



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1. $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$, $bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$, $ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$, мин abc - ?

произведение abc минимально когда числа a, b и c минимальны
тогда, чтобы a, b и c были минимальными, возьмем

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}, \quad bc = 2^{17} \cdot 7^{17}, \quad ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c} = \frac{2^{14} \cdot 7^{10}}{2^{17} \cdot 7^{17}} = \frac{1}{2^3 \cdot 7^7} \Rightarrow c = 2^3 \cdot 7^7 a$$

$$\frac{bc}{ac} = \frac{b}{a} = \frac{2^{17} \cdot 7^{17}}{2^{20} \cdot 7^{37}} = \frac{1}{2^3 \cdot 7^{20}} \Rightarrow a = 2^3 \cdot 7^{20} b \text{ и } c = 2^6 \cdot 7^{27} b$$

$$\text{тогда } bc = b^2 \cdot 2^6 \cdot 7^{27} = 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow b^2 \cdot 7^{20} = 2^{11}$$

$$b = \sqrt{\frac{2^{11}}{7^{20}}}$$

$$a \cdot b \cdot c = b \cdot 2^3 \cdot 7^{20} \cdot b \cdot 2^6 \cdot 7^{27} b = 2^9 \cdot 7^{47} \cdot \sqrt{\frac{2^{11}}{7^{20}}} = 7^{17} \cdot 2^{25,5}$$

$$\text{Ответ: } 7^{17} \cdot 2^{25,5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

√2. $\frac{a}{b}$ - несократима. max m такое, что $\left(\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}\right) : m = ?$

заменим, что $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2-8ab}$

пусть $(a+b) : m$, тогда $(a+b)^2 : m$

по условию, $((a+b)^2-8ab) : m \Rightarrow 8ab : m$

рассмотрим 3 случая:

1) a и b четные - это невозможно т.к. иначе дробь $\frac{a}{b}$ - сократима

2) a - нечетное, b - четное (или наоборот); т.к. дробь $\frac{a}{b}$ - несократима, у a и b нет общих делителей, но $(a+b) : m$,

значит $\begin{cases} a \equiv x \pmod{c} \\ b \equiv y \pmod{c} \end{cases}$ - тогда сумма $(a+b)$ будет делиться на c
 $x+y \equiv c$

но если $x+y=c$, то $y=c-x$, $b \equiv (c-x) \pmod{c} \Leftrightarrow b \equiv -x \pmod{c}$

если $a \equiv x \pmod{c}$ и $b \equiv -x \pmod{c}$, то a и b одной четности - противоречие

3) a и b нечетные и у них нет общих нечетных делителей $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a+b) : m$, где m - четное т.к. нечетное + нечетное = четное

т.к. $(8ab) : m$, где m - четное, а $a \cdot b$ - нечетное, то max $m = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

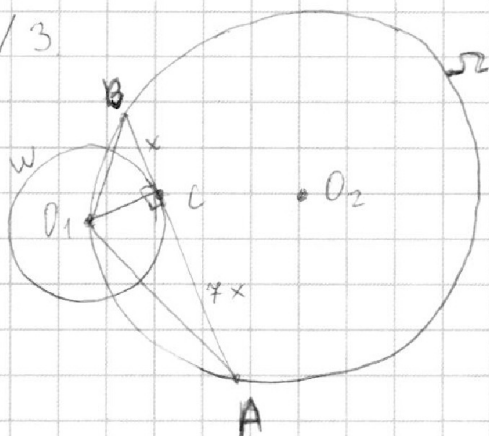
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

√3



$$\frac{AC}{CB} = 7$$

$$R_{\omega} = R_1 = 1$$

$$R_{\Omega} = R_2 = 5$$

AB-?

