МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1. 1) Возьмем ab, bc, ac - тки т.е. $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$, $bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$, $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

2) $ab \cdot bc = b^2 \cdot ac = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} = 2^{31} \cdot 7^{27}$

$ac \leq b^2 \cdot ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$, что невозможно т.к. $7^{27} < 7^{37}$

Значит $ab \cdot bc \leq 2^{31} \cdot 7^{37}$

3) $ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 2^{14+17+20} \cdot 7^{37 \cdot 2} = 2^{51} \cdot 7^{37 \cdot 2}$

51 - нечётное, что невозмож т. abc - натур.
значит степень 2-ки хотя бы 52 (в $(abc)^2$)

тогда $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример: $a = 7^{14} \cdot 2^{9}$
$b = 2^{6}$
$c = 7^{23} \cdot 2^{11}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

1) Если $\frac{a}{b}$ - несократима то a и b - взаимнопрост. числа

2) $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ можно сократить на m, значит
$(a+b) \vdots m$
$a^2-6ab+b^2 \vdots m$

$$\left.\begin{matrix} a^2-6ab+b^2 = (a+b)^2 - 8ab \vdots m \\ a+b \vdots m \end{matrix}\right\} 8ab \vdots m$$

$m = p_1^{\alpha} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$
если $a \vdots p_i$ то $(a+b) \vdots p_i$ значит $b \vdots p_i$
что противоречит условию
значит $ab \not\vdots m$ и не имеет с m общ. делителей
тогда $8 \vdots m$. максимально возмож $m = 8$

Пример: $a = 5$, $b = 3$ $\quad \frac{5+3}{5^2-6\cdot5\cdot3+3^2} = \frac{8}{25+9-90} = \frac{-8}{56} = \frac{-1}{7}$

Ответ: 8

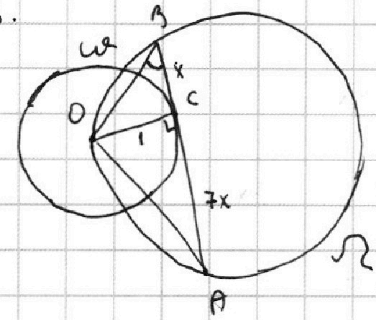
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.



1) $OC \perp AB$ (радиус провед в т. кас перпендик. касательной)

2) Пусть $BC = x$; $CA = 7x$

3) $\triangle OBC$; $\angle C = 90^\circ$

$OB^2 = BC^2 + OC^2$ по т-ме Пифагора

$OB = \sqrt{x^2+1}$

4) $\triangle OCA$; $\angle C = 90^\circ$

$OA^2 = OC^2 + CA^2$ по т-ме Пифагора

$OA = \sqrt{1+49x^2}$

5) $\triangle OBC$; $\angle C = 90^\circ$; $\sin\angle OBC = \frac{OC}{OB}$ по опр синуса для пр-уг. $\triangle$-ка

$\sin\angle OBC = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

6) $\triangle OBA$;

$\frac{OA}{\sin\angle OBA} = 2R$, где R – радиус Ω $(R=5)$

по т-ме синусов

$\sin\angle OBA = \frac{OA}{2R} = \frac{\sqrt{1+49x^2}}{10}$

7) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+49x^2}}{10}$

$100 = (1+49x^2)(1+x^2)$

Пусть $x^2 = t$, $t \geq 0$

$\begin{cases} (1+49t)(1+t) = 100 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49t^2 + 50t - 99 = 0 \\ t > 0 \end{cases}$

~~Дискриминант~~ $\begin{cases} (49t+99)(t-1) = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{99}{49} \end{array}\right. \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$

Обр. замена $x^2 = 1$; $x = 1$

$AB = AC + BC = 8x = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 7x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq \frac{2}{7} \\ \begin{cases} x > \frac{2}{7} \\ 2x^2+2x+1 \geq 49x^2-28x+4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq \frac{2}{7} \\ \begin{cases} x > \frac{2}{7} \\ 47x^2-30x+3 \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \vee \frac{2}{7}$

