



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^{a' \cdot a''} = 2^{9 \cdot 15}$$

$$b = 2^{b' \cdot b''} = 2^{6 \cdot 9}$$

$$c = 2^{c' \cdot c''} = 2^{11 \cdot 22}$$

Заметим, что эти a, b, c подходят ~~т.к.~~ и исходя
из ~~их произведение~~ ~~отсюда~~ ~~минималности~~ ~~минималности~~
из доказательства ~~отсюда~~ ~~минималности~~ ~~минималности~~ $\Rightarrow$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Теперь решим аналогичную задачу для степени 7

$[d'', b'', c'']$ - степени 7 в a, b, c соответственно.

$$\begin{cases} a'' + b'' = 10 + x, \\ b'' + c'' = 17 + y, \\ c'' + d'' = 37 + z, \end{cases}$$

$$x, y, z \in \mathbb{N}$$

заметьте, что по аналогии
(продолжим считать, такая задача
- стандартная) x, y, z

$$\begin{cases} a'' + b'' = 10 + x, \\ b'' + c'' = 17 + y, \\ b'' - d'' = -20 + y - z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b'' = -10 + x + y - z, \\ b'' + c'' = 17 + y, \\ b'' - d'' = -20 + y - z. \end{cases} \rightarrow$$

$$x + y - z \geq 10 \Rightarrow x + y \geq 10 \Rightarrow$$

покажем, что при $x=5, y=5$ и $z=0$, возможно.

$$\begin{cases} 2b'' = 0 \\ b'' + c'' = 17 + 5 \\ a'' + b'' = 15 \\ a'' + c'' = 37 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a'' = 15 \\ c'' = 22 \text{ (подходит по условиям)} \\ b'' = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 1

Заметим, что в минимальное d, b, c как разогреться
должны войти только 2 и 7,

(начала узнали в какой степени входит 2

$\exists d', b', c'$ степени входящие 2 в d, b, c . $\rightarrow$

$$\begin{cases} d' + b' = 14 + x \\ b' + c' = 17 + y \\ c' + d' = 20 + z \end{cases} \quad x, y, z \in \mathbb{N} \text{ - неизвестные.}$$

$2(d' + b' + c') = 51 + x + y + z$, заметим, что $x + y + z$

должно быть нечётно $\Rightarrow x + y + z \geq 1$,

докажем, что при $x + y + z = 1$, это возможно, $\exists x = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} d' + b' = 15 \\ b' + c' = 17 \\ c' + d' = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' + b' = 15 \\ d' - b' = 3 \\ c' + d' = 20 \\ b' + c' = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d' = 18 \\ d' - b' = 3 \\ c' + d' = 20 \\ b' + c' = 17 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d' = 9 \\ b' = 6 \\ c' = 11 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2.

Обозначим ~~(x, y)~~, $\text{НОД}(x, y)$, как $(x, y) \Rightarrow$

$(a, b) = 1$ и давайте найдем $\text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2)$

$$(a+b, a^2-6ab+b^2) = (a+b, (a+b)^2-8ab) =$$

$$(a+b, -8ab) = (a+b, -8ab+8a^2+8ab) =$$

$$(a+b, 8a^2) \text{ т.к. } (a, b) = 1, \Rightarrow$$

$$(a+b, 8a^2) = (a+b, 8) \Rightarrow \text{если } m \neq 8, \text{ докажем,}$$

что $m=8$ достигается

$$\left\{ \begin{array}{l} a=1 \text{ и } b=4 \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\frac{a+b}{1-42+49} = \frac{8}{8} \Rightarrow m=8 \Rightarrow$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



р 4

из условия

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x-3)(x-1) \geq 0 \\ x^2 + (x+1)^2 \geq 0 \end{cases} (=)$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [1.5; +\infty).$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$(2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1) = (2 - 4x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2 - 4x) = (2 - 4x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$0 = (2 - 4x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1)$$

$$\begin{cases} 2 - 4x = 0 \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{4} \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