O_1 - центр ω , O_2 - центр Ω

пусть $BC = x$, тогда $AC = 7x$

$\triangle ABO_1$ вписан в окружность Ω , тогда по Th синусов

$$\frac{AB}{\sin \angle AO_1B} = 2R_2 = 10 \quad \sin \angle AO_1B = \frac{AB}{10} = \frac{8x}{10}$$

$O_1C \perp AB$ т.к. AB - касательная к ω , $O_1C = R_1 = 1$

по Th Пифагора в $\triangle O_1CB$: $O_1B = \sqrt{O_1C^2 + CB^2} = \sqrt{x^2 + 1}$

по Th Пифагора в $\triangle O_1CA$: $O_1A = \sqrt{O_1C^2 + AC^2} = \sqrt{49x^2 + 1}$

$$S_{\triangle ABO_1} = \frac{1}{2} \cdot O_1A \cdot O_1B \cdot \sin \angle BO_1A = \frac{1}{2} \sqrt{(x^2 + 1)(49x^2 + 1)} \cdot \frac{8x}{10}$$

$$S_{\triangle ABO_1} = \frac{1}{2} O_1C \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 8x$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1} \cdot \frac{8x}{10} = \frac{1}{2} \cdot 8x \quad \sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1} = 10 \text{ т.к. } x \neq 0$$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$, пусть $x^2 = a \geq 0$, тогда

$$49a^2 + 50a - 99 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - \text{подходит} \\ a = -\frac{99}{49} - \text{не подходит} \end{cases}$$

$$x^2 = a = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ т.к. } x > 0, \text{ тогда } AB = 8x = 8$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$D. Z.: \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-\frac{3}{2}) \geq 0 \\ (x+1)^2 + x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

пусть $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a$ и $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b$, ~~тогда~~ $a, b \geq 0$, тогда

$$a - b = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{рассмотрим 2 случая:}$$

$$1) a - b = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2, \text{ сделаем обратную замену:}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$2 - 7x = 0 \quad x = \frac{2}{7} - \text{подходит}$$

$$2) a - b \neq 0 \Rightarrow \text{поделив уравнение } a - b = (a - b)(a + b) \text{ на}$$

$(a - b) \neq 0$, получим, что $a + b = 1$, сделаем обратную замену:

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$$

$$-(7x + 3) = -2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 + 42x + 9 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 + 34x + 5 = 0 \quad D = 34^2 - 4 \cdot 5 \cdot 41 = 336$$

$$x_1 = \frac{-34 + \sqrt{336}}{82} = \frac{-34 + 4\sqrt{21}}{82} = \frac{-17 + 2\sqrt{21}}{41}$$

$$x_2 = \frac{-34 - \sqrt{336}}{82} = \frac{-17 - 2\sqrt{21}}{41}; \quad 2\sqrt{21} < 17 \Rightarrow x_1, x_2 < 0 \Rightarrow \text{они не подходят по ог. з.}$$

$$\text{Итого: } x = \frac{2}{7}, x = \frac{-17 + 2\sqrt{21}}{41}, x = \frac{-17 - 2\sqrt{21}}{41}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



✓ 6. все значения a , при которых у системы

$$\begin{cases} ax - y + 106 = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \text{ равно 2 решения?}$$

заменим, что $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ когда

$$1) \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

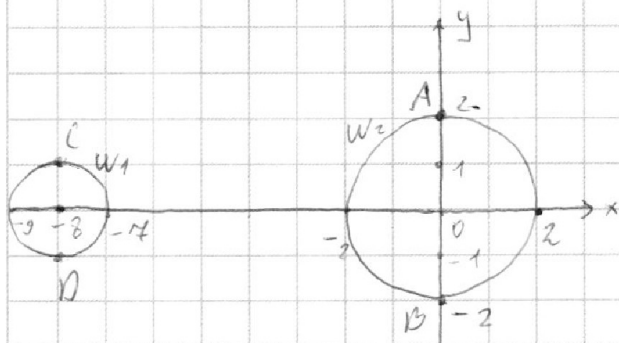
$$2) \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

заменим, что данные неравенства соответствуют графи-

кам окружностей W_1 с центром $(-8; 0)$ и радиусом 1 и

окружности W_2 с центром в $(0; 0)$ и радиусом 2

изобразим их на графике.



