



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице: .

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

числовик

NS

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \quad (3)$$

учеб

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \quad (2)$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \quad (1)$$

рассмотрим двойки:

$$a = 2^x \dots \Rightarrow b = 2^{15-x} \dots$$

$$\Rightarrow b \text{ хотя бы включает в себя } 2^{15-x}$$

$$\Rightarrow c \text{ включает в себя хотя бы } 2^{17-(15-x)} = 2^{x+2}$$

$$ac : 2^{23} \Rightarrow 2^{x+x+2} = 2^{2x+2} \leq 2^{23} \Rightarrow x \text{ хотя бы}$$

19.

$$a = 2^{11} \dots$$

$$b = 2^{13} \dots$$

$$c = 2^{13} \dots$$

рассмотрим семерки:

из (1) и (2) а и с семеркой вместе

не более, чем 7^{29} , но $ac = \text{хотя бы } 7^{39} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = 7^{39-x} \Rightarrow b = 7^{x-4} \Rightarrow c = 7^{39}$$

$$ac = 7^{39} \cdot 2^{24} \text{ (хотя бы)}, \text{ а } b \text{ хотя бы } 2^4$$

$$\text{Итого } abc \leq 7^{39} \cdot 2^{24} \cdot 2^4 = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

условие

№ 2

$\frac{a}{b}$ - несократима.

Рассмотрим $a = 2$; $b = 3$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{5}{29} \text{ - несократима } \Rightarrow$$

$\Rightarrow m = 1$ - наибольшее.

Ответ: $m = 1$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Исходные.

нч

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

замена: $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = a$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = b$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

1) $a - b = 0$, т.е. $a = b$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

проверка: $\sqrt{\frac{3 \cdot 1}{81}} - \sqrt{\frac{3 \cdot 1}{81}} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$

верно

2) $a + b = 0$, т.е. $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0 \Leftrightarrow$
 $\geq 0 \quad \geq 0$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

Ответ: $x = \frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

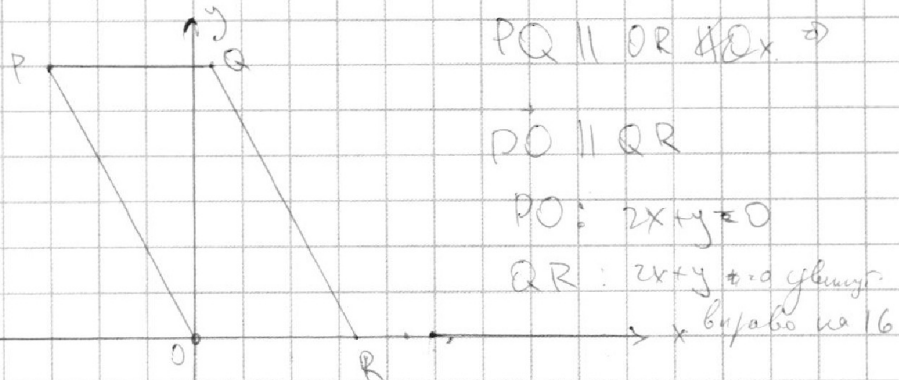
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

числовик

нб



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \rightarrow \text{расстояние м/у параллельными}$$

$$y_2 = -2x_2 \text{ и } y_1 = -2x_1 \text{ равно } 14.$$

эти прямые параллельны PO и парам QR

таких пар прямых, лежащих внутри пар-ла

③ рассмотрим одну из таких пар:

нужны точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) такие, что

они лежат на ~~прямых~~ параллельных прямых, рас-е

м/у которыми 14. , причем x_1, y_1, x_2, y_2 - целые

способов выбрать точку на одной прямой:

$$y = -2x \Rightarrow y \cdot 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{таких точек } \frac{26}{2} = 13. \text{ и на другой}$$

нр. 13 таких точек $\Rightarrow$ способов для одной пары: $13 \cdot 13$.

$$\text{а для трех: } 3 \cdot 13 \cdot 13 = 507$$

Ответ: 507



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

матрица

и в

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 & \text{— прямая} \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 4^2 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 4^2 \end{cases}$$

совокупность, входящая в систему выполняется
во всех точках кругов с центром $(0; 0)$ и
радиусом 1 и с центром $(0; 12)$ и радиусом

4

Если прямая является секущей для ^{кругов} ~~матрицы~~
из этих ~~прямых~~, то решений будет бесконечно

много (внутри круга бесконечно много

точек) $\Rightarrow$ прямая может касаться или

не иметь общих точек с окр. Прямая

касание с одной окружностью дает только

одно решение $\Rightarrow$ 2 решения будет только

в том случае, когда прямая $ax + y - 8b = 0$

касается одновременно обеих окружностей.