](2) верно, тогда $\Rightarrow$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \leq 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 \leq 1 \Rightarrow$$

$$2x(x+1) \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 0]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Также из этого следует, что.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \leq 1 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 5x + 2 \leq 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}; 2 \Rightarrow$$

$$2(x - 0.5)(x - 2) \leq 0 \Rightarrow$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right] \Rightarrow$$

1 или 2 верно $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right] \\ x \in [-1; 0] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \emptyset \Rightarrow \text{невозможно} \Rightarrow$$

2 - никогда не верно $\Rightarrow$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

каждая прямая будет иметь ровно.

15 соответствий $\Rightarrow$

не ора

$\sum$ по всем степеням прямой от $A_i =$
 A_i

15 • сумму степеней $\sum$ степеней $\Rightarrow 15 \cdot 364 =$
5460

Ответ: ~~15~~ 364 5460

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



теперь очень легко для точки.

А найти прямую, которая

будет, содержать все нужные точки,

то прямая должна содержать точку

$$(x_1 + 6, y_1)$$

$$y_1 = 2x_1 + 6 + k$$

$$y_1 = 2x_1 + 12 + k$$

$$k = y_1 - 2x_1 - 12$$

→ все в.

$$y = 2(x_1 + 6) + k$$

$$y = 2x_1 + 12 + 2x_1 +$$

заметьте, что требуемая величина =

$$A \in \text{орб } R$$

$\sum_{\text{данных } k}$ степень прямой от k иной содержащей (x_1, y_1)

теперь заметим. отпроцурим все прямые от

1 до 30. теперь,

заметим, что на высоте $y_1 = 23$ $\sum_{k \in \text{орб } R, k \neq y_1}$ степень прямой от $(x_1 + 6, y_1) = \sum_{i=1}^{x_1+6} \text{степень прямой номер } (2i-1)$

заметим, что при увеличении высоты

тогда на нас имеют соответствующие.

прямые на отрезке с левой грани и правой грани, как у прямых, мы уменьшили на 1 ⇒



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

задача сирдеш

точку $A(x_1, y_1)$

и ~~II~~ ~~узел~~ введен зависимость

y_2 от x_2 .

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12. \Rightarrow$$

$$y_2 = 12 - 2x_2 + 2x_1 + y_1 \Rightarrow$$

~~то какая - то~~ $\Rightarrow$

для одной точки A все точки B ,
такие, что пара (A, B) - хорошая,
расположены на прямой с услови-
ем коэф. -2 . $\Rightarrow$ проведем все

подобные прямые, очевидно,

(теперь по прямой назовем кол-во

точек целочисленной x точек параллелограмма

который он ~~пересекает~~ пересекает,

очевидно что $\sum$ всех степеней = ~~сумма~~ ^{кол-во} точек

$$\text{в пар. пар} = 24 \cdot 15 + 4 = 364$$

МФТИ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

случай 2.

$$16a = \pm 3\sqrt{a^2 + 1}$$

$$256a^2 = 9(a^2 + 1)$$

$$256a^2 - 9a^2 = 9$$

$$247a^2 = 9$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{9}{247}}$$

$$\text{Ответ: } \pm \sqrt{\frac{9}{247}}; \pm \sqrt{\frac{1}{255}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1 - 63a^2 - 100b^2 + 160ab = 0$$

$$D = 256 - 400a^2 + 400(1 - 63a^2) = 400 - 256a^2$$

$$400 + a^2(6400 - 6300 \cdot 4) = 0$$

$$400 + a^2 \cdot 100(64 - 63 \cdot 4) =$$

$$400 + a^2 \cdot 100(-188) =$$

$$400 - 18800a^2$$

$$b_{1,2} = \frac{-80a \pm \sqrt{400 - 18800a^2}}{-200}$$

$$b_{1,2} = \frac{80a \pm \sqrt{100(4 - 188a^2)}}{200}$$

$$b_{1,2} = \frac{8a \pm \sqrt{4 - 188a^2}}{20}$$

также

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = ax + 10b \end{cases}$$

должна иметь 1 решение $\Rightarrow$

$$x^2 + (ax + 10b)^2 = 4 \quad - \text{должна иметь 1 решение} \Rightarrow$$

$$x^2 + (a^2x^2 + 20abx + 100b^2) = 4$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$D = 0 \quad \Rightarrow$$