решению 1) системы неравенств

соответствует область

внутри W_1 (включая её

границы), а решение sys-

темы 2) - W_2 (включая её
границы)

заменим, что выражение $ax - y + 106 = 0$ - это

уравнение прямой $y = ax + 106$

Чтобы данная система имела равно 2 решения, прямая

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$y = ax + 10b$ должна касаться каждой окружности в 1 точке. Всего есть 4 варианта касательной. Пусть есть точки $A(0; 2)$, $B(0; -2)$, $C(-8; 1)$, $D(-8; -1)$

1) касательная AC, подставим координаты точек в уравнение прямой $y = ax + 10b$

$$\begin{aligned} 2 &= 0 + 10b & b &= \frac{1}{5} \\ 1 &= -8a + 2 & a &= \frac{1}{8} \end{aligned} \Rightarrow y = \frac{1}{8}x + 2$$

2) касательная AD:

$$\begin{aligned} 2 &= 0 + 10b & b &= \frac{1}{5} \\ -1 &= -8a + 2 & a &= \frac{3}{8} \end{aligned} \Rightarrow y = \frac{3}{8}x + 2$$

3) касательная BD:

$$\begin{aligned} -2 &= 0 + 10b & b &= -\frac{1}{5} \\ -1 &= -8a - 2 & a &= -\frac{1}{8} \end{aligned} \Rightarrow y = -\frac{1}{8}x - 2$$

4) касательная BC:

$$\begin{aligned} -2 &= 0 + 10b & b &= -\frac{1}{5} \\ 1 &= -8a - 2 & a &= -\frac{3}{8} \end{aligned} \Rightarrow y = -\frac{3}{8}x - 2$$

Ответ: $\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{8}$

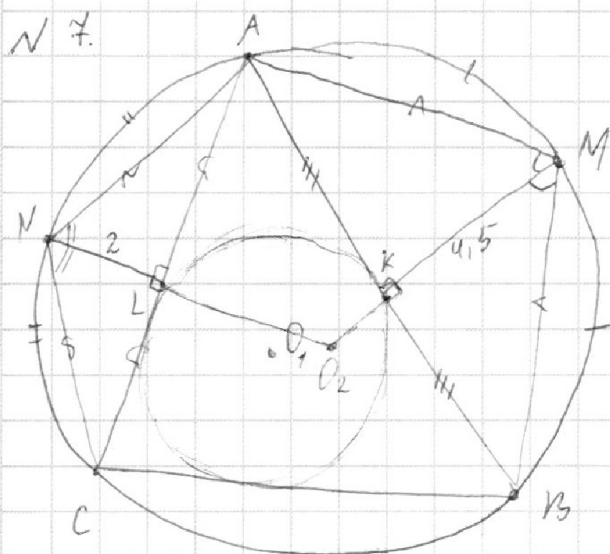
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle MA = \angle MB$$

$$\angle NA = \angle NC$$

$$MK = 4,5 \quad NL = 2$$

~~Найти~~ AD ? (O_1 - центр впис. окружности $\triangle ABC$)

т.к. $\angle MA = \angle MB$, то $AM = MB$, аналогично $CN = AN$

т.к. MK - высота в равнобедренном треугольнике, то

$$AK = KB \quad \text{и} \quad \angle AMK = \angle B MK$$

$$\text{аналогично } AL = CL \quad \text{и} \quad \angle ANL = \angle CNL$$

центр описанной вокруг треугольника окружности - пересечение серединных перпендикуляров $\Rightarrow MK$ перпендикулярен AB