Важное замечание: исходные круги не имеют

общих точек, т.к. расстояние u между центрами ≥ 12

и сумма радиусов $4 + 1 = 5$, $5 < 12$.

4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



листовик.

прямая $ax + by - 8b = 0$ касается окр с центрами
 $(0; 0)$; $(0; 12)$ и радиусами 1 и 4 соотв. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ расстояние от пр. до $(0; 0) = 1$ до $(0; 12) = 4$

ф-ла расст. от точки до пр:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1 \\ \frac{|a \cdot 0 + 1 \cdot 12 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{|-8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1 \quad (1) \\ \frac{|12 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 4 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(1): \frac{|-8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1 \quad \begin{array}{l} \text{при } b \leq 0 \quad \sqrt{a^2 + 1} = -8b \\ \text{при } b \geq 0 \quad \sqrt{a^2 + 1} = 8b \end{array}$$

$$(2): \text{при } b \leq 0: \underbrace{|12 + \sqrt{a^2 + 1}|}_{>0} = 4 \underbrace{\sqrt{a^2 + 1}}_{>0} \Rightarrow 12 + \sqrt{a^2 + 1} = 4\sqrt{a^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{a^2 + 1} = 12 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = 4 \Rightarrow a^2 + 1 = 16$$

$$a = \sqrt{-15}$$

$$\text{при } b \geq 0: |12 - \sqrt{a^2 + 1}| = 4\sqrt{a^2 + 1}$$

$$1) \sqrt{a^2 + 1} \leq 12$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$12 - \sqrt{a^2 + 1} = 4\sqrt{a^2 + 1}$$

$$\sqrt{a^2 + 1} = 2, 4$$

$$a^2 + 1 = \frac{144}{25}$$

$$a^2 = \frac{119}{25} \Rightarrow$$

$$a = \begin{cases} \frac{\sqrt{119}}{5} \\ -\frac{\sqrt{119}}{5} \end{cases}$$

6)