$$D = 400a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(100b^2 - 4) = (400a^2b^2 - 4(100a^2b^2 - 4a^2 + 100b^2 - 4))$$

$$= 0$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 256 \\ \hline 1008 \\ 1584 \\ \hline 16128 \end{array}$$

$$D = 25600a^2 + 400(1 - 63a^2) =$$

$$400 + 25600a^2 - 63400a^2 =$$

$$400 - 400a^2(1) =$$

$$b_{1,2} = \frac{-160a \pm \sqrt{400 - 400a^2}}{-200}$$

$$b_{1,2} = \frac{160a \pm 20\sqrt{1 - a^2}}{200}$$

$$b_{1,2} = \frac{8a \pm \sqrt{1 - a^2}}{10}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow D = 10$$
$$900a^2b^2 - 4(100a^2b^2 - 4a^2 + 100b^2 - 4) = 0 \quad | :16$$

$$25a^2b^2 - (25a^2b^2 - a^2 + 25b^2 - 1) = 0.$$

$$a^2 - 25b^2 + 1 = 0.$$

$$25b^2 = a^2 + 1$$

$$b^2 = \frac{a^2 + 1}{25}$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{a^2 + 1}{25}} = \pm \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5}$$

$$\Rightarrow \text{8 вариант } 4a \pm \sqrt{1 - 44a} = \pm \sqrt{a^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\text{случай 1} \quad 4a + \sqrt{1 - 44a} = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$4a = \sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{1 - 44a}$$

$$16a^2 = a^2 + 1 + 1 - 44a - 2\sqrt{(a^2 + 1)(1 - 44a)}$$

$$15a^2 + 44a - 2 = 0 - 2\sqrt{(a^2 + 1)(1 - 44a)}$$

$$16a \pm 2\sqrt{a^2 + 1} = \pm \sqrt{a^2 + 1}$$

случай 1.

$$16a = \pm \sqrt{a^2 + 1}$$

$$256a^2 = a^2 + 1 \quad a^2 = \frac{1}{255} \quad a = \pm \sqrt{\frac{1}{255}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ \sqrt{(x+8)^2 + y^2 - 1} \cdot (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ \sqrt{(x+8)^2 + y^2 - 1} \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

заметьте, что $x^2 + y^2 = 2^2$ - уравнение окружности с центром $(0,0)$ и радиусом 2;

а $(x+8)^2 + y^2 = 1^2$ - уравнение окр. с цент. $(-8,0)$ и

радиусом 1, заметим, что они не пересекаются

$\Rightarrow$ система сводится к

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ ax - y + 10b = 0 \\ \sqrt{(x+8)^2 + y^2} \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 2^2 \end{cases}$$

заметьте, то, что если прямая $ax - y + 10b$ пересечёт (но касаться) хотя бы 1 окр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



140 (76, то решений будет много $\Rightarrow$
прямая $ax + 10b$ касается обеих окружностей $\Rightarrow$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + 10b \\ (x_1+8)^2 + y_1^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{исключаем} \begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases} - \text{имеет одно решение} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_2 = ax_2 + 10b \\ (x_2+8)^2 + y_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 16x + 64 + (ax + 10b)^2 = 1 \\ y = ax + 10b \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 = 1 -$$

