



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1/ $ab \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$, $bc \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$, $ac \geq 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$$\begin{cases} ab \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac \geq 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{cases} \cdot$$

$\min(abc)$, когда
отсутствуют другие
простые мн-ли
отличные от 2, 3, 5.

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \geq 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

т.к. abc - натур., тогда

$$abc \geq \sqrt{2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}}$$

$$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot \sqrt{3^1} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{5^1}$$

$$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

Пусть $a = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\delta$, $ab \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$
 $b \geq 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\delta}$
 $ac \geq 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$, $c \geq 2^{19-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\delta}$

$$bc \geq 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\delta} \cdot 2^{19-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\delta}$$

$$bc \geq 2^{28-2\alpha} \cdot 3^{28-2\beta} \cdot 5^{40-2\delta}$$

abc - мин bc - максимум abc - мин, т.е. $bc = 2^{28-2\alpha} \cdot 3^{28-2\beta} \cdot 5^{40-2\delta}$

однако $bc \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$, т.е.

$$2^{28-2\alpha} \cdot 3^{28-2\beta} \cdot 5^{40-2\delta} \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

откуда

т.к. α, β, δ - целые, то

$$\alpha = 7, \beta = 7, \delta = 13$$

$$abc = 2^{28-2\alpha} \cdot 3^{28-2\beta} \cdot 5^{40-2\delta} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

abc не может быть меньше (доказано
иной ветвью), также abc существует, т.к.
есть пример

ОТВЕТ $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

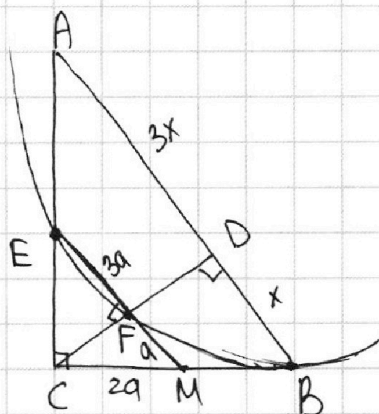
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 2

$AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = ?$

Решение 1



т.к. $AB \perp CD$, $AB \parallel EF$, то
 $EF \perp CD$. Пусть $AD = 3x$, $DB = x$,
 тогда т.к. $\triangle ABC$ — прямоугольный,
 а CD — высота к гипотенузе,
 то $CD^2 = AD \cdot DB = 3x \cdot x$, $CD = \sqrt{3}x$.

Прогоним EF по пересечению с BC . $EF \perp CB = T.M$
 Тогда по Т. Фалеса: $\frac{EF}{AD} = \frac{FM}{DB}$, $\frac{FM}{EF} = \frac{DB}{AD} = \frac{1}{3}$,

если $FM = a$, то $EF = 3a$, аналогично т.к.
 $\triangle ECM$ — прямоугольный, а CF — высота, проведенная к гипот.,
 то $CF^2 = EF \cdot FM = 3a \cdot a$, $CF = \sqrt{3}a$.
 По Т. Пифагора для $\triangle CFM$: $CM = \sqrt{CF^2 + FM^2}$,
 $CM = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

EM — секущая к окр-сти, MB — касат., зч.
 $MB^2 = MF \cdot ME = a \cdot 4a$, $MB = 2a$.

Таким образом, ~~MB = CM~~ $MB = CM$, а зч.
 EM — ср. линия, т.к. $CE = EA$ и
 $\frac{EM}{AB} = \frac{1}{2}$; $\frac{4a}{4x} = \frac{1}{2}$, $\frac{a}{x} = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{a} = 2$

$$S_{\triangle ABC} = CD \cdot AB \cdot \frac{1}{2} = 4x \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}x^2$$

$$S_{\triangle CFE} = CF \cdot FE \cdot \frac{1}{2} = 3a \cdot \sqrt{3}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CFE}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{16}{3}$$