$$\text{Ответ: } \pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

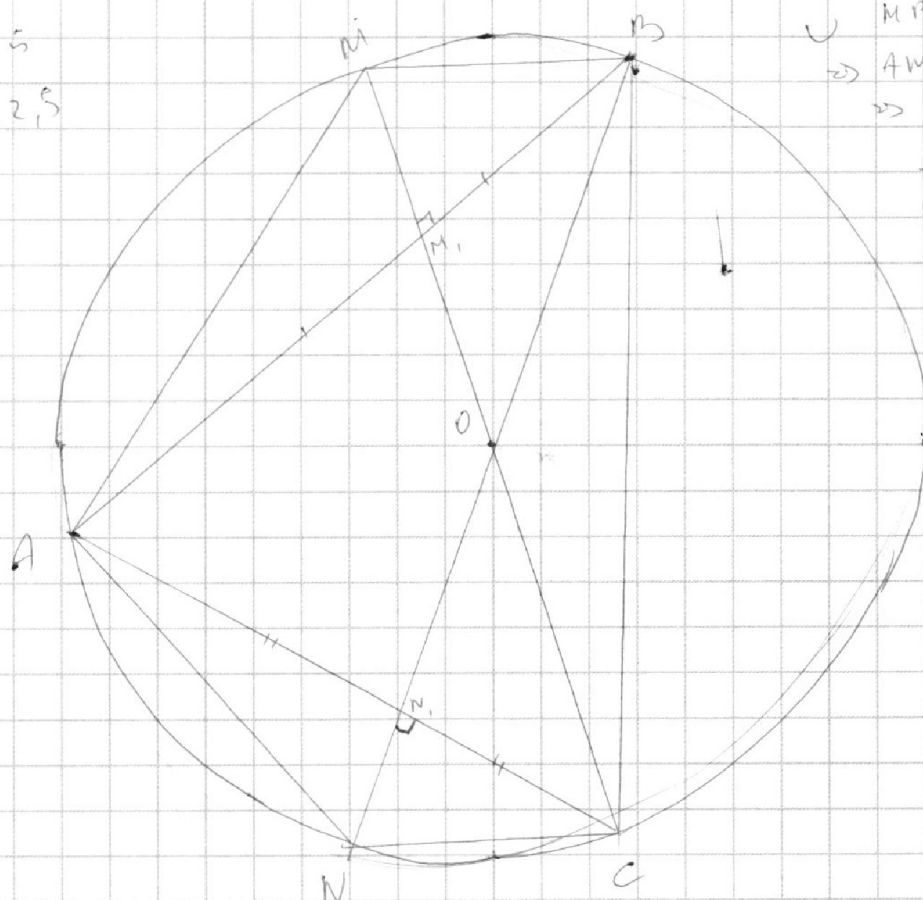


исходник

№7

$MM_1 = 5$

$NN_1 = 2,5$



$MB \geq MA \Rightarrow$
 $\Rightarrow AM = MB \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle AMB - \text{р/с} \Rightarrow$