$14\sqrt{61} \vee 84-77 = 7$

$14\sqrt{61} > 7$

2) $47 \cdot \left(\frac{11+2\sqrt{61}}{41}\right)^2 - 30\left(\frac{11+2\sqrt{61}}{41}\right) + 3 \leq 0$

$47(121+244+44\sqrt{61}) - 30\cdot 41(11+2\sqrt{61}) + 3\cdot 41^2 \leq 0$

$47\cdot 365 + 47\cdot 44\cdot\sqrt{61} - 30\cdot 41\cdot 11 - 60\cdot 41\sqrt{61} + 3\cdot 41^2 \leq 0$

$47\cdot 365 - 3\cdot 41\cdot 69 \leq 392\sqrt{61}$

$8668 \leq 392\cdot\sqrt{61}$

$392\cdot\sqrt{61} \leq 392\cdot 8 \leq 8668$ неверно

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ не подходит.

Ответ: $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4.

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\sqrt{2x^2+2x+1+2-7x} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

Пусть $2x^2+2x+1 = a$, $2-7x = b$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$\begin{cases} \sqrt{a}+b \geq 0 \\ a+b = a+b^2+2\sqrt{a}\,b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} \geq -b \\ b^2+2\sqrt{a}\,b - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} b=0 \\ \begin{cases} \sqrt{a} \geq -b \\ b+2\sqrt{a}-1=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ \begin{cases} \sqrt{a} \geq -b \\ b = 1-2\sqrt{a} \end{cases} \end{array}\right.$$

Обратная замена:

1) $2-7x=0$

$x = \frac{2}{7}$

2) $\sqrt{a} \geq -b$ $\quad \sqrt{2x^2+2x+1} \geq 7x-2$

$2-7x = 1-2\sqrt{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x \geq 1 \\ 49x^2-14x+1 = 8x^2+8x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x \geq 1 \\ 41x^2-22x-3=0 \end{cases}$$

$D_1 = 11^2+41\cdot 3 = 121+123 = 244$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

1) $7 = \sqrt{49} < \sqrt{61} < \sqrt{64} = 8$

$-8 < -\sqrt{61} < -7$

$-2\sqrt{61} < -14$

$11-2\sqrt{61} < -3 < 0$

$\frac{11-2\sqrt{61}}{41} < 0 < \frac{1}{7}$ $\quad \Rightarrow \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$ - не подходит

2) $\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \vee \frac{1}{7}$

$77+14\sqrt{61} \vee 41$

$14\sqrt{61} > -36$ $\quad \frac{11+2\sqrt{61}}{41} > \frac{1}{7}.$

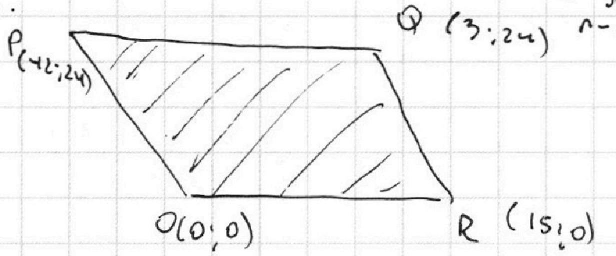
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5.



1) Запишем уравнения прямых образ п-м.

PO : $y = -2x$

RQ : $y = -2x + b$

$0 = -2\cdot 15 + b$

$b = 30$

$y = -2x + 30$

$0 \le y + 2x \le 30$ чтобы огранич область.

2) PQ : $y = 24$

OR : $y = 0$

$0 \le y \le 24$

3) $0 \le 2x \le 30$

$0 \le x \le 15$

6) $2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12$

$12 \le 2x_2 + y_2 \le 30$ всего 19 зн-й

~~зн~~ $2x + y = 1$ ~~или~~ одна пара чисел

$2x + y = 2$ или 3 2 пары и т.д. до 24

$2x + y = 4$ или 5 3 пары

~~12 = 6 вар~~ ~~30 — 15 вар.~~ с 24 кол-во пар не мен.