ОТВЕТ: ~~16:3~~ $16 : 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 3 (продолжение)

$$-3\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \leq 2\pi \quad | \cdot 3$$

$$-9\pi \leq \pi + 5\pi k \leq 6\pi \quad | -\pi$$

$$-10\pi \leq 5\pi k \leq 5\pi \quad | : 5\pi$$

$$-2 \leq k \leq 1$$

$$k = -2, k = -1, k = 0, k = 1$$

$$-3\pi \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi h \leq 2\pi \quad | \cdot 2$$

$$-6\pi \leq -\pi + 5\pi h \leq 4\pi \quad | +\pi$$

$$-5\pi \leq 5\pi h \leq 5\pi \quad | : 5\pi$$

$$-1 \leq h \leq 1$$

$$h = -1, h = 0, h = 1$$

Тогда имеем 7 корней: (некоторые совпадают)

$$k = -2: x = \frac{\pi}{3} - \frac{10}{3}\pi = -3\pi$$

$$k = -1: x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi$$

$$k = 0: x = \frac{\pi}{3}$$

$$k = 1: x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi$$

$$h = -1: x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi = -3\pi$$

$$h = 0: x = -\frac{\pi}{2}$$

$$h = 1: x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi = 2\pi$$

совпадают

совпадают

ОТВЕТ: $-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2} \quad | \cdot 5$$

$$-\frac{5}{2}\pi \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5}{2}\pi$$

$$-\frac{5}{2}\pi \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5}{2}\pi \quad | -\frac{\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\left[\frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \frac{\pi}{2} - x = \pi - \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[\frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \frac{\pi}{2} - x + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[5\pi - 10x = 2x + \pi + 20\pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[5\pi - 10x + 2x + \pi = 10\pi + 20\pi n, n \in \mathbb{Z}, \right.$$

$$\left[12x = 4\pi - 20\pi k, k \in \mathbb{Z} \right. \quad | : 12$$

$$\left[8x = -4\pi - 20\pi n, n \in \mathbb{Z}, \right. \quad | : 8$$

$$\left[x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

или

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} b = 6a & (1) \\ b = \frac{6}{5}a & (2) \end{cases}$$

(1)

$$36a^2 - a^2 = 4$$

$$35a^2 = 4$$

$$a = \pm \frac{2}{\sqrt{35}}$$

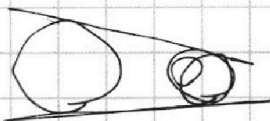
$$(2) \quad \frac{36}{25}a^2 - a^2 = 4$$

$$\frac{11}{25}a^2 = 4$$

$$a^2 = \frac{4 \cdot 25}{11}$$

$$a = \pm \frac{10}{\sqrt{11}}$$

и есть нулевые или как
две группы общие как:



Таким образом, из выше сказанных
рассуждений, нам подходит a :

~~$\frac{2}{\sqrt{35}}$~~ $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

ОТВЕТ: $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 продолжение

~~Исследовать касательные к этим окружностям.~~

Исследуем общие касательные этих окр-стей (находящихся между их центрами, как показано на рисунке).

Если крутить (1) касательную против часовой стрелки, то прямая пересекает ~~каждую~~ каждую окружность ≈ 2 раза, а значит имеем 4 р-ия, т.е. также а подходит (крутим до совпадения с Ox). Если крутить (2) по часовой стрелке до пересечения с Ox , то также имеем 4 решения, а значит а подходит.

Если не крутить в противоположные стороны до ~~момента~~ момента, когда прямые станут $||$ -ми Oy , не имеем пересечений с окр-стями вообще, более того, даже если двинуть такие прямые вправо или влево, то имеем не более 2 р-ия, т.к. пересекает лишь с одной из окружностей, т.е. при повороте в такие прямые не подходят.

Найдем а и b при которых ~~нет~~ будет общей кас. отсчитываясь вправо:

$$x^2 + \left(-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b\right)^2 - 9 = 0$$

В отн-ии к x должен быть равен 0, тогда будет 1 р-ие, а т.е. касание

и одновременно с этим

$$(x-6)^2 + \left(-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b\right)^2 - 4 = 0$$