 $\Rightarrow MM_1 - \text{высота}$
 $\text{и мед} \Rightarrow$
 $\Rightarrow MM_1 - \text{сер.}$
 $\text{пер. к } AB$
 $\Rightarrow O \text{ лежит}$
 $\text{на } (MM_1)$
 Аналогично:
 $AN_1 = N_1C$



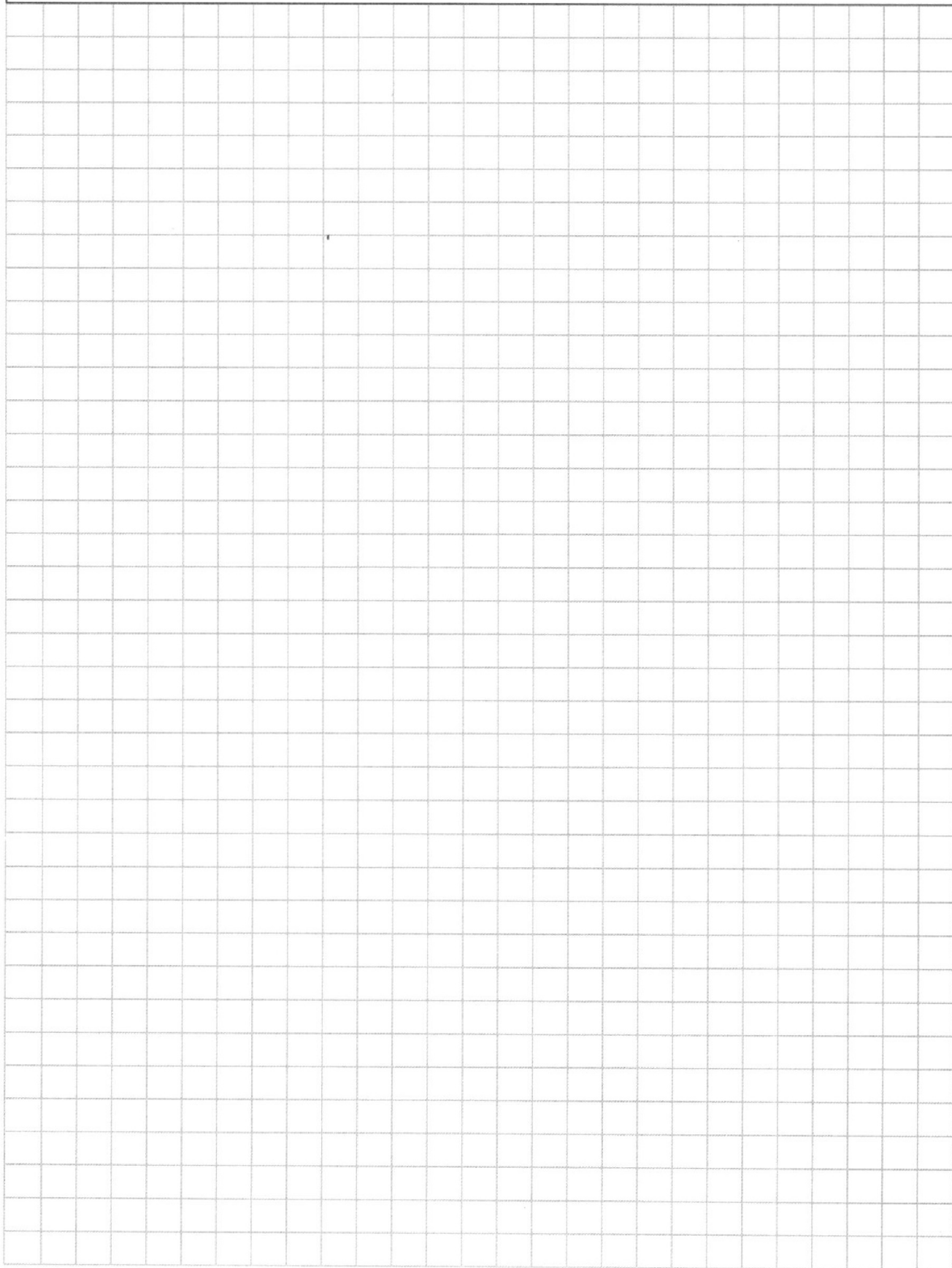
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик

$$2x_1 + y_1 = 14 \quad y_1 = -2x_1$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$y_2 = 2x_1$$

$$y_2 \geq 0$$

$$2x_2 + y_2 = 0$$

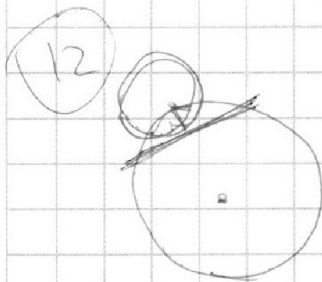
$$2x_2 + y_2 = 14 + (2x_1 + y_1)$$

$$y_1 = -2x_1$$

$$y_2 = 2x_1 + 14 + 1$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 169 \\ \times 3 \\ \hline 608 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ab = 2^{15} \cdot 11 \cdot 17 \\ bc = 2^{17} \cdot 11 \cdot 17 \\ ac = 2^{23} \cdot 11 \cdot 17 \end{array}$$



$$ax + by + c = 0$$

$$ax + by = 0$$

$$-13x + 26y = 0$$

$$2y = -x$$

$$ax + by + c = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 10ab + 10ac + 10bc$$

$$\begin{cases} 3a + 26b + c = 0 \\ 16a + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -13a - 26b &= 0 \\ a &= -2b \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ \hline a^2 - 7ab + b^2 \\ \hline \end{array}$$

$$13 - 18 \cdot y - 21$$

$$6b + 26b + c = 0$$

$$c = -$$

$$\begin{aligned} 12 + 15 + 6 \\ 24 + 6 = 30 \end{aligned}$$

$$c = 2$$



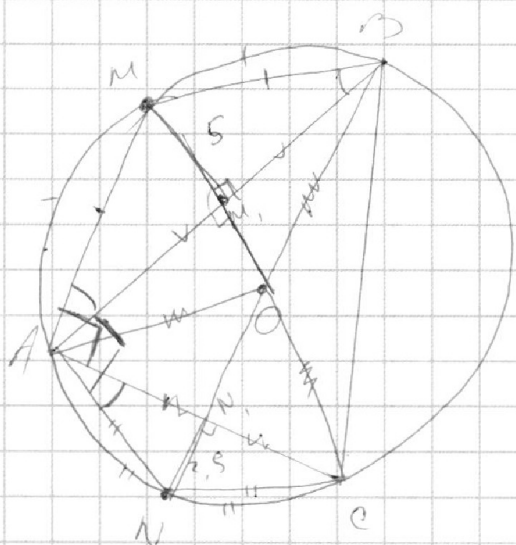
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$MM_1 = 5$$