Sz ~~6 + 15~~ 12 - 6 пар ; 24 - 12 пар

$S = \frac{6+11}{2} \cdot \frac{12}{2} \cdot 2 + 12 \cdot (30 - 24 + 1) = 17 \cdot 6 + 12 \cdot 7 =$

$=$ ~~$8 \cdot 13 + 12 \cdot 6 = 201$~~ $= 186$

Ответ: ~~201~~ пара 186

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

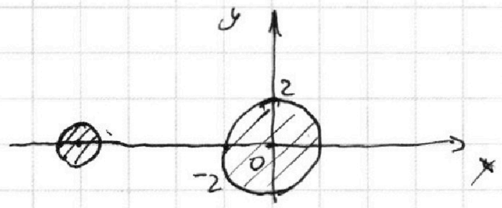
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2+y^2 \le 1 \\ x^2+y^2 \le 4 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} (x+8)^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+y^2 \ge 4 \end{cases} (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

Решим Графически

1) $y = ax + 10b$ – прямая если $a \ne 0$ и точка если $a = 0$

2) $(x+8)^2 + y^2 = 1$ окружность с центром $(-8;0)$ радиусом 1

3) $x^2+y^2 = 4$ – окружность с центром $(0;0)$ и радиусом 2



1) для системы (1)

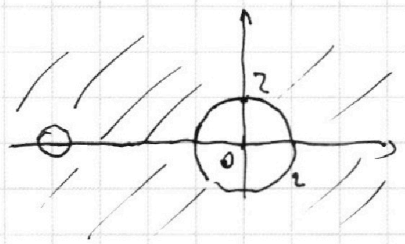
$(x+8)^2+y^2 \le 1$ решением явл. внутр. область окр

(методом проб. т. $(-8;0)$ $(-8+8)^2+0=0 \le 1$

аналог для $x^2+y^2 \le 4$

заметим что области не пересекаются значит (1) система реш. не имеет

2)



для 2 сист. реш. явл. инвертиров. пр-во.

прямая не может пересекать выдел. область ровно в 2х точках

одна точка тоже

Значит таких a не существует

Ответ: $\varnothing$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7.

12) $\frac{NT \cdot \sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{KM \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$

$\frac{NT}{KM} = \left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)^2 = \frac{2}{4{,}5} = \frac{4}{9}$

$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2}{3}$

13) $AF = \frac{NT \cdot \sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$

15) $AI = 2AF = 6$

Ответ: 6.

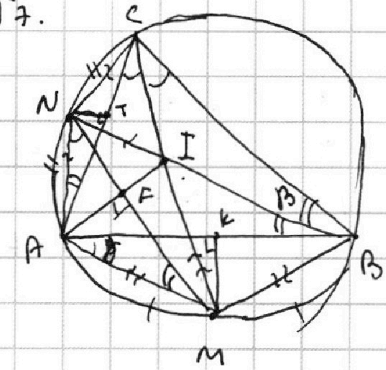
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7.



1) Вписанные $\angle CBN = \angle ABN$
как углы опир. на рав. дуги
BN – бис. угла B
аналог CM – бис $\angle C$

2) $CM \cap BN = I$, I - центр
впис окр $\triangle ABC$

3) из леммы о трезубце $NI = AN = NC$
$AM = MB = MI$

4) $\left.\begin{array}{l} AN = NI \\ IM = AM \\ MN - \text{общ} \end{array}\right\}$ $\triangle NIM = \triangle NAM$ по 3 сторонам

5) I и A симметричны отн. MN
$AI \perp MN$; ~~AM~~ $AI \cap MN = F$; $AI = 2AF$

6) $MK \perp AB$, $K \in AB$ доп. постр.
$NT \perp AC$, $T \in AC$

7) Пусть $\angle ACM = \gamma = \angle MCB$; $\angle ABN = \angle CBN = \beta$

8) Вписанные $\angle MCB = \angle MAB = \gamma$ (опир на $\overset{\frown}{MB}$)
$\angle ANM = \angle ACM = \gamma$ (опир на $\overset{\frown}{AM}$)
$\angle CBN = \angle NAC = \beta$ (опир на $\overset{\frown}{NC}$)
$\angle NMA = \angle NBA = \beta$ (опир на $\overset{\frown}{NA}$)