Аналогично в отн-ии к x должен быть равен 0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{3}{2}b \cdot \frac{a}{2}x \cdot z' + \frac{9}{4}b^2 - 9 = 0$$

$$x^2(1 + \frac{a^2}{4}) - \frac{3ba}{2}x + \frac{9}{4}b^2 - 9 = 0$$

$$D = \frac{9b^2a^2}{4} - 4 \cdot (\frac{9}{4}b^2 - 9)(1 + \frac{a^2}{4}) = 0$$

$$\frac{9b^2a^2}{4} - 4 \left(\frac{9 \cdot b^2 \cdot a^2}{4 \cdot 4} + \frac{9}{4}b^2 - 9 - \frac{9a^2}{4} \right) = 0$$

$$-9b^2 + 36 + 9a^2 = 0, \quad a^2 - b^2 = -4, \quad b^2 - a^2 = 4$$

$$x^2 - 12x + 32 + \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{3}{2}b \cdot \frac{a}{2}x \cdot z' + \frac{9}{4}b^2 = 0$$

$$x^2(1 + \frac{a^2}{4}) - x \cdot (12 + \frac{3ba}{2}) + \frac{9}{4}b^2 + 32 = 0$$

$$D = (12 + \frac{3ba}{2})^2 - 4 \cdot (1 + \frac{a^2}{4}) \cdot (\frac{9}{4}b^2 + 32) =$$

$$= \frac{9b^2a^2}{4} + 12 \cdot \frac{3ba}{2} \cdot 2 + 144 - 4 \cdot (\frac{9}{4}b^2 + \frac{9 \cdot a^2 \cdot b^2}{4 \cdot 4} +$$

$$+ 32 + 8a^2) = \frac{9b^2a^2}{4} + 36ab + 144 - 9b^2 - \frac{9 \cdot a^2 \cdot b^2}{4} -$$

$$- 128 - 32a^2 = -9b^2 + 36ab - 32a^2 + 16 = 0$$

$$\begin{cases} 9a^2 - 9b^2 + 36 = 0 \\ -32a^2 - 9b^2 + 36ab + 16 = 0 \end{cases} \cdot 9, \quad \begin{cases} 36a^2 - 36b^2 + 144 = 0 \\ -288a^2 - 81b^2 + 144 - 324a = 0 \end{cases}$$

$$36a^2 + 288a^2 - 324ab - 36b^2 + 81b^2 = 0$$

$$324a^2 - 324ab + 45b^2 = 0 \quad | : 9$$

$$36a^2 - 36ab + 5b^2 = 0$$

$$36(a - \frac{5}{6}b)(a - \frac{1}{6}b) = 0$$

$$36(a - \frac{5}{6}b)(a - \frac{1}{6}b) = 0$$

$$(6a - 5b)(6a - b) = 0$$

$$\begin{cases} 6a - 5b = 0 \\ 6a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{6}b \\ a = \frac{1}{6}b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 36a^2 - 36ab + 5b^2 &= 0 \\ 36a^2 - 36ab + 5b^2 &= 0 \\ 36a^2 - 36ab + 5b^2 &= 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 4 | а-? ^{система} найдется b , что $\forall$ ур-е имеет 4 реш.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

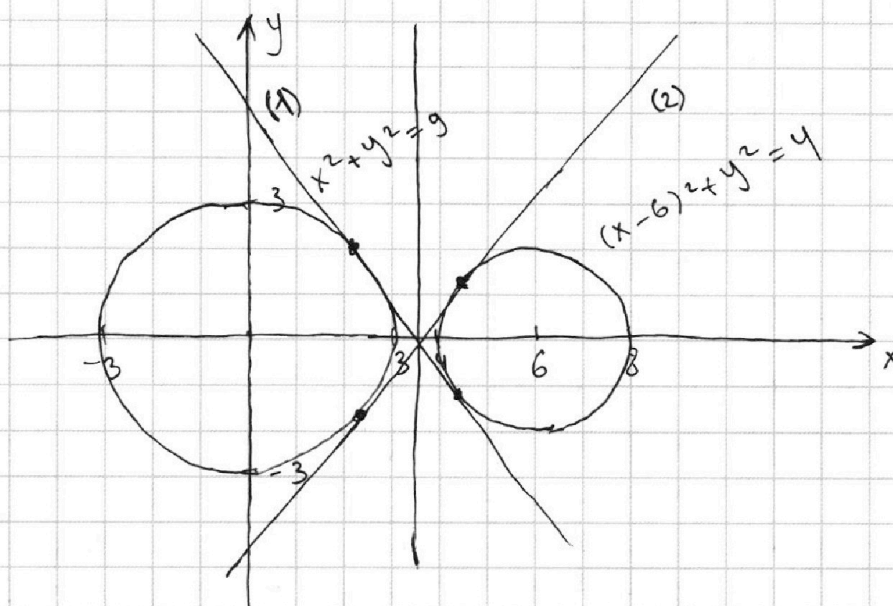
$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \quad (c) \\ x^2 + y^2 = 9 \quad (a) \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \quad (b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 - 12x + 36 + y^2 &= 36 - 32 \\ (x-6)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