$$NN_1 = 2,5$$

180

$$\angle MAC + \angle M_1AN =$$

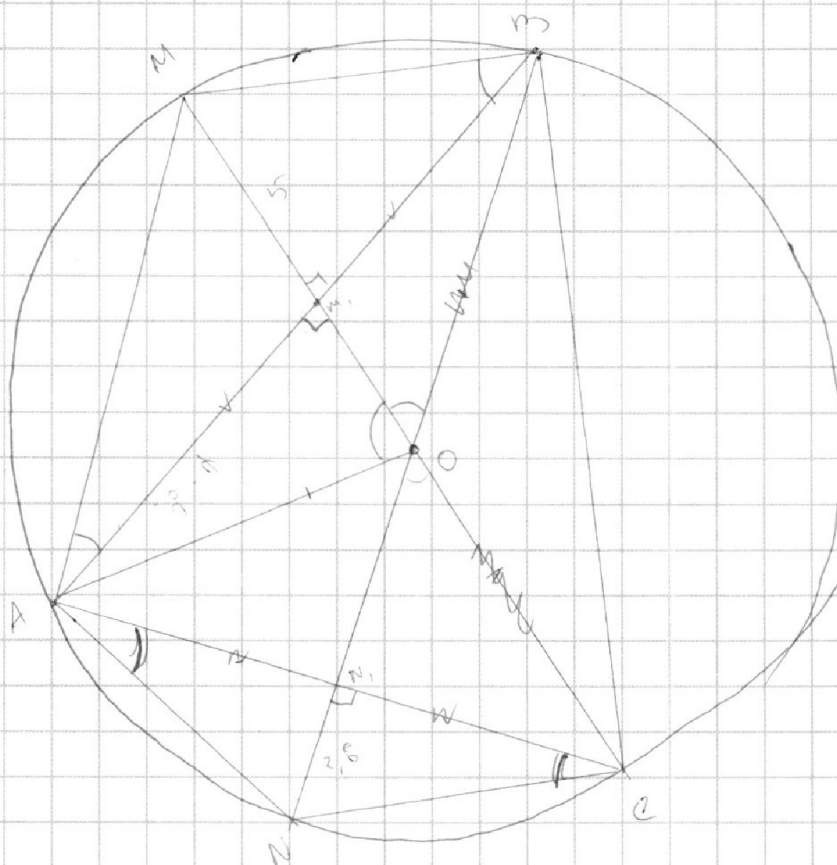
$$180^\circ - \angle BAC =$$

$$= \angle MAN$$

$$\alpha + x = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\beta + x = 90^\circ$$

$$AM = 2AC$$



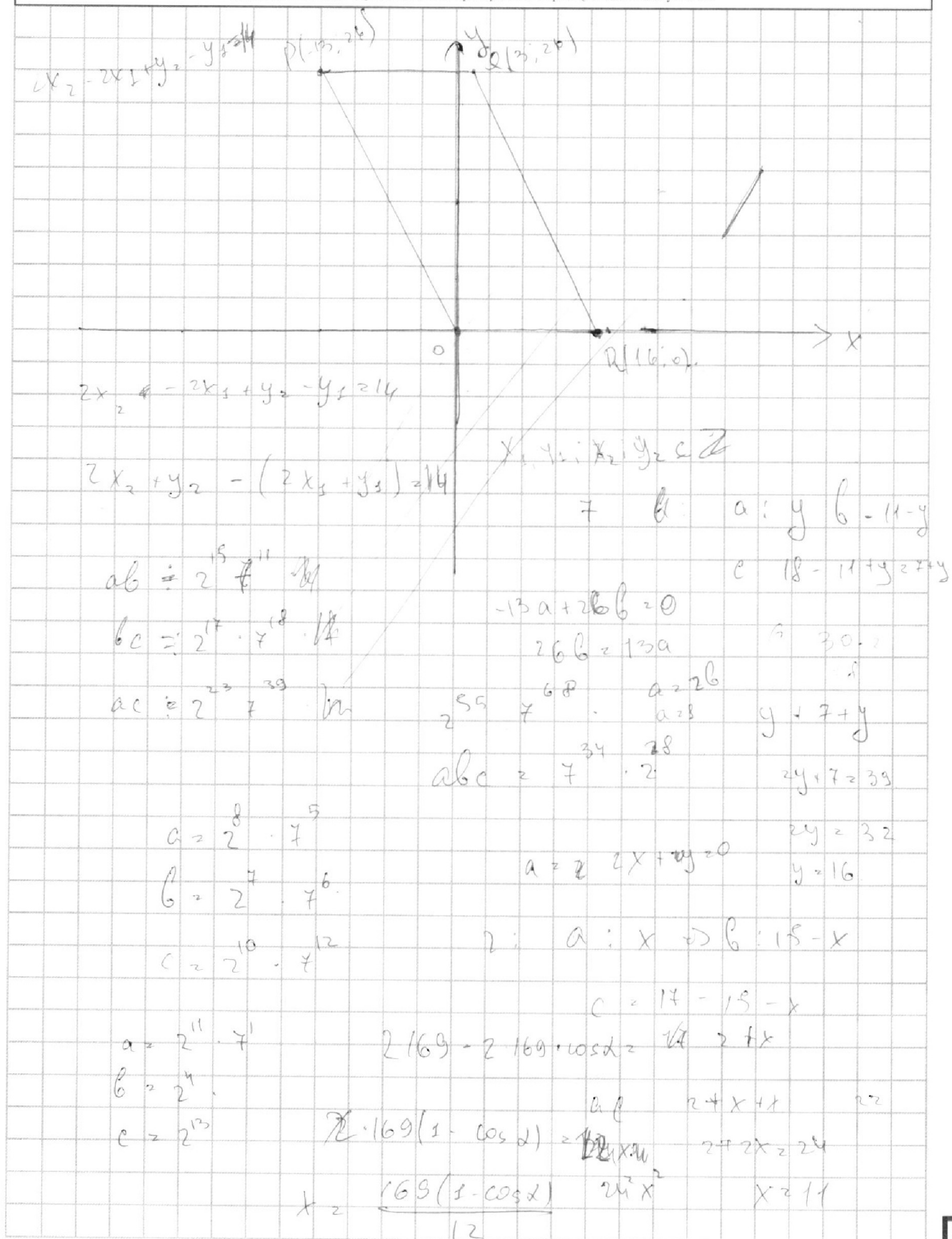
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = 8b - ax$$