9) $\angle AFM = \angle AKM = 90°$, наход по од. стор от AM
опир на AM => $AFKM$ – впис в ω_2 по т-ме
о принадл. их т. одной окр. (у ω_2 – радиус R_2)

10) $\left.\begin{array}{ll} \triangle AKM: & \dfrac{KM}{\sin\gamma} = 2R_2 \\ \triangle AFM & \dfrac{AF}{\sin\beta} = 2R_2 \end{array}\right\}$ по т. синусов

$AF = \dfrac{KM \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$

11) ~~аналог~~
аналогично $AFTN$ впис в ω_3 с радиусом R_3
$\dfrac{AF}{\sin\gamma} = \dfrac{NT}{\sin\beta}$; $AF = \dfrac{NT \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$1\ 2\ 6\ 7\ ;\ 4\ \text{т}$

$\sqrt{2x^2+2x+1-7x+2} - \sqrt{2x^2+2x+1} \geq 2-7x$

$a \qquad b$

$11-2\sqrt{61} \vee \frac{1}{7}$

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$

$7 < \sqrt{61} < 8$

$-8 < -2\sqrt{61} < -7$

$\cancel{a+b+a} \quad \cancel{a}+b = b^2+\cancel{a}+2b\sqrt{a}$

$-2\sqrt{61} < -14$

$b^2+2b\sqrt{a}-b=0$

$\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 7x-2.$

$\frac{25}{41} \sim \frac{27}{41}$

$\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b+2\sqrt{a}-1=0 \end{array}\right.$

$\frac{25}{41} \sim \frac{27}{41}$

$\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=1-2\sqrt{a} \end{array}\right.$

$7x=2$

$x=3{,}5 \quad \frac{11+14}{41} \approx \frac{2\sqrt{61}}{41} \approx \frac{16}{41}$

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \vee \frac{1}{7}$

$11+2\sqrt{61} \vee \frac{82}{7}$

$2-7x = 1-2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$2\sqrt{61}$

$2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-1$

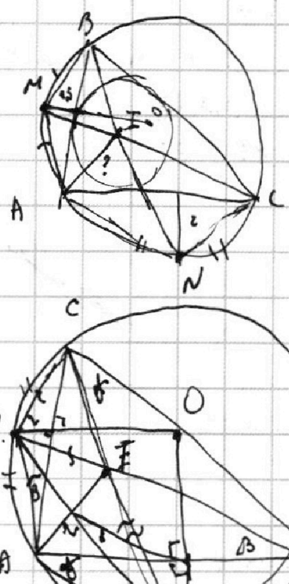
$8x^2+8x+4 = 49x^2-14x+1$

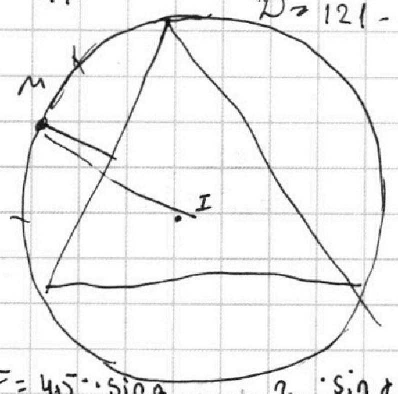
$\cancel{47x^2-17x=0}$ $\quad$ $\cancel{45x^2-19x+1=0}$