- (a) окр-сть с центром $(0;0)$ и радиусом **3**
(b) окружность с центром $(6;0)$ и радиусом **2**

Изобразим систему на к. п.:



(c) Это прямая, причем ее наклон a и b отвечает за сдвиг прямой вправо и влево.

"a" - регулирует за сдвиг прямой

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~5

ограничения:

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \\ x &\neq 1 \\ y &\neq \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

Пусть $\log_3 x = a$, тогда имеем:

$$a^4 + 6 \cdot \frac{1}{a} = 2,5 \cdot \frac{1}{a} - 8$$

$$a^4 + 3,5 \cdot \frac{1}{a} + 8 = 0 \quad | \cdot a \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1$$

$$a^5 + 8a + 3,5 = 0$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \log_{5y} 3 - 8$$

Пусть $\log_3 5y = b$, тогда

$$b^4 + 2 \cdot \frac{1}{b} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8$$

$$b^4 - 3,5 \cdot \frac{1}{b} + 8 = 0 \quad | \cdot b \neq 0, \text{ т.к. } y \neq \frac{1}{5}$$

$$b^5 + 8b - 3,5 = 0$$

$$\begin{cases} a^5 + 8a + 3,5 = 0 \\ b^5 + 8b - 3,5 = 0 \end{cases}$$

$$a^5 + b^5 + 8(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 8(a+b) = 0$$

Откуда имеем $a+b=0$ вернемся к замене

$$\begin{aligned} \log_3 x + \log_3 5y &= 0 \\ \log_3 5yx &= \log_3 1 \\ 5yx &= 1 \\ xy &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 продолжение

с.п.	O_x	O_y
1.	11	0
2.	10	3
3.	9	6
4.	8	9
5.	7	12
6.	6	15
7.	5	18
8.	4	21
9.	3	24
10.	2	27
11.	1	30
12.	0	33

исчитаем для
каждого угла
варианты:

всх:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 стороны параллелограмма
закрытые промежутки:

$$y=0, \quad y=42, \quad y=-\frac{x}{6}, \quad y=-\frac{x}{6} \\ y=-3x, \quad y=-3x+60,$$

значит $\checkmark$ количество пар целых координат в нем

$$(1+4+7+\dots+42) \cdot 2 + 42 + 42 = \\ = \frac{(1+42) \cdot 7}{2} \cdot 2 + 42 \cdot 2 =$$

$$= 7 \cdot 43 + 42 \cdot 2 = 42 \cdot 7 + 42 \cdot 2 + 7 = \\ = 42 \cdot 9 + 7 = 385$$

Значит первую пару выбираем 385
способами, а оставшиеся

$$\text{Условие} \quad 3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \\ 3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$$

Можно интерпретировать, что координаты
~~пар~~ образуют отрезок, который
как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами
параллельными осям. Тогда утроенный
катет 11-ный $0x$ в сумме с
катетом 11-ным $0y$ должны давать
33. Тогда катет 11-ный $0y$
должен $\div 3$ (также из условия)