центр описанной около $\triangle ABC$ окружности O_2 , $O_2 M = O_2 N$

центр вписанной окружности - пересечение биссектрис,

$AD = \frac{3}{4}$ биссектриса угла A



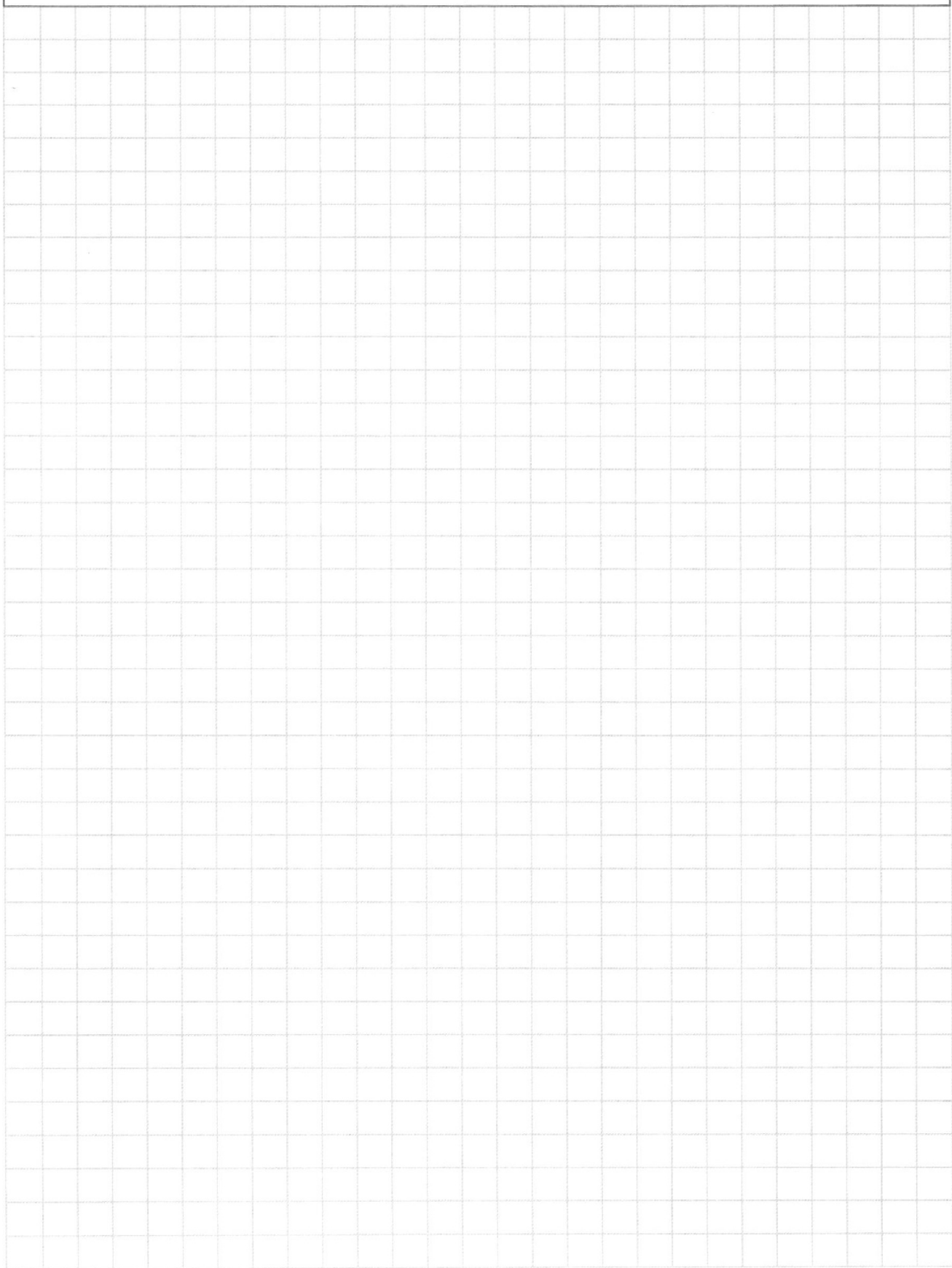
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



