frac{63}{8}) + 10b \end{cases} \Rightarrow -\frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{63}{8}a \Rightarrow a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$$

3)



$\triangle OKA \sim \triangle OMB$ по 2-ум углам

$$\Rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{2}{1}, OB + OA = 8 \Rightarrow OA = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow OK = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$h \cdot \frac{8}{3} = \frac{\sqrt{55}}{3} \cdot 1 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{55}{64}} = \frac{3}{8}$$

т.к. прямая проходит
через т. К

$$\begin{cases} 16a = 10b \\ -\frac{\sqrt{55}}{8} = a(-8 + \frac{3}{8}) + 10b \end{cases} \Rightarrow -\frac{\sqrt{55}}{8} = -\frac{61}{8}a + \frac{16}{3}a \Rightarrow -\frac{\sqrt{55}}{8} = -\frac{55}{24}a \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



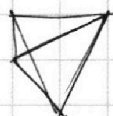
1. $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$ $bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$ $ac: 2^{30} \cdot 7^{37}$

$$\frac{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{m \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}} = \frac{a}{c} = \frac{k}{m \cdot 2^3 \cdot 7^7}$$

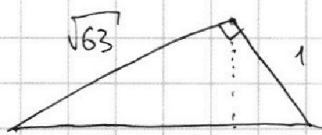
$$\frac{a}{b} = \frac{n \cdot 2^{30} \cdot 7^{37}}{m \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}} = \frac{n \cdot 2^{13} \cdot 7^{20}}{m}$$

$$h \cdot 8 = \sqrt{63} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{n \cdot 2^{30} \cdot 7^{37}} = \frac{k}{n \cdot 2^{16} \cdot 7^{27}}$$



0	6
1	7
2	8
3	9
4	10
5	11
6	12
7	13
8	14
9	15
0	5
1	14
2	13
3	12
4	11
5	10
6	9
7	8
8	7
9	6



2. $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$

$a+b: m$ $8ab: m$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 12 \\ \hline 42 \\ 21 \\ \hline 2842 \end{array}$$

$$-\frac{61}{8} + \frac{16}{3} = a, b \text{ взаимн. прост.}$$

$$\frac{128}{24} - \frac{183}{24} = \frac{55}{24} \quad a+b: a, a+b: b$$

$m \max = 8$

4. $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+(2-7x)} = 2-7x$$

$$\begin{array}{r} 250 \overline{) 253} \\ 503 \overline{) 252} \\ 755 \overline{) 247} \\ 1002 \overline{) 238} \\ 1240 \overline{) 225} \\ 1465 \overline{) 225} \\ 1643 \overline{) 208} \end{array}$$

$$(x-1)(2x+3) = 2x^2 -$$

$$(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = 4x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 4x^3 - 10x^2 + 6x + 2x^2 - 5x + 3 = 4x^4 - 6x^3 - 4x^2 + x + 3$$

$$2-7x + \dots = (2-7x)^2$$

$$4x^4 + 6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (2-7x-1)^2(2-7x)^2$$

$$2-7x - 2\sqrt{a(a+2-7x)} = (2-7x)^2$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 14 \\ \hline 68 \\ \times 19 \\ 13 \\ \hline 238 \\ \times 16 \\ 13 \\ \hline 48 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

[illegible]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$((x+8)^2 + y^2 - 1) / (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

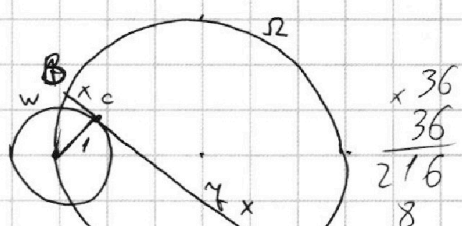
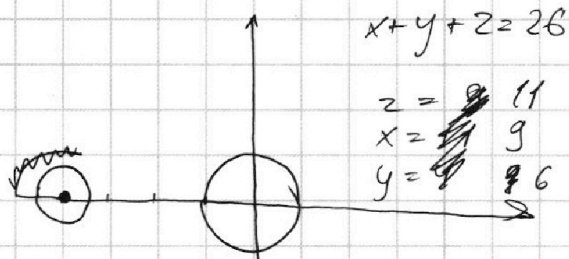
$$\begin{cases} x+y=15 \\ y+z=17 \\ x+z=20 \end{cases}$$

$ab = 2 \cdot 15 \cdot 7 \cdot 10$

bc = 17 2 17

QC2220737

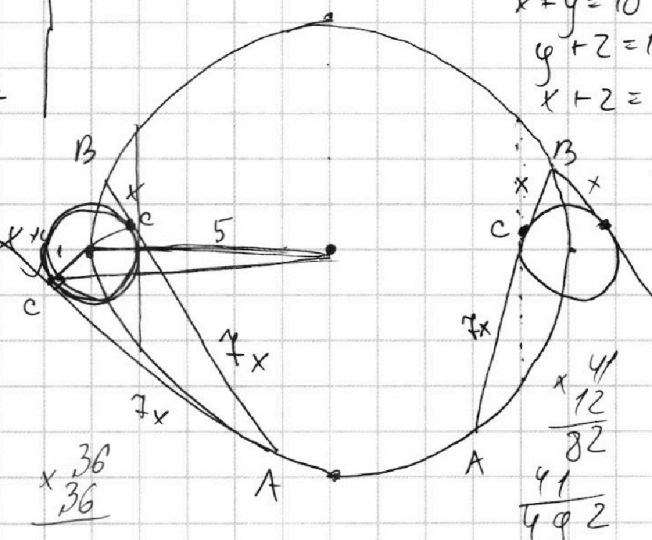
$$x^2 + y^2 + 63 + 16x = x^2 + y^2 - 4 + 16x + 67$$