либо ~~так~~ такой отрезок лежит на
на одной из осей

Тогда имеем варианты сторон



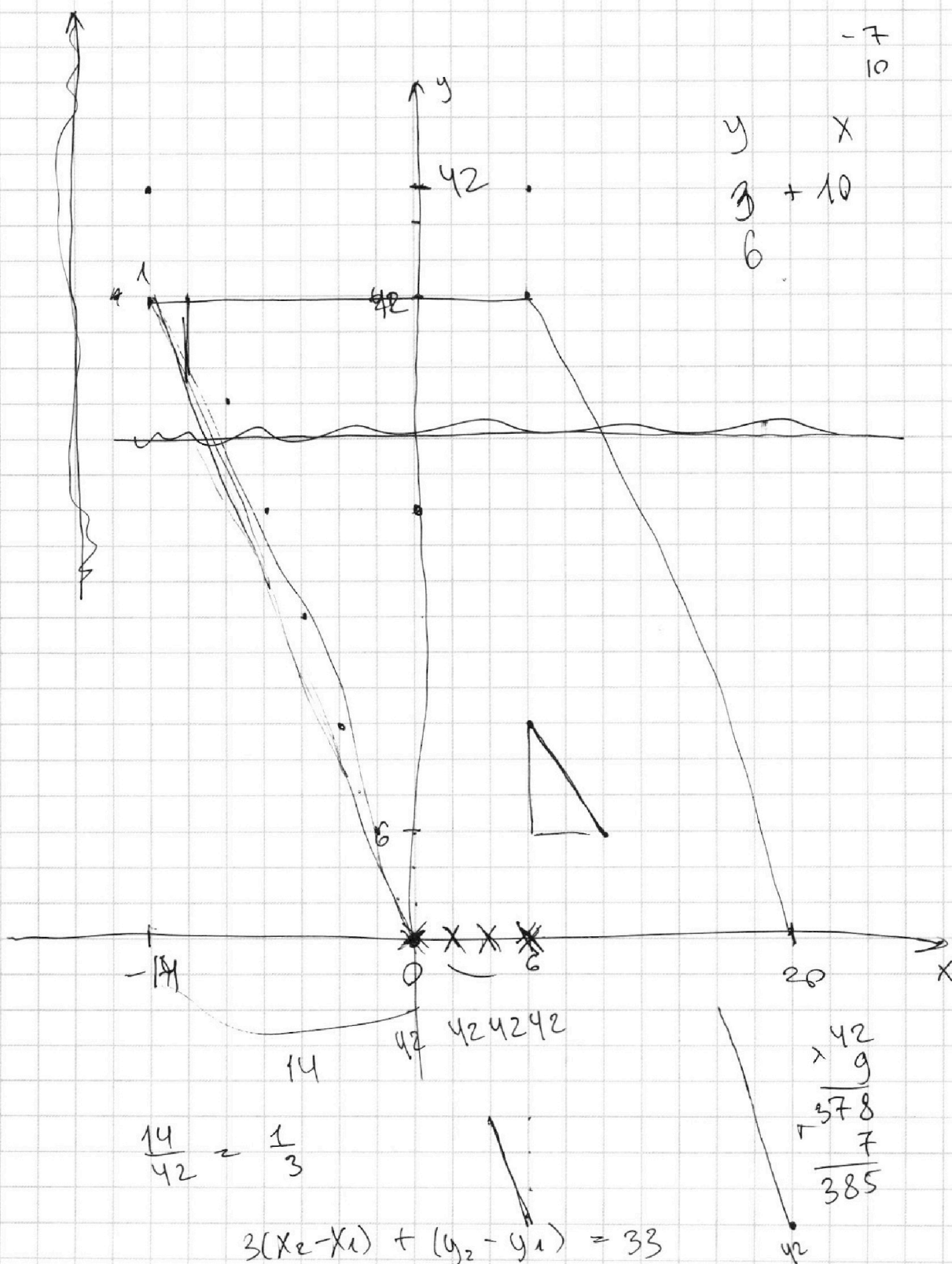
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$ab : 2^9 3^{10} 5^{10} \quad bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{20}$$

$$abc : \underbrace{5^{30} \cdot 3^{18} \cdot 2^{19}}_{ac} \cdot b$$

$$a^2 b^2 c^2 :$$

$$\frac{19+9+14}{28} = \boxed{42}$$

$$\frac{19+9-7}{21}$$

$$36a^2 - 6ab - 2ab + 5b^2$$

$$a^5 + b^5$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \\ - a^5 + b a^4 \\ \hline b^5 - b a^4 \\ - + a^5 \\ \hline b^5 + b^4 a \\ - b a^4 - b^4 a \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ \hline a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4 \end{array}$$

$$(a+b)^5$$

$$(a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = \log_3 5xy = 0$$

$$\log_3 5xy \in \log_3 1$$

$$(a+b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4)$$

$$a^5 - a^4 b + a^3 b^2 - a^2 b^3 + a b^4 + b^5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3) \quad 5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2}$$