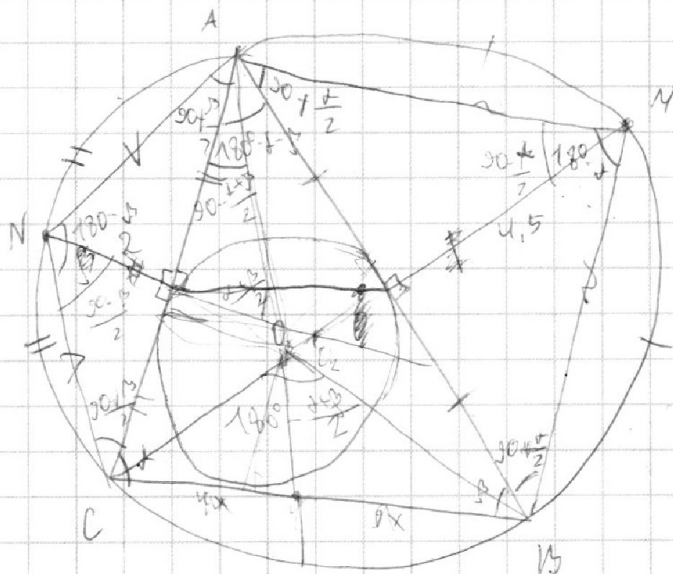
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$VMA = VMB$$

$$VNA = VNC \quad \frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$$

$$AD = ? \quad S = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot AB = 4,5R \cdot AB \sin \alpha$$

$$Mgo \ AB = 4,5$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AM^2 \sin \alpha$$

$$N go \ AC = 2$$

$$AB = 9 \quad AC = 4$$

$$4,5 AB = AM^2 \sin \alpha$$

$$640 = 2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 10$$

$$= 2^2 \cdot 2^4 \cdot 10^2$$

$$= 2^6 \cdot 10$$

$$= 2 \cdot 26 \cdot 5$$

$$lc = \frac{2bc \cos \alpha}{b+c}$$

$$1) (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 \geq 0$$

$$(x^2+8)^2 + y^2 \leq 1$$

$$x^2 + y^2 \geq 4$$

объем: маленькое

окружности XE

$$XE(-3;-1) \quad YE(-1;1)$$

$$2) (x^2+8)^2 + y^2 - 1 > 0$$

$$(x^2+y^2) < 0$$

объем: большая

окружности

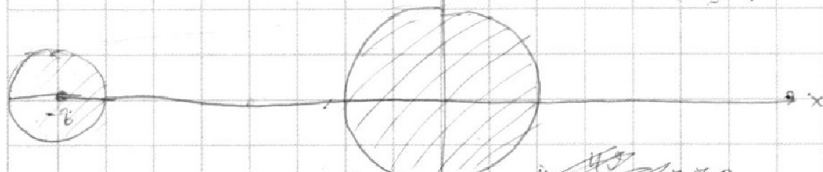
$$XE(-2;2) \quad YE(-2;2)$$

$$ax - y + 10b = 0$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + y^2 = 4$$

$$y = ax + 10b$$



$$2 = 10b \quad b = \frac{1}{5}$$

$$1 = -8a + 2 \quad a = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$1) (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

$$x^2 + (ax + 10b)^2 - 4 \geq 0$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \quad x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 1 \leq 0$$

$$(1+a^2)x^2 + (20ab+16)x + 100b^2+63 \leq 0$$

$$D = 400a^2b^2 + 40 \cdot 16ab + 256 - 4(1+a^2)(100b^2+63) =$$

$$= 4(100a^2b^2 + 100b^2 + 63a^2 + 63) = 640ab + 400b^2 + 258a^2 + 4 - 4a^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 2ab}$$

$$a+b \equiv m$$

$$(a+b)^2 \equiv m^2 \quad 2ab \equiv m^2$$

1) a, b - чётные

2) a - чётное, b - нечётное - не подходит делителю

3) a - нечётное, b - чётное
 $a+b \equiv m$

$$a \equiv x \pmod{c}$$

$$b \equiv y \pmod{c}$$

$$x+y \equiv c \quad (\Rightarrow) \quad b \equiv -x \pmod{c} \Rightarrow \text{они имеют одинаковую чётность}$$