$\cancel{x=0}$ $\quad$ $41x^2-22x-3=0$

$\cancel{x=\frac{17}{47}}$ $\quad$ $(\cancel{-41x-3})($

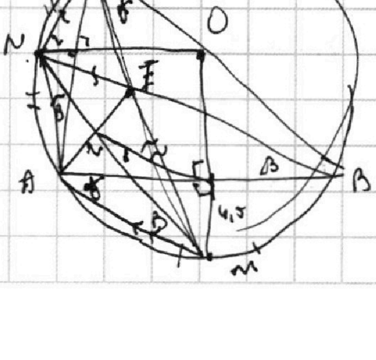
$D = 121-123 < 0$





$\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 7x-2$

$\left[\begin{array}{l} x \leq \frac{2}{7} \\ \cancel{8x^2+8x+4 \geq 49x^2-28x+4} \\ \cancel{x \geq \frac{2}{7}} \end{array}\right.$



$AF = \frac{4{,}5 \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2 \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$

$\cancel{49x^2}$

$\times\frac{47}{3}$
141

$\left\{\begin{array}{l} 2x^2+2x+1 \geq 49x^2-28x+4 \\ x \geq \frac{2}{7} \end{array}\right.$

$47x^2-30x+3 \leq 0$

$225-141 = 184$

$45x^2 \qquad 5x \leq \frac{15+\sqrt{184}}{36}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ab мин 2 $\quad 244 : 4 = 61$ $\quad c = a \cdot 7^7 \quad a^2 \cdot 7^7 = 7^{37}$

$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} = 2 \quad 244$

a и b взаим пр. $\quad 14+17+20 = 31+20 = 51$

$\frac{a}{c} = \frac{1}{2^8} \quad c = a \cdot 2^4 \quad ac = 2^{20} \quad a \cdot a \cdot 2^8 = 2^{20} \quad a = 2^9 \quad b = 2^8 \quad c = 2^4$

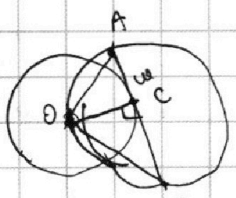
$\frac{c}{a} = 7^7 \quad c = 7^7 \cdot a \quad a^2 = 7^{15}$

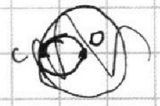
a	7^{14}	2^9
b	$\cancel{7^{23}}$	2^{11}
c	7^{23}	2^6

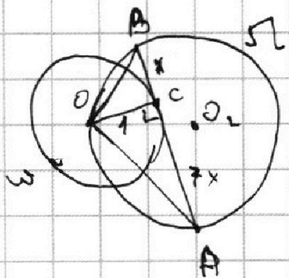
$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \quad a+b \vdots m \quad a^2-6ab+b^2 \vdots m$

$25+9-6\cdot5\cdot3 = \; = -1$

$6\cdot15 = 90 - 34 = 56$

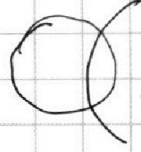




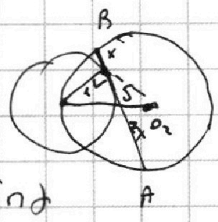


$(7t+1)(7t-\frac{8}{3})$

$\sqrt{2x^2+2x+1} \geq 7x-2$



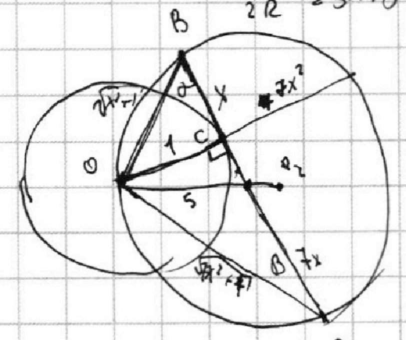
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sin\alpha \quad \frac{\sqrt{7x^2+1}}{2R} = \sin\alpha$



$(a+b) = mk \quad (a+b)^2 - 8ab = mt \quad m^2k^2 - 8ab = mt \quad 8ab \vdots m \quad 8 \vdots m$

$x \leq \frac{2}{7} \quad 4x^2+4x+1 \geq$

$a \not\vdots m \quad b \not\vdots m \quad$ m-макс. 8



$(5+3)^2 - 8\cdot15$

$(2x-3)(x-1)$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$7x+2\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}$.