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 = 1$$

$$(a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c)$$

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$ax + y - 8b = 0$$

$$\sqrt{a^2 + 1}$$

$$\sqrt{a^2 + 1}$$

$$|-8b| = 1$$

$$|12 - 8b| = 4$$

$$|-8b| = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\frac{|12 - 8b|}{|-8b|} = 4$$

$$(-8b)^2 = a^2 + 1$$

$$16a^2 + 16 = (12 - 8b)^2$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \sqrt{12} \\ \sqrt{16} \\ \hline 72 \\ \sqrt{12} \\ \hline 192 \end{array}$$

$$64b^2 = a^2 + 1$$

$$16a^2 + 16 = 144 - 192b + 64b^2$$

$$15a^2 + 15 = -192b + 144$$

$$15a^2 = -192b + 129$$

$$8b = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$4\sqrt{a^2 + 1} = |12 - 8b|$$

$$8b \cdot 32b = |12 - 8b|^2$$

$$\frac{|-8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1$$

$$b = \frac{12}{8} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{|12 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 4 \cdot b > \frac{3}{2}$$

$$32b = 8b - 12$$

$$24b = -12$$

$$b = -2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

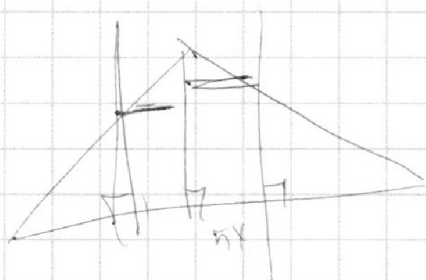
7

☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик





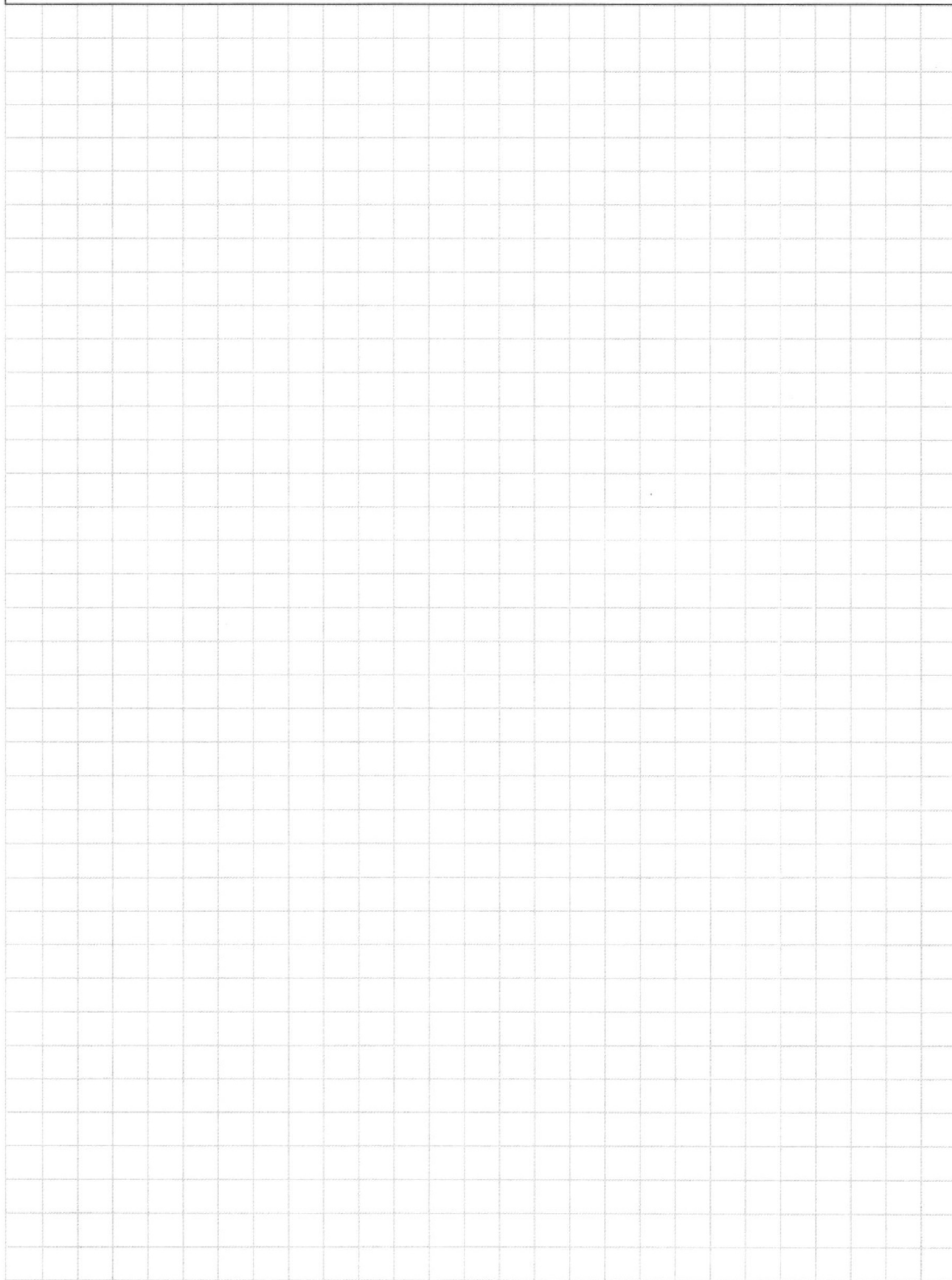
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик

$$ab \div 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot k$$

$$bc \div 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot f$$

$$ac \div 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot n$$

$$a^2 b^2 c^2 \div 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot kfn$$

$$\frac{12}{5}$$

$$\frac{144}{25}$$

$$\frac{119}{25} + 5 \cdot \sqrt{\frac{12}{5}}$$

$$\frac{12}{5}$$

$$\frac{144}{25} - 25$$

$$ab \div 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc \div 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac \div 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 \div 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$\frac{86}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\frac{144}{25} - \frac{119}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$|12 - 86| = |12 - \sqrt{a^2+1}| = 4$$

$$\sqrt{a^2+1}$$

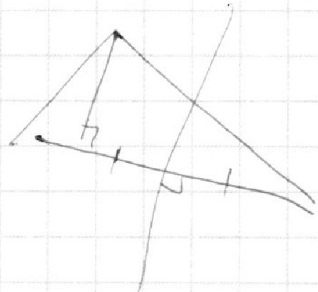
$$18 \cdot 39$$

$$7 \cdot 6 = 42$$

(3)

$$24x$$

$$12 \cdot x$$



$$6 \cdot 9$$

$$\begin{array}{r} 13- \\ +10 \\ \hline 42 \\ -13 \\ \hline 29 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