имеет 1 решение $\Rightarrow$

$$(a^2 + 1)x^2 + x(16 + 20ab) + (63 + 100b^2) = 0 \Rightarrow$$

$$D = 0 \Rightarrow$$

$$(16 + 20ab)^2 - 4(a^2 + 1)(63 + 100b^2) = 0$$

$$(256 + 320ab + 400a^2b^2 - 4(63a^2 + 160b^2a^2 + 63 + 100b^2)) = 0$$

$$256 + 320ab + 400a^2b^2 - 252a^2 - 400b^2a^2 - 252 - 400b^2 = 0$$

$$64 + 180ab - 63a^2 - 63 - 100b^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 364 \\ \hline 15 \\ 1820 \\ 364 \\ \hline 5460 \end{array}$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = 2 - 4x (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2 - 4x) = (2 - 4x) (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2 - 4x = 0$$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 364 \\ \hline 15 \\ 1820 \\ 364 \\ \hline 5460 \end{array}$$

$$1 = -8a + 10b$$

$$-2 = 10b$$

$$1 = -8a - 2$$

$$= 1$$

$$\begin{aligned} -8a &= 3 \\ a &= -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$ax - y + 10b = 0$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 6$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \end{cases}$$

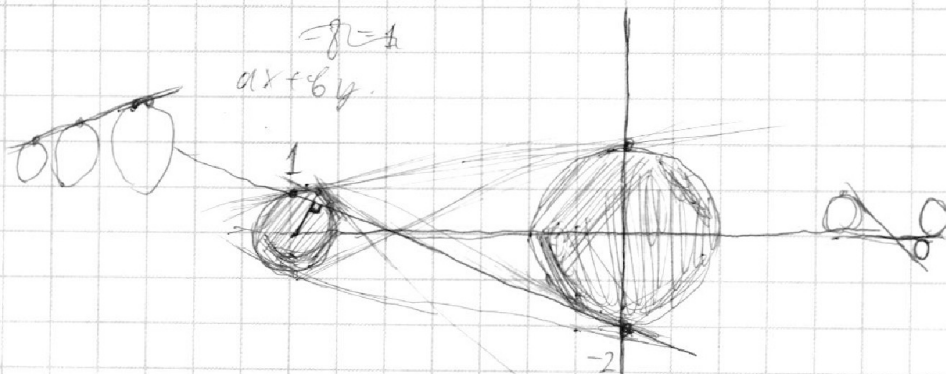
$$\begin{cases} ((x+8)^2 + y^2 - 1) \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1) \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

$$(x+8)^2 + y^2 \geq 1$$

$$\begin{aligned} -8a &= 3 \\ ax + 6y & \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.

исходя из уравнения:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x-3)(x-1) \geq 0 \\ x^2 + (x+1)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [1.5; +\infty)$$

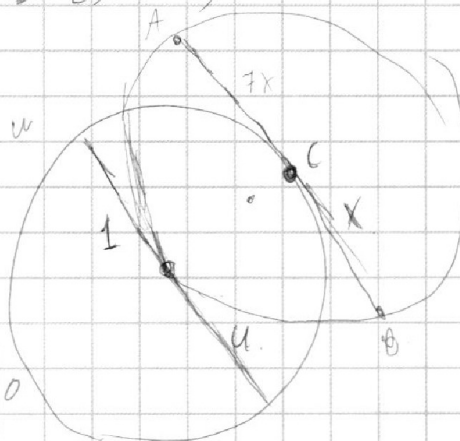
$$\begin{array}{r} 44 \dots 44 \\ 42 \\ \times 44 \\ \hline 328 \\ 188 \\ \hline 2209 \end{array} + 120$$

23 29.

$$(8+100a)^2 - (a^2+1)(63+100b^2)$$

$$64 + 160ab + 100a^2b^2 - (63a^2 + 100ab^2 + 63 + 100b^2)$$

$$1 + 160ab - 63a^2 - 100b^2 = 0.$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