$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{\ldots} = 49x^2 - 28x + 4$

$-2\sqrt{\ldots} = 45x^2 - 25x$

$5x(9x-5) = 2\sqrt{.}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

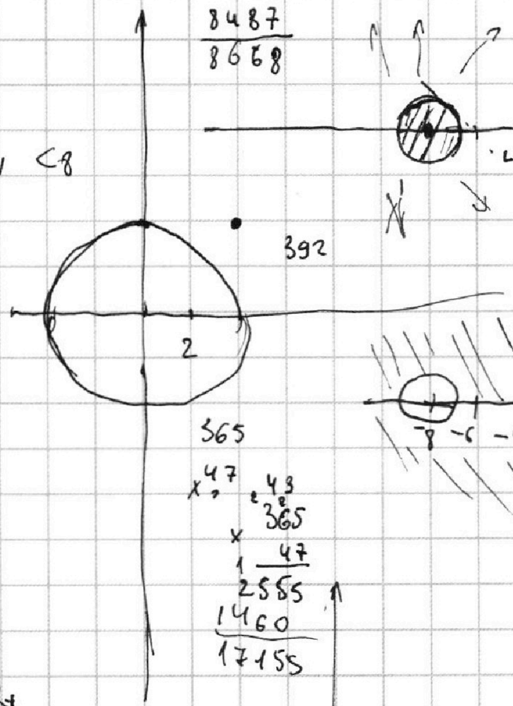
МФТИ

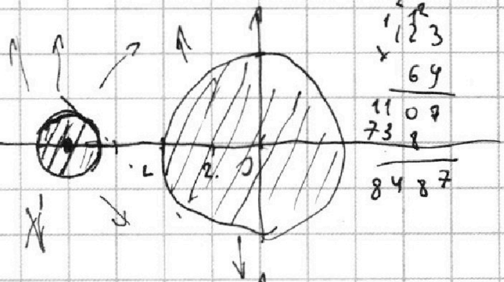
$17155 - 8487 = 8668$

$123 \times 69 = 1107 + 738 = 8487$

$y = ax + 10b$

$\sqrt{61} < 8$

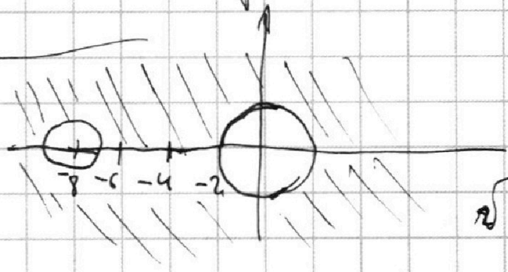




392

$4{,}5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{}$

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$



$\sqrt{2 \cdot (\frac{11+2\sqrt{61}}{}}$

365

$365 \times 47 = 2555 + 1460 = 17155$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12.$

$a + b \leq 0$

$49 \times 9 = 441$

$4 \cdot 7x^2 - 30x + 3 \leq 0$

$\cancel{2x^2+2x+1+2}$

$441 + 4410 = 4851$

$D = 225 - 141 = 84$

$4 \cdot 21$

$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

$(2x-3)(x-1) \geq 0$

$\frac{15 \pm 2\sqrt{21}}{}$

$x \geq 1{,}5$

$x \leq 1$

$2x^2 + 2x + 1 \geq 49x^2$

$2460 - 2068 = 392$

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \vee 1$

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \vee \frac{2}{7}$

$11 + 2\sqrt{61} \vee 41$

$77 + 14\sqrt{61} \vee 82$

$47 \times 44 = 188 + 188 = 2068$

$2\sqrt{61} \vee 15$

$14\sqrt{61} \vee 5$

$\sqrt{61} < 15.$

$\sqrt{61} \vee$

$\frac{15-2\sqrt{21}}{47} < \frac{2}{7} < x < \frac{15+2\sqrt{21}}{47} \vee \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$

$49 \cdot 392 \cdot 8$

$41 \cdot 15 + 2\sqrt{21} \cdot 41 \vee 47 \cdot 11.$

$(7t - 11)(7t + 9)$

$(49t + 99)(t - 81)$

$110 - 41 = 69$

$41 \cdot (123 - 330)$

$3 \cdot 41(110 - 41) = 3 \cdot 41 \cdot$

1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6.