$$14 \cdot 18 = 252$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

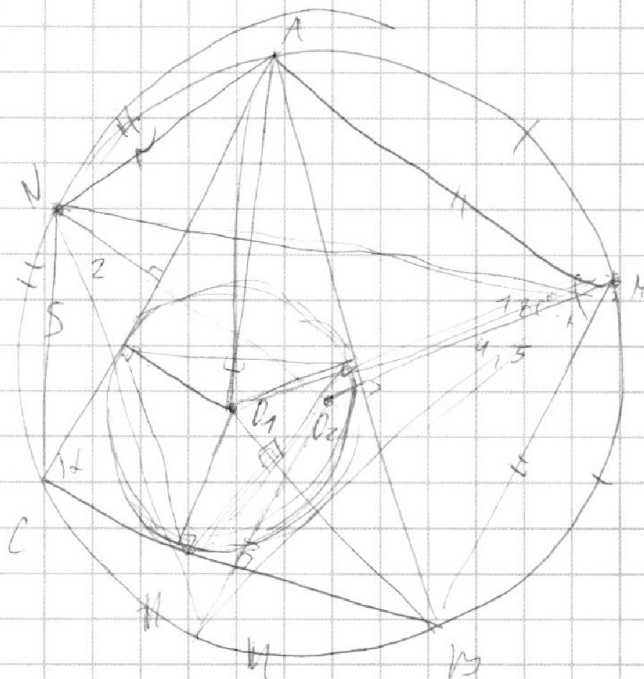
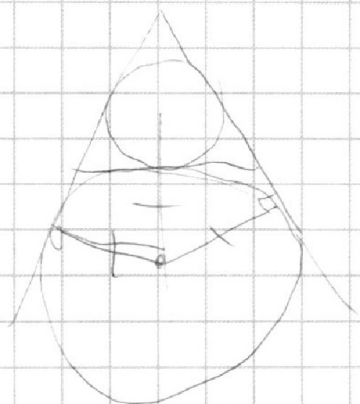
$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$y_2 = 12 + y_1 - 2(x_2 - x_1)$$

$$x_2 = \frac{12 - (y_2 - y_1)}{2} + x_1$$

$$y_2 = 12 + y_1 - 2x_2 + 2x_1$$

$$2x_1 - y_1 = 12 - 2x_2 + y_2$$



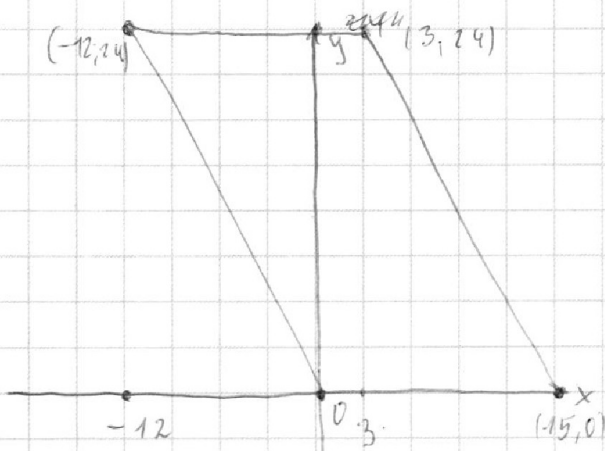
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12$$

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$a = x_2 - x_1 \quad b = y_2 - y_1$$

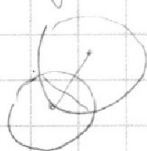
$$2a + b = 12$$

$$144 = 4(x_2 - x_1)^2 + 4(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (y_2 - y_1)^2$$