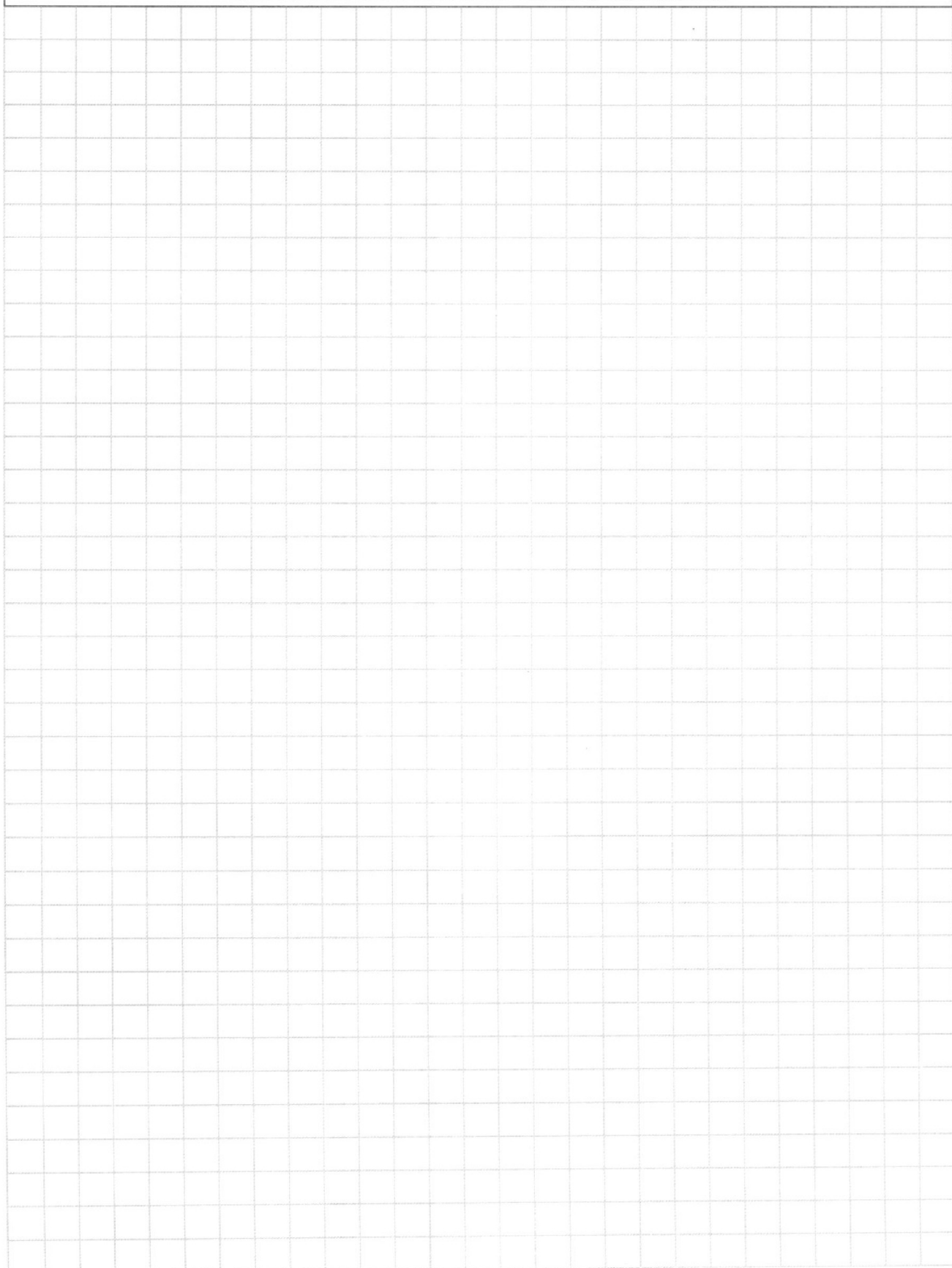
6

☐

7

☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☒

2
☒

3
☐

4
☐

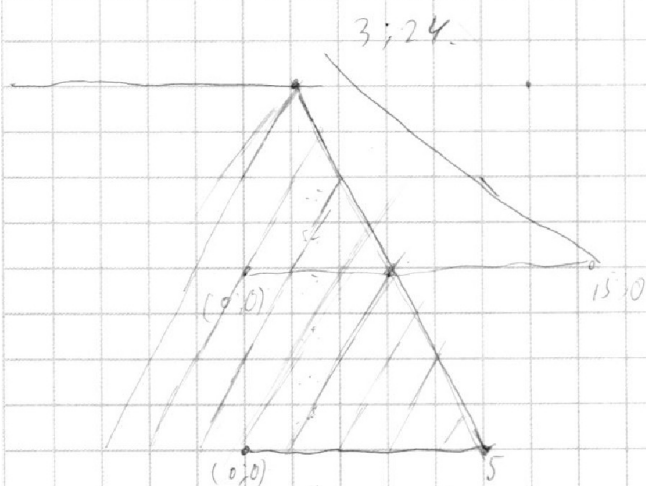
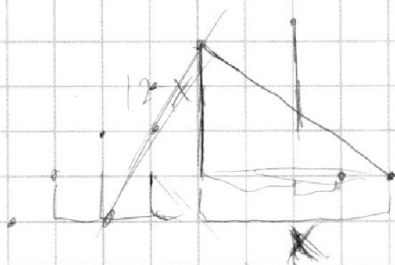
5
☐

6
☐

7
☐

 МФТИ

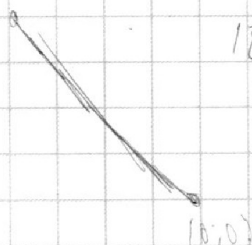
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3 = 2x$$

$$24 = 2x + b$$

$$18 = b$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~a+b =~~ *пр. 2.*

$$a+b = 14.5$$

$$b+c = 17.$$

$$c+a = 20.$$

$$b-a = -3$$

$$b = a - 3$$

$$a + a - 3 = 14$$

$$2a = 17 \quad a = 8.5$$

$$a+b = 15 \Rightarrow$$

$$b = 6$$

$$c+b = 17.$$

$$c = 11$$

$$c+a = 20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 6 \\ c = 11. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 10 \\ b+c = 17. \\ c+a = 37. \end{cases}$$

$$c-a = 7.$$

$$2c = 44$$

$$c = 22$$

$$a-b = 20.$$

$$2a = 30$$

$$a = 15.$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$p = 4 -$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4} = 1; 1.5$$

$$2(x-1)(x-1.5) =$$

$$(x-1)(2x-3)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



М1.