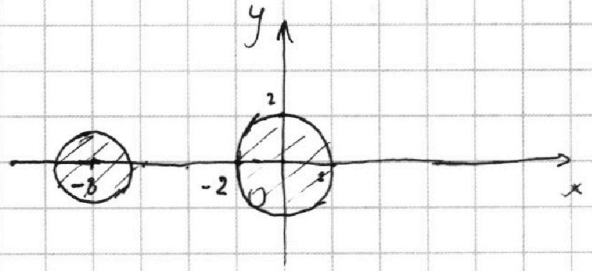
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = ax + 10b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} (2) \end{array} \right. \end{cases}$$

Решим графически

1) $y = ax + 10b$ – прямая, если $a \neq 0$ и точка если $a = 0$

2) $(x+8)^2 + y^2 = 1$ – окружность с центром $(-8; 0)$ радиусом 1

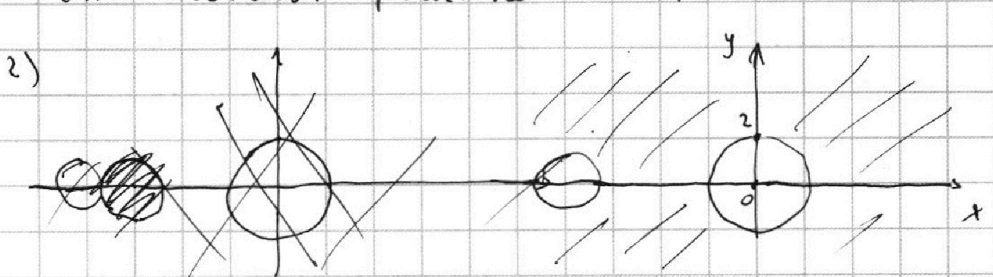
3) $x^2 + y^2 = 4$ – окружность с центром $(0;0)$ и радиусом 2



1) для первой системы в совокупности $(x+8)^2 + y^2 \leq 1$ ан реш. явл. внутр. область окр. вк (методом проб. т. $(-8;0)$; $(-8+8)^2 + 0 = 0 \leq 1$
аналог для $x^2 + y^2 \leq 4$

заметим что области не пересекаются значит (1) система реш. не имеет.

2)



для (2) реш. явл. инвертиров. пр-во.
Прямая не может пересекать выдел. область в 2х точках. одна точка тоже.
Значит таких a не существует

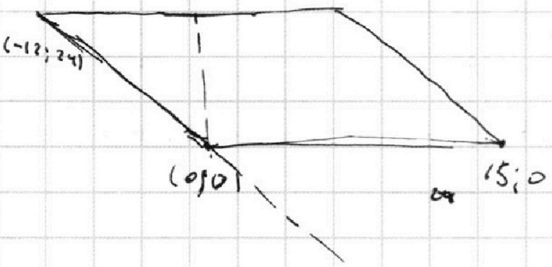
Ответ: $\varnothing$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



y_1
y_2 $\leq 24.$

$24 = (-12)a$

$a = -2$

$y = -2x \geq 0$

$y + 2x \geq 0$

$y = -2x + b$

$0 = -2 \cdot 15$ $b = 30$

$y + 2x - 30 \leq 0$

$0 \leq y + 2x \leq 30$

$(y_2' - y_1)(x$

$y_2 + 2x_2 - (2x_1 + y_1) = 12$

$(0;30)$ $(0;30)$

30

$y_2 + 2x_2 = 5$

$13 \times 9 = 117$

$12 \times 7 = 84$

$17 \times 6 = 102$

$117 + 84 = 201$

$201 - 12$

186

1

$\times 17$
7