1) на 1 вершину $\Rightarrow$ x-ординаты

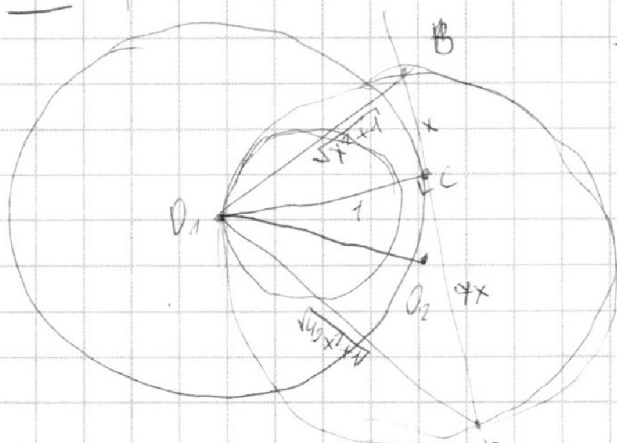
$$y_2 = 12y_1$$

$$A(15, 3) \quad B(1, 1)$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ 49 \\ \hline 147 \\ 147 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\sqrt{43}$$



$$\frac{AC}{CB} = 7 \quad AC = 7BC$$

$$R_1 = 1$$

$$R_2 = 5$$

$$AB = 2$$

$$\frac{8x}{\sin \alpha} = 10 \quad \sin \alpha = \frac{8x}{10}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sin \alpha = \frac{7}{2} 8x$$

$$\sqrt{(x^2 + 1)(49x^2 + 1)} \cdot \frac{8x}{10} = 8x$$

$$\sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1} = 10$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$49a^2 + 50a - 99 = 0$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = -\frac{99}{49}$$

$$a = 1 \text{ не подходит}$$

$$D = 2500 - 4 \cdot 49 \cdot 99$$

$$D = 2500 - 19602 = -17102$$

$$a = 1$$

$$a = -\frac{99}{49}$$

$$x = 1$$



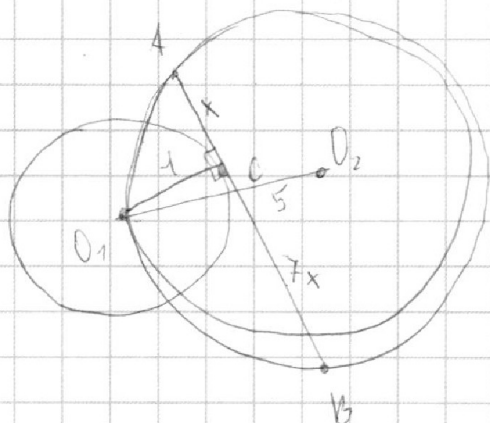
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = ax + 10b$$

$$\begin{aligned} 1) \quad 2 &= 0 + 10b \quad b = \frac{1}{5} \\ 1 &= -8a + 2 \quad a = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{8}x + 2$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 2 &= 0 + 10b \quad b = \frac{1}{5} \\ -1 &= -8a + 2 \quad a = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$y = \frac{3}{8}x + 2$$

$$\begin{aligned} 3) \quad -2 &= 0 + 10b \quad b = -\frac{1}{5} \\ -1 &= -8a - 2 \quad a = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$y = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad 1 &= 0 + 10b \quad b = \frac{1}{10} \\ 1 &= -8a + 2 \quad a = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{8}x + \frac{1}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4. \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$a - b = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$1) 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$2 - 7x = 0 \quad x = \frac{2}{7}$$

$$1) a - b = 0$$

$$\uparrow$$

$$a^2 - b^2 = 0$$

$$2) a + b = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$$

$$-7x - 2 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad -7x - 3 = -2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 + 42x + 9 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$45x^2 + 34x + 5 = 0$$

$$D = 34^2 - 4 \cdot 45 \cdot 5 = 464 = 8 \cdot 23$$

$$x = \frac{-34 \pm 2\sqrt{46}}{90}$$

$$\frac{336 \pm 16}{22 \pm 21}$$

$$\frac{17}{17}$$

$$41x^2 + 34x + 5 = 0$$

$$D = 34^2 - 4 \cdot 41 \cdot 5 =$$

$$x = \frac{-34 \pm 4\sqrt{21}}{82} = \frac{-17 \pm 2\sqrt{21}}{41}$$

$$x = \frac{-17 - 2\sqrt{21}}{41} > 0$$

по модулю

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4} \quad x = 1 \geq 0 \quad x \in (-\infty, 1) \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$D = 4 - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm 0}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pm 2 \pm 0}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