$a \cdot b = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$ введем k, x, f , такие что $k, x, f \in \mathbb{Z}$ и
 $\leftarrow$ ~~$a \cdot k, x, f \in \mathbb{Z}$~~ выполняются равенства слева

$$b \cdot c = x \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$c \cdot a = f \cdot 2^{20} \cdot 7^{32}$$

$$a^2 b^2 c^2 = k \cdot x \cdot f \cdot 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow$$

$$a b c = \sqrt{k x f} \cdot 2^{25} \cdot \sqrt{2} \cdot 7^{32}$$

$\Rightarrow \sqrt{k x f} = \sqrt{2} \cdot z$ т.к. $abc \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow z \in \mathbb{Z} \rightarrow$

$$a b c = \sqrt{2} \cdot z \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32} =$$

$$2^{26} \cdot 7^{32} \cdot z$$

т.к. задача в минимизации $abc \Rightarrow$

abc минимально при $z=1 \Rightarrow$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{32}$

$$(a+b, (a+b)^2 - 8ab) = (a+b, -8ab) =$$

~~$a+b = \max$~~ $(a+b, -8ab + 8a^2 + 8ab) =$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{1+49-42} = \frac{8}{8} (a+b, +8a^2)$$

$$(a+b, 8) \Rightarrow 8$$