Через синус

$$\frac{36 \pm 26}{6} = \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{66 \pm 46}{12} = \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

Пусть $\arcsin(\cos x) = \alpha$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$5\alpha = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

пусть $b = 36^2 - 36 \cdot 4 \cdot 56 = 16$

$$366^2(36 - 20) = 16$$

$$\sin(\alpha) = \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\frac{366 \pm 46 \cdot 6}{72} = \frac{96 \pm 6}{18}$$

$$\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

4)

$$\begin{cases} ax + 2y - 36 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - (2x + 32)) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + (x - 6)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{где } \arcsin \text{ радиусам}$$

или $y^2 + x^2 - 12x + 36 = 4$

$$y^2 + (x - 6)^2 = 4$$

$$ax + 2y - 36 = 0$$

$$2y = -ax + 36$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{36}{2}$$

где b наименьшее
равное y
реш.

$$\frac{52}{9} = 288$$

$$\frac{288}{36} = 324$$

$$81 \cdot 4 = 324$$

$$\frac{36}{9} = 4$$

отбрасывает
вверх

за единицу
вниз

НАЙДЕТСЯ

ЗНАЧЕНИЕ b

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

$$ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$a = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$$

$$b = 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\gamma}$$

$$c = 2^{19-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\gamma}$$

$$(9-\alpha + 19-\alpha) = 14$$

$$(10-\beta + 18-\beta) = 13$$

$$(10-\gamma + 30-\gamma) = 13$$

$$2\gamma = 27, \gamma = 13$$

$\text{mm}(abc) = ?$

a, c - кресты,
кресты a, c - нет
привести пример
 $\beta = 7$
или нет?

$$28 - 2\alpha = 14$$

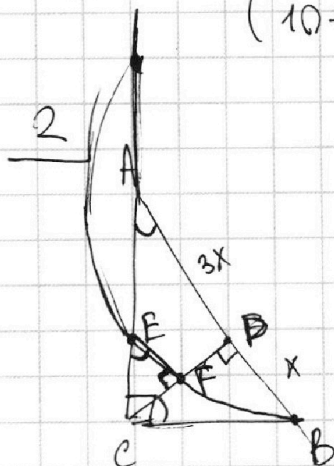
$$\alpha = 7$$

$$\gamma = 5$$

аккуратно
Тройки



$$\frac{28}{-13} = \frac{15}{15}$$



$AB \parallel EF, AD : DB = 3 : 1$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = ?$$

$$S_{\triangle ABC} = AC \cdot CB \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{\triangle CEF} = CF \cdot EF \cdot \frac{1}{2}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle BAC, \frac{EF}{AC} = \frac{EC}{AB} = \frac{CF}{CB}$$

$$AC \cdot CB = CD \cdot AB$$

$$AC \cdot CB = \sqrt{3}x \cdot 4x = 4\sqrt{3}x^2$$

$$AC \cdot CB = \frac{AC \cdot CB}{AB}$$

$$AC \cdot CB = CD \cdot AB$$

$$AC \cdot CB = \sqrt{3}x \cdot 4x = 4\sqrt{3}x^2$$

$$\frac{2}{1.5} = \frac{2}{1.5}$$

$$\frac{28}{12} = \frac{5}{3}$$

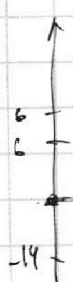
$$\sin \alpha = \cos x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \right)$$

$$\frac{5}{2}$$

Р/В - т. кас
стенерь точки?