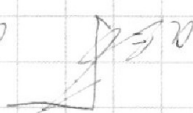
$$x^2 - 2.5x + 1.5 = 0$$

$$x = 2.5 \pm 0 = 2.5$$

$$\frac{\pm 2 \pm 0}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$x = \frac{\pm 2 \pm 0}{4} = 0$$

$$x = \frac{\pm 2 \pm 0}{4} = 0$$



$$x = \frac{\pm 2 \pm 0}{4} = 0$$

$$x = \frac{\pm 2 \pm 0}{4} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$ $bc = 2^{14} \cdot 7^{14}$ $ac = 2^{20} \cdot 7^{34}$

$$\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c} = \frac{2^{14} \cdot 7^{10}}{2^{14} \cdot 7^{14}} = \frac{1}{2^4 \cdot 7^4}$$

$$c = 2^3 \cdot 2^7 a$$

$$33 = 2 \cdot 16,5 + 0,5 = 25,5$$

$$\frac{bc}{ac} = \frac{b}{a} = \frac{2^{14} \cdot 7^{14}}{2^{20} \cdot 7^{34}} = \frac{1}{2^6 \cdot 7^{20}}$$

$$a = 2^3 \cdot 7^{20} b$$

$$c = 2^6 \cdot 7^{24} b$$

$$b^2 \cdot 2^6 \cdot 7^{24} : 2^{14} \cdot 7^{14}$$

$$b^2 : 2^{14} \Rightarrow b^2 : 2^{12} \Rightarrow b = 2^6$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{24}$$

$$a = 2^3 \cdot 7^{20}$$

$$abc = 2^{27} \cdot 7^{44}$$



$$\sqrt{\frac{2^{11} \cdot 2^{11} \cdot 2^{11}}{7^{20} \cdot 7^{20} \cdot 7^{20}}} = \sqrt{\frac{2^{33}}{7^{60}}}$$

2. $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-4ab} = \frac{a+b}{a^2-6ab+9b^2-6b^2} = \frac{a+b}{(a-3b)^2-6b^2}$

$$= \frac{a+b}{(a-(3+2\sqrt{2})b)(a+(2\sqrt{2}-3)b)}$$

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{9+6\sqrt{2}+2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{11+6\sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{b} = k \quad a = kb \quad \frac{kb+b}{k^2b^2-6kb^2+b^2} = \frac{b(k+1)}{b^2(k^2-6k+1)} = \frac{k+1}{b(k^2-6k+1)}$$

$$\begin{array}{r} k^2-6k+1 \mid k+1 \\ -k^2+k \quad \mid k+7 \\ \hline -7k+1 \\ -7k+7 \\ \hline -6 \end{array}$$

$$k^2-6k+1 = (k+1)(k+7) - 6$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a}{b} = k$$

$$a = kb$$

max + min

$$1) \text{ max, min } \times \quad a+b = 7$$

$$a \cdot b = 10$$

$$2) \text{ min, max } \quad a+b = 10$$

$$a \cdot b = 7$$

$$\text{max, min} = 7$$

$$a+b = m$$

$$a^2-6ab+b^2 = (a+b)^2-8ab = m$$

$$8ab = m$$

$$ab = \frac{m}{8}$$

$$(a-b)^2-4ab$$

$$8ab = c \cdot m$$

$$a = \frac{c \cdot m}{8b}$$

$$\frac{cm}{8b^2} = \frac{a}{b}$$

$$m = 8$$

$$\frac{9+7}{8+10}$$