$$2(x+y+z) = 64 + x + y + z$$

$\alpha + 2\beta + \gamma = 2\pi$

$$2\beta = x + y - 2 - 10$$



$$2x^2 + 2x + 1 + (2 - 4x) +$$

$$+ (2 - 4x)^2 =$$

$$= 2x^2 - 2x + 1 +$$

$$+ 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2-x)}$$

$$(2-7x)(2-7x) =$$

$$= 2 \sqrt{(x-1)(2x-3)(2-7x)}$$

$$1) x = \frac{2}{4}$$

$$(1-4x) = 2\sqrt{(x-1)(2x-3)}$$

50-42

$$\rightarrow 49x^2 - 14x + 1 = 4(x-1)(2x-3)$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 7x^2 - 20x + 12$$

$$x + y + z = 32$$

$$z = 22$$

$$x = 15$$

人 22

$$\begin{array}{r} 22 \\ \hline 44 \end{array}$$

44

484

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2k^2 \cdot 9x + 3z \cdot (2k^2)^2 \quad 976$$

$$2x + 2x + 1 + (2 - 4x)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$+ 2 - 4x$$

$$2 \cdot \sqrt{244}$$

$$4 \cdot \sqrt{61}$$

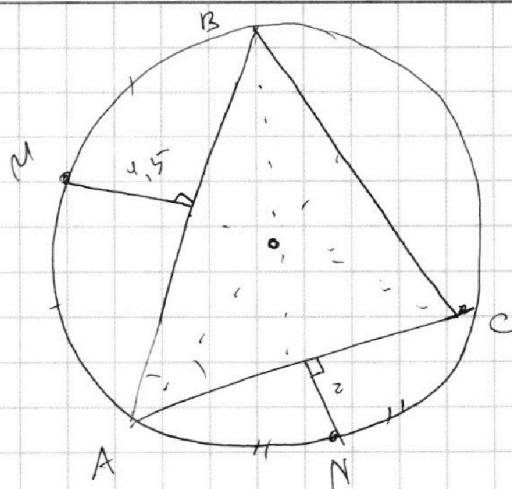
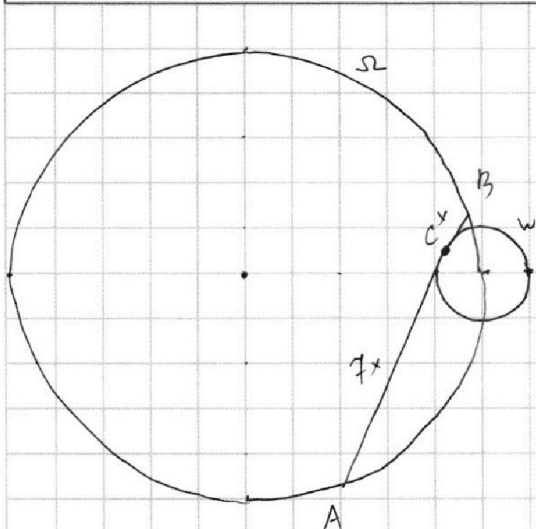
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

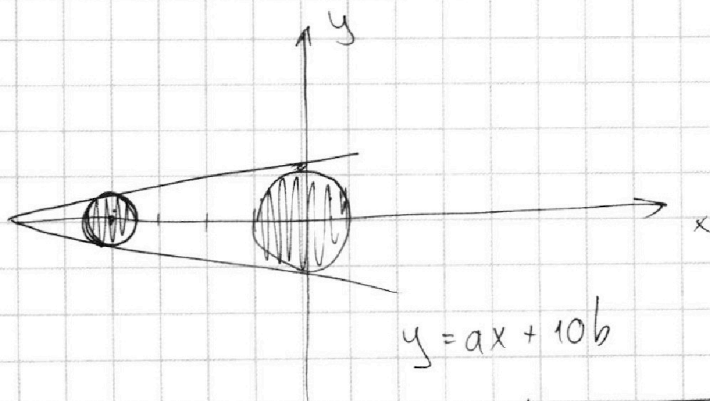
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



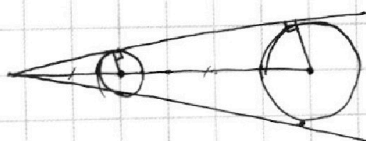
$$ax - y + 10b = 0$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$



$$\begin{cases} ax + 10b = \sqrt{4 - x^2} \\ ax + 10b = \sqrt{1 - (x+8)^2} \end{cases}$$

$$0 = -16a + 10b$$



$$1 \triangle 8 \sqrt{63}$$