$$1, 2, 3$$



21.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

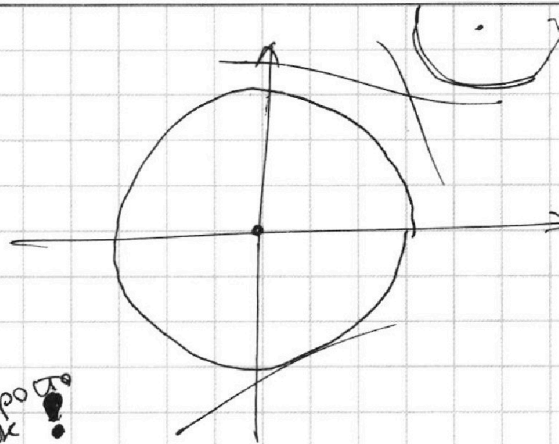
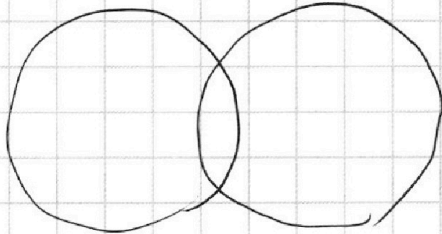
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чертежи



5

xy - ? не просто так!

ограничи:

$$x > 0 \\ x \neq 1$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \underbrace{\log_x 3}_{\frac{1}{\log_3 x}} - 8$$

$$243 = 3 \cdot \frac{81}{3^4} \\ 3^5$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t} - 8$$

$$t^4 + \frac{7}{2} \frac{1}{t} + 8 = 0$$

$$\log_3 x + \log_3 y = \log_3 xy$$

$$t^5 + 8t + 3,5 = 0$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

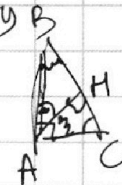
$$\log_3^4 (5y) + 2 \cdot \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \underbrace{\log_{5y} 3}_{\frac{1}{\log_3 5y}} - 8$$

аналогично!

$$m^4 + \frac{2}{m} = \frac{11}{2} \frac{1}{m} - 8$$

$$m^4 - 3,5 \frac{1}{m} + 8 = 0 \quad | \cdot m$$

$$m^5 + 8m - 3,5 = 0$$



$$\frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH}$$

$$AH^2 = BH \cdot HC$$

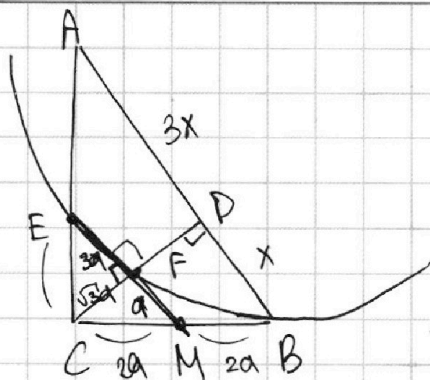
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB \parallel EF$

$$MB^2 = MF \cdot ME$$

$$MB^2 = a \cdot 4a$$

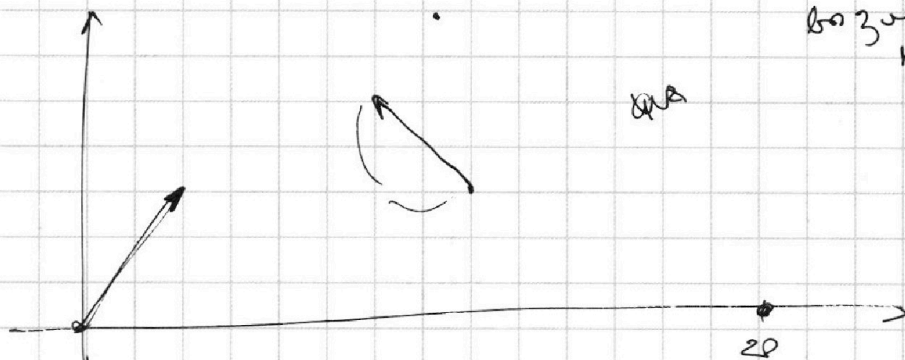
$$MB = 2a$$

$$3a^2 + a^2 = 4a^2$$

средний

2a!
маленький!

возмущение
на границе



кол-во пар $\tau. A(x_1, y_1)$ и $\tau. B(x_2, y_2)$

x_1, x_2, y_1, y_2 — целые

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

так в сумме 33

имеет вектор

сумма координат вектора $\rightarrow 33$

сумма ст-и приращений Δ -ка,

1 и 32
2 и

выбираем точку $\rightarrow$ к ней
переходим